ARCHIV DER MATHEMATIK UND PHYSIK

Digitized by Google

510.5
A673

Digitized by Google

Digitized by Google

ARCHIV

der

MATHEMATIK UND PHYSIK

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten.

Herausgeber:

Dr. Johann August Grunert

Königl. Geheimer Regierungs-Rath und ord. Professor an der Universität zu Greifswald. Ritter des rothen Adlerordens 3. Kl. mit der Schleife, Offizier des Ordens der Königl. italienischen Krone, Ritter des Kaiserl. österreichischen Franz-Josephs-Ordens, des Königl. Schwedischen Nordsternordens, des Königl. italienischen St. Mauritius- und Lazarus-Ordens, und des Grossherzogl. Badischen Ordens vom Zähringer Löwen. Mitglied der Kaiserlichen und Königlichen Akademieen und Societäten der Wissenschaften in Wien, München, Stockholm, Upsala, Prag, Pest, Krakau, Erfurt und vieler anderen gelehrten Gesellschaften.

Vierundfunfzigster Theil. ~~Viertes Heft~~.

Greifswald.

C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung,

Th. Kunike.

1872.

Digitized by Google

162481

Digitized by Google

Inhalts-Verzeichniss

des vierundfunfzigsten Theils.

№ der Abhandlung.		Heft.	Seite.
	Arithmetik.		
II.	Sommation directe et élémentaire des quatrièmes puissances des n premiers nombres entiers. Par Monsieur Georges Dostor, Docteur des sciences Professeur de mathématiques à Paris	I.	70
XII.	Etude sur les méthodes d'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre d'une fonction de deux variables indépendantes. Par V. G. Imschenetsky, professeur à l'Université impériale de Kazan. Traduit du russe par J. Hoüel	II.	209
XVII.	Zur Characteristik der Zahl 60. Von Ingenieur-Hauptmann von Wasserschleben, in Magdeburg	IV.	411
XX.	Beitrag zur Theorie der elliptischen Integrale. Von Franz Unferdinger, Lehrer der Mathematik an der öffentlichen Oberrealschule am hohen Markt in Wien	IV.	459
	Geometrie.		
VI.	Neue vollständige Lösung der Aufgabe: Mit einem gegebenen Brennpunkte einen durch drei gegebene Punkte gehenden Kegelschnitt zu beschreiben. Von dem Herausgeber	II.	99

Digitized by Google

№ der Abhandlung.		Heft.	Seite.
VII.	Kleinere mathematische Mittheilungen. Von Herrn Prof. F. Hoza, Lehrer an der Oberrealschule in Königgrätz	II.	164
IX.	Ueber einen merkwürdigen Satz von den Kegelschnitten. Von dem Herausgeber	II.	183
XIII.	Ueber einen merkwürdigen Satz von den Kegelschnitten. Von dem Herausgeber	III.	361
XIV.	Ueber einen merkwürdigen Satz von den Kegelschnitten. Von dem Herausgeber	III.	375
XV.	Bemerkungen über einige Punkte der äusseren Berührungskreise eines Dreieckes. Von Emil Hain, Lehrer am Communal - Realgymnasium in der Leopoldstadt in Wien	III.	382
XXI.	Die steierischen Landschaftsmathematiker vor Kepler. Von Dr. Richard Peinlich, Director des k. k. Ober-Gymnasiums in Graz	IV.	470

Geodäsie.

V.	Ein Apparat zur mechanischen Lösung der nach Pothenot, Hansen u. A. benannten geodätischen Aufgaben. Von Herrn Professor Dr. Carl Max Bauernfeind, Director der Königl. polytechnischen Schule in München	I.	81
VIII.	Eine neue Beweisführung über die Lehmann'schen Sätze bei der Pothenot'schen Aufgabe und Ableitung einer neuen Formel für Basislänge des Fehlerdreieckes etc. Von Herrn Jos. Schlesinger, k. k. Professor an der Forstakademie zu Mariabrunn	II.	174

Mechanik.

I.	Das Projiciren der Kräfte, als Ersatz des Kräftenparallelogramms in der analytischen Statik. Von Herrn Dr. Wilh. Matzka, jubilirtem k. k. ordentl. Universitäts-Professor zu Prag	I.	1

Digitized by Google

№ der Abhandlung.		Heft.	Seite.
III.	Aufsuchung der parallelen Drehaxen, für welche ein materielles Pendel die nämliche Schwingungszeit besitzt. Von Herrn Prof. Dr. Eduard Zetzsche in Chemnitz	I.	73

Optik.

XVI.	Ueber die Farben. Von Josef Kudelka. Professor zu Linz in Ober-Oesterreich	IV.	385

Astronomie.

XIX.	Ueber Johannes Kepler's Leben und Wirken. Festrede den 15. October 1871 bei der Vorfeier des 300 jährigen Geburtstages Kepler's zu Schloss Mühlek nächst Graz gehalten von Professor Johann Bogner	IV.	447

Nautik.

XVIII.	Neue Auflösungen einer nautisch-astronomischen und einer geodätisch-astronomischen Aufgabe. Von dem Herausgeber	IV.	419

Physik.

IV.	A. Ueber die Bestimmung des Leitungswiderstandes der Flüssigkeiten. B. Vergleichung des Leitungswiderstandes eines Metalldrahtes und einer Flüssigkeitssäule. Von Herrn Dr. Külp, Assistenten der Physik am grossherzogl. Polytechnikum in Darmstadt	I.	77
X.	Die Bestimmung des Einflusses des Rades der Fallmaschine. Von Herrn Dr. Külp, Assistenten der Physik am grossherzogl. Polytechnikum in Darmstadt	II.	206
XI.	Das Verhältniss der Wassermengen bei sinkendem und constantem Niveau. Von Herrn Dr. Külp, Assistenten der Physik am grossherzogl. Polytechnikum in Darmstadt	II.	207

Digitized by Google

№ der Abhandlung. Heft. Seite.

Uebungsaufgaben für Schüler.

XXII. Verschiedene Sätze und Aufgaben, welche zugleich als Schulaufgaben benutzt werden können. Von Emil Hain, Lehrer am Leopoldstädter Communalreal-Gymnasium in Wien . . . . IV. 493

Literarische Berichte*).

CCXIII. . . . . I. 1
CCXIV. . . . . II. 1
CCXV. . . . . III. 1
CCXVI. . . . . IV. 1

*) Jede einzelne Nummer der Literarischen Berichte ist für sich besonders paginirt von Seite 1 an.

Digitized by Google

I.

Das Projiciren der Kräfte, als Ersatz des Kräftenparallelogramms in der analytischen Statik.

Von

Herrn Dr. *Wilh. Matzka*,

jubilirtem k. k. ordentl. Universitäts-Professor zu Prag.

Bekanntlich pflegt man auch in der analytischen Statik eben …, wie in der elementaren, vor Allem die Zusammensetzung zweier …uf einen Punkt unter einem hohlen Winkel wirkenden Kräfte zu …hren, und indem man die Kräfte durch ihnen gleichgerichtete und …roportionirte Strecken vorstellt, das allbekannte Kräftenparallel…gramm als Grundmittel solcher Zusammensetzungen aufzuführen …nd bald darnach aus ihm das Kräftenpolygon herzuleiten, und im …eiteren nach Bedarf jenes oder dieses zum Erweis allgemeiner Sätze …der zur Lösung von Aufgaben über Zusammensetzung von Kräften … benützen. In einer nur der elementaren Algebra sich bedie…enden rechnenden Statik finde ich diese Darstellung der Kräfte durch …trecken und die Verzeichnung jener beiden Hilfsfiguren ganz ange…essen; nicht so dagegen in der höheren analytischen Statik, …elche an der Hand der Differential- und Integralrechnung nebst ihren …nwendungen auf die Coordinatengeometrie den Lernenden leiten soll. …nn da scheint es, als könne sie mit ihren analytischen Rechnungen …cht zurecht kommen, sondern müsse die Zeichnung der Kräfte als …ecken und das Parallelogramm oder Polygon der Kräfte als Krücke … Hand nehmen.

Diesem mir nicht vollkommen logisch und wissenschaftlich richtig …cheinenden Vorgange der analytischen Statik habe ich nun in …iner letzten im Studienjahr 1869—70 (nebenher absichtlich bemerkt

Digitized by Google

VNARSI JOOONAT

in meinem zweiundsiebenzigsten Lebensjahre) über analytische Mech nik gehaltenen Vorlesung — wie ich theilweis auch schon in frühere Jahren that — dadurch auszuweichen mich bestrebt, dass ich d Vorstellung der Kräfte durch Strecken und damit das Parallelogram und Polygon der Kräfte ganz vermied und an ihrer statt bloss die a und für sich, nach Angriffspunkt, Richtung und Stärke, bestimmte Kräfte in Betracht nahm, folglich ihre Zusammensetzung und Ze legung durchgehends blos rechnend ausführte; wobei vornehmlich d orthogonale Projection der Kräfte auf Axen oder Ebenen in Verwe dung kam, deren Grundlehrsatz (§ 4) überdies höchst einfach sic erweisen lässt.

In der Hoffnung, es werde dieses Verfahren kritischen Freunde der analytischen Mechanik ebenfalls behagen, schreite ich zu desse Veröffentlichung; indem ich jedoch zur Erzielung der erwünschte Vollständigkeit, als Einleitung noch die analytische Zusammensetzun zweier auf einen Punkt unter einem rechten Winkel wirkenden Kräf anzuführen deshalb für nöthig erachte, weil sie auch in neueren Leh büchern dieses Gegenstandes nicht genügend gründlich und wisse schaftlich abgehandelt ist.

1.

Zusammensetzung zweier auf einen Punkt unter einem Winkel wirkenden Kräfte.

Eigenschaften der Resultirenden solcher Kräfte.

1. Derartig wirksame zwei Kräfte (Seitenkräfte, Componenten haben allbekanntlich jederzeit eine Resultirende (Mittelkraft), dere Richtung in die Ebene der Richtungen der Componenten, und zwa zwischen diese Richtungen, folglich so hinein fällt, dass sie den hohle Winkel derselben Richtungen zertheilt.

2. Wird eine Componente verstärkt, so nimmt der Wink zwischen ihr und der Resultirenden ab; weil die neue Resultirend sich aus der früheren und dem Zuwachs (der Verstärkung) der Com ponente zusammensetzt, folglich zwischen die Richtungen der zw letzteren Kräfte fällt.

3. Lässt man in Gedanken die Grösse (Stärke) dieser eine Componente von Null an unaufhörlich beliebig weit oder in's Unend liche wachsen, so wird die Richtung der Mittelkraft, von jener de ungeänderten Componente an, gegen die der wachsenden hin ein Reihe nach einander folgender Zwischenlagen, ja sogar alle mög lichen Zwischenlagen in dem Falle annehmen, wenn jene Comp

Digitized by Google

nente stetig (continuirlich) wächst, nemlich alle denkbaren Stufen der Grösse (Stärke) nach einander durchwandert.*). Sonach wird im letzteren Falle dieselbe Componente sicher so gross gewählt werden können, dass die Richtung der Resultirenden auf jegliche gewisse, zwischen den Richtungen der Componenten angewiesene, Richtung zu liegen komme.

4. Sind demnach die Richtungen zweier (zusammenzusetzenden) Kräfte und ihrer Resultirenden, dann die Stärke der einen Componente gegeben; so ist dadurch die Stärke sowohl der anderen Componente als auch der Resultirenden mit bestimmt; und zwar

wenn man in die eine jener beiden Richtungen irgend zwei Kräfte legt; so müssen sowohl die in die andere Richtung zu legenden (zweiten) Componenten, als auch die ihnen zugehörigen Resultirenden im selben Verhältnisse zu einander stehen, wie jene zwei ersten Componenten; oder kürzer: den ersten Componenten sind nicht allein die zweiten Componenten, sondern auch die Resultirenden proportionirt.

Sind nemlich (Taf. I. Fig. 1) aus M die Richtungen MA, MB zweier Componenten, und MC die Richtung ihrer Resultirenden geführt und zugleich festgelegt; so entspricht einer jeden in die MA gelegten Kraft P eine gewisse in der MB wirkende Mitkraft Q, und beiden eine bestimmte nach MC gerichtete Resultirende R. Legt man daher in die MA irgend eine andere Kraft P', so entspricht auch ihr eine gewisse nach MB wirksame Kraft Q', und ihnen beiden eine bestimmte, nach MC gerichtete Resultirende R'; und nun verhält sich

$$P:P' = Q:Q' = R:R'.$$

Denn weil die drei Kräfterichtungen MA, MB, MC unverrückbar sind, und die längs einerlei Richtung wirkenden Paare von Kräften in ihre Summe sich vereinen; so entspricht

---

*) Ob Kräfte und welcherlei, ähnlich den Raum- und Zeitgrössen, stetig seien, Stetigkeit (Continuität) besitzen, folglich ob es auch Paare incommensurabler Kräfte gebe, daher die Masszahlen mancher Kräfte beziehlich der Krafteinheit ihrer Art irrational sein können; mithin auch, ob die Aenderungen von Kräften beliebig klein, also selbst unendlich klein sein können, demnach die Masszahlen der Kräfte differenzirt und integrirt werden dürfen; diese in meinen Vorträgen von mir erörterte und theilweis bejahte Frage finde ich in keinem der vielen mir bekannten Werke über Mechanik und Physik besprochen. Und gleichwohl möchte ein strenger Denker kaum über diese insofern heikle Frage sich hinwegsetzen, als wir ja über das eigentliche Wesen der Kräfte im Unklaren stehen.

Digitized by Google

der längs der MA wirkenden Summe $P+P'$,
die „ „ MB wirkende „ $Q+Q'$
und „ „ „ MC „ „ $R+R'$;

mithin müssen, zufolge eines Lehrsatzes der Proportionalität zusammengehöriger Arten von Grössen, jenen Kräften P einerseits die Kräfte Q, und andererseits auch die Kräfte R proportionirt sein, also obige Proportionen bestehen.

5. Aus der ersten Proportion folgt $\frac{Q}{P} = \frac{Q'}{P'}$ d. i. das Verhältniss der 2ten Componente Q zur 1sten P bleibt sich gleich, welche auch die ersten Componenten sein mögen, wofern — wie vorausgesetzt — zwei die Richtungen MA, MB, MC festlegenden Winkel, wie etwa AMB und AMC, sich gleich bleiben. Dagegen muss es sich ändern, sobald auch nur einer dieser 2 Winkel sich verändert. Ist demnach wie gewöhnlich der Winkel AMB der Componenten P, Q fest bestimmt, so muss ihr Verhältniss $\frac{Q}{P}$ eine gewisse Function des anderen Winkels AMC sein, den die Richtung der Resultirenden R mit der ersten Componente P bildet.

6. Wenn zwei Paar unter gleichen Winkeln wirkende Componenten auch mit ihren Resultirenden stückweis gleiche Winkel bilden, so stehen die gleichlägigen Kräfte in gleichen Verhältnissen.

Haben nemlich die Kräfte P, Q die R, und die Kräfte P', Q' die R' zur Resultirenden, und ist der Winkel $(P.Q) = (P'.Q')$, $(P.R) = (P'.R')$ und $(Q.R) = (Q'.R')$; so verhält sich

$$P:P' = Q:Q' = R:R'$$

oder auch

$$P:Q:R = P':Q':R'.$$

Denn zwei solche ebene Bündel je dreier Richtungen können durch's Aufeinanderlegen zur Deckung gebracht werden, und dann kommt der vorige Satz zur Anwendung.

2.

Zusammensetzung zweier gegen einander senkrecht auf einen Punkt wirkenden Kräfte.

Auf einen Punkt M (Taf. I. Fig. 2) wirken nach den Richtungen MA, MB, welche mit einander den rechten Winkel AMB machen,

Digitized by Google

die Kräfte P, Q; man bestimme die Grösse R und die Richtung MC ihrer Resultirenden, also einen der complementären Winkel $AMC = \alpha$, $BMC = \beta$.

1. Bestimmung der Grösse der Resultirenden.

Wir errichten in M auf MC senkrecht die DE, so wird $AMD = \beta$, $BME = \alpha$, In den Richtungen MC, MD denken wir uns 2 Kräfte H, K mit solcher Stärke wirksam, dass ihre Resultirende in die Zwischenrichtung MA falle und $= P$ sei; dann ebenso längs der Richtungen MC, ME zwei Kräfte J, L so stark wirkend, dass ihre Resultirende auf die Zwischenrichtung MB falle und $= Q$ sei; welch Beides nach § 1, 3—5 möglich ist. Sohin stellen wir die Resultirende R der Kräfte P, Q als die Resultirende der 2 Paar Kräfte H, J und K, L dar, von denen jenes in der MC, dieses in der DE wirkt.

Die drei Richtungen	MA,	MB,	MC,
längs deren die Kräfte	P,	Q,	R
wirken, machen nun nach einander die Winkel . . .	$\frac{\pi}{2}$,	β,	α;
dieselben Winkel bilden die Richtungen	MC,	MD,	MA
der Kräfte	H,	K,	P
und die Richtungen	ME,	MC,	MB
der Kräfte	L,	J,	Q.

Diese 3 Dreizahlen (Triaden) verbundener Kräfte müssen demnach (gemäss § 1, 6) einander proportionirt sein, nemlich es müssen sich verhalten:

$$P:Q:R = H:K:P = L:J:Q.$$

Aus diesen Proportionen finden wir für die zwei einander entgegen gerichteten Kräfte K, L die Proportionen:

$$K:P = Q:R,$$

$$P:L = R:Q;$$

folglich:

$$K = L,$$

und diese beiden Kräfte können beseitigt werden. Sonach erscheint R als Resultirende der mit ihr gleichgerichteten Kräfte H, J, und ist deshalb ihrer Summe gleich, d. i.

$$R = H + J.$$

Für die zwei gleichgerichteten Kräfte H, J erhalten wir dagegen die Proportionen:

Digitized by Google

$$H:P = P:R,$$

$$J:Q = Q:R;$$

daher die Ausdrücke:

$$H = \frac{P^2}{R},$$

$$J = \frac{Q^2}{R};$$

und sonach schliesslich:

$$R = \frac{P^2}{R} + \frac{Q^2}{R}$$

oder:

(I) . . . . $R^2 = P^2 + Q^2$.

Die zweite Potenz (des Zahlwerthes) der Resultirenden zweier unter einem rechten Winkel auf einen Punkt wirkenden Kräfte gleicht demnach der Summe der zweiten Potenzen (der Zahlwerthe) dieser beiden Kräfte (Componenten).

2. Bestimmung der Richtung der Resultirenden.

Da hier der von den Richtungen der beiden Componenten P, Q eingeschlossene Winkel AMB (Taf. I. Fig. 3) als ein rechter fest bestimmt ist, so muss das Verhältniss $\frac{Q}{P}$ der zweiten Componente Q zur ersten P (vermöge § 1, 5) eine gewisse Function des Winkels $AMC = \alpha$, daher auch umgekehrt dieser Winkel eine eigenthümliche Function jenes Verhältnisses sein, also

$$\alpha = f\left(\frac{Q}{P}\right).$$

Zur Dreizahl (Trias) der Kräfte P, Q, R, die längs der Richtungen MA, MB, MC wirken, schaffen wir uns noch in einem congruenten Bündel solcher 3 Richtungen eine proportionirte Dreizahl neuer Kräfte. Dazu nehmen wir nebst der MB die der MA entgegengesetzte Richtung MA', und die in den Winkel BMA' fallende Senkrechte MC' der MC; wonach auf jenen 3 Richtungen die MB, MA', MC' senkrecht stehen, also paarweis dieselben Winkel wie jene 3 bilden. In die MA' legen wir eine beliebige Kraft $Q' < P$, der sohin eine nach MB gerichtete zweite Componente P' und die nach MC' gerichtete Resultirende R' in der Weise entsprechen muss, dass

Digitized by Google

jenen 3 ursprünglichen Kräften P, Q, R die neu geschaffenen P', Q', R' als gleichlägig proportional werden, daher sich verhält

$$\frac{P'}{P} = \frac{Q'}{Q} = \frac{R'}{R}.$$

Nach diesen Vorbereitungen ersetzen wir die Kräfte P, Q durch ihre Resultirende R, und die Kräfte P', Q' durch ihre Resultirende R'; da dann diese 2 ebenfalls rechtwinkeligen Ersatzkräfte R, R' die nach MD unter dem Winkel $CMD = \varepsilon$ gerichtete Resultirende S geben, und dieser Winkel den, dem vorigen nachgebildeten Ausdruck

$$\varepsilon = f\left(\frac{R'}{R}\right)$$

erhält.

Fassen wir dagegen jene 2 Paar Kräfte P, Q und P', Q' so zusammen, dass wir die 2 einander entgegenwirkenden P, Q' in die nach MA wirkende Ueberschusskraft $P - Q'$, und die längs der MB thätigen 2 Kräfte Q, P' in ihre gleich gerichtete Summe $Q + P'$ zusammenziehen; so werden jene 4 Kräfte durch diese 2 zu einander senkrechten $P - Q'$, $Q + P'$ ersetzt, deren Resultirende ebenfalls die früher gefundene S sein muss. Da deren Richtung MD mit der Richtung MA der ersten Componente $P - Q'$ den Winkel $AMD = \alpha + \varepsilon$ macht, so muss ihm der den früheren ähnliche Ausdruck

$$\alpha + \varepsilon = f\left(\frac{Q + P'}{P - Q'}\right)$$

zugehören.

Zur Vereinfachung der ferneren Rechnungen setzen wir die Quotienten oder Verhältnisse

$$\frac{Q}{P} = x, \qquad \frac{R'}{R} = y;$$

so ist nach obigen Proportionen auch

$$\frac{P'}{P} = y \text{ und } \frac{Q'}{Q} = y,$$

daher:

$$\frac{Q + P'}{P - Q'} = \frac{\frac{Q}{P} + \frac{P'}{P}}{1 - \frac{Q'}{Q} \cdot \frac{Q}{P}} = \frac{x + y}{1 - yx},$$

und sohin verwandeln obige 3 Gleichungen sich in:

Digitized by Google

$$\alpha = f(x), \qquad \varepsilon = f(y), \qquad \alpha + \varepsilon = f\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$$

und letztere in die Functionalgleichung:

$$f(x) + f(y) = f\left(\frac{x+y}{1-xy}\right).$$

Um nun die in Frage stehende Form der Function $f(x)$ zu ermitteln, brauchen wir uns nur zu erinnern, dass der Quotient $\frac{x+y}{1-xy}$ in der Goniometrie als Ausdruck der Tangente der Summe zweier Winkel vorkommt, deren Tangenten x und y sind, folglich hierfür ist

$$\text{ang tang}\, x + \text{ang tang}\, y = \text{ang tang}\, \frac{x+y}{1-xy}.$$

Diese Gleichung ist der vorigen ähnlich, in welcher $f(x)$ mit x zugleich verschwindet; weshalb wir auch ang tang x mit ihnen dadurch verschwinden machen, dass wir diesen Winkel als den möglich kleinsten also spitzen Winkel gelten lassen, dessen Tangente $= x$ ist. Da nun kann die Function $f(x)$ von dem ang tang x nur in einem gewissen beständigen Multiplicator m sich unterscheiden, und sohin muss

$$f(x) = m.\text{ang tang}\, x$$

gesetzt werden.

Zu einer anderen Ausmittelung dieser Functionsform erwägen wir zuvörderst, dass in den 2 Verhältnissen

$$x = \frac{Q}{P} \text{ und } y = \frac{Q'}{Q}$$

die Kräfte P, Q ganz willkürlich sind, und die Q' nur $< P$ sein soll sonst aber ebenfalls willkürlich ist, folglich wir berechtigt sind, diese 2 Verhältnisse als von einander gänzlich unabhängig anzusehen. Demzufolge differenziren wir die aufzulösende Functionalgleichung zuerst blos nach x und dann nur nach y, und setzen in bekannter Weise abkürzend:

$$\frac{df(x)}{dx} = f'(x);$$

wonach wir erhalten:

$$f'(x) = f'\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) \cdot \frac{1+y^2}{(1-xy)^2},$$

$$f'(y) = f'\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) \cdot \frac{1+x^2}{(1-xy)^2}.$$

Digitized by Google

In diesen Ausdrücken ist

$$xy = \frac{Q}{P} \cdot \frac{Q'}{Q} = \frac{Q'}{P} < 1,$$

also:

$$1 - xy > 0.$$

Ferner werden hier alle Kräfte unbezogen (absolut) in Rechnung gebracht, folglich sind auch die Quotienten oder goniometrischen Tangenten

$$x, \quad y, \quad \frac{x+y}{1-xy}$$

insgesammt absolut; was auch daraus folgt, dass die Winkel α, ε, $\alpha+\varepsilon$ spitz sind.

Ueberdies, wenn die Kraft P ungeändert, ihre Mitkraft Q dagegen von 0 an in's Unendliche stetig wachsend gedacht wird, muss einerseits der Quotient $\frac{Q}{P} = x$ ebenfalls von 0 an in's Unendliche stetig wachsen und andererseits der Winkel $AMC = \alpha = f(x)$ von 0 an bis $AMB = \frac{\pi}{2}$ stetig aufsteigen; mithin kann seine Ableitung $f'(x)$ in diesem Bereiche nur positiv und von Null verschieden ausfallen, folglich auch $f'\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$ stets blos >0 sein.

Wenn wir demnach die beiden obigen Gleichungen mit einander über's Kreuz multipliciren, so dürfen wir nicht allein diesen letzteren multiplicativen, sondern auch den divisiven Ausdruck $(1-xy)^2$, als beiden Producten gemeinsam und keinesfalls zugleich verschwindend, hinweglassen; folglich erhalten wir:

$$f'(x).(1+x^2) = f'(y).(1+y^2).$$

Da nun zwischen den Veränderlichen x, y erwiesener Massen kein Zusammenhang obwaltet, so kann diese Bedingungsgleichung nur dann bestehen, wenn ihre beiden positiven Seiten einer und derselben beständigen Zahl gleichen, die wir mit m bezeichnen wollen, daher

$$f'(x).(1+x^2) = m$$

ist. Hieraus folgt:

$$f'(x) = \frac{m}{1+x^2}$$

und

Digitized by Google

$$f(x) = m\int_0^x \frac{dx}{1+x^2},$$

also

$$f(x) = m.\,\text{ang}\,\text{tang}\,x,$$

wie früher.

Sonach haben wir:

$$\alpha = m.\,\text{ang}\,\text{tang}\,\frac{Q}{P}.$$

Zur Bestimmung der Zahl m denken wir uns für eine gewisse Kraft $Q > 0$ die $P = 0$, so fällt die Resultirende R beider mit der Q überein und der Winkel α wird ein rechter $\left(= \frac{\pi}{2}\right)$; demnach verwandelt sich die Gleichung in

$$\frac{\pi}{2} = m.\,\text{ang}\left(\text{tang} = \frac{Q}{0} = \infty\right) = m.\frac{\pi}{2},$$

und sohin ist

$$m = 1;$$

folglich ist abschliesslich der gesuchte Winkel:

(II) . . . . $\alpha = \text{ang}\,\text{tang}\,\frac{Q}{P}.$

Anmerkung. Diese interessante und der bekannten Laplace'schen insofern vorzuziehende Bestimmung der Richtung der Resultirenden, als sie die Kenntniss des Ausdruckes der Stärke dieser Resultirenden nicht erheischt, ist der vom Herrn Hofrath Freiherrn A. v. Ettingshausen in den Wiener Sitzungsberichten (Mathem.-naturwiss. Abth. 1849, S. 155—158) gegebenen nachgebildet. — Eine andere gleichfalls rein analytische Zusammensetzung zweier, erst gleichen dann winkelrechten, Kräfte hat L. B. Francoeur ausgedacht; sie findet sich in dessen Traité de mécan. élém., 5. éd., 1825, p. 15—19.

3.

Zerlegung einer gegebenen Kraft in zwei winkelrechte, deren Componenten oder Projectionen in oder auf gewissen Axen.

I. So wie wir zwei gegen einander unter einem rechten Winkel geneigte Kräfte P, Q in eine Kraft R zusammenzusetzen vermögen, eben so können wir natürlich auch umgekehrt eine gegebene Kraft R

Digitized by Google

wieder in zwei winkelrechte Kräfte P, Q — ihre Componenten — **zerlegen**, als deren Resultirende sie sich ansehen lässt.

Da nun von den 4 gemäss der Gleichungen (I und II) des § 2 verbundenen Grössen R, P, Q, α nur die erste R gegeben ist, folglich diese 2 Gleichungen 3 Unbekannten enthalten; so ist diese Aufgabe unbestimmt, und es muss entweder noch eine dritte Beziehungsgleichung zwischen jenen 4 Grössen oder eine von ihnen selbt gegeben werden. Der am häufigsten vorkommende und vortheilhaft benützbare Fall solcher Zerlegung einer Kraft ist nun der, wo die Richtung u der einen der beiden fraglichen Componenten, z. B. der P, angewiesen, also der Winkel $(R, P) = (R, u) = \alpha$ ihrer Richtung mit jener der zu zerlegenden Kraft R angegeben ist. Hierbei bleibt es, weil sich's hier nur um Winkel von Richtungen handelt, gleichgiltig, ob die angewiesene Richtung u schon ursprünglich aus dem Angriffspunkte M (Taf. I. Fig. 2) der Kräfte geführt ist oder wo immer verzeichnet liegt und erst nachträglich zu ihr (gleichstimmig) parallel durch diesen Angriffspunkt die eigentliche Richtungslinie MA der Componente P gezogen wird.

Die andere unbekannte Componente Q erhält hierdurch gleichfalls eine völlig bestimmte Richtung, MB, indem sie in der Ebene der bereits bekannten Richtungen MC, MA der Kräfte R und P, auf der letzteren senkrecht liegen und mit der ersteren einen spitzen Winkel $CMB = \beta = 90^0 - \alpha$ machen muss; oder kürzer, ihre Richtung MB fällt in die auf der vorgezeichneten Richtung MA (d. h. parallel) u der ersten Componente P senkrechte Ebene $\mathfrak{U}$ und zwar in die Projection der Richtung MC der zu zerlegenden Kraft R auf diese Ebene.

II. Für den vorliegenden Fall der Zerlegung der Kraft R liefert nun die Gleichung II des § 2 das Verhältniss

$$\frac{Q}{P} = \operatorname{tang} \alpha = \frac{\sin \alpha = \cos \beta}{\cos \alpha},$$

daher in Verbindung mit der Gleichung (I) und wegen

$$\cos \alpha^2 + \sin \alpha^2 = \cos \alpha^2 + \cos \beta^2 = 1$$

die Proportion

$$\text{(III)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \frac{P}{\cos \alpha} = \frac{Q}{\sin \alpha = \cos \beta} = \frac{R}{1},$$

nach welcher die **Kräfte** P, Q, R **sich zu einander verhalten, wie die Cosinus der Winkel** α, $90^0 - \alpha = \beta$, 0 **ihrer Richtungen mit jener der Resultirenden** R.

Digitized by Google

Aus dieser Proportion erhalten wir sofort für die uns vorgenommene Zerlegung der Kraft R die Bestimmungsgleichungen der Stärken ihrer beiden Componenten:

$$\text{(IV)} \quad P = R\cos\alpha,$$
$$Q = R\sin\alpha = R\cos\beta.$$

III. Die Componente P wird nur dann in die ihr vorgezeichnete Richtung MA oder u selbst fallen, wenn der Winkel α dieser Richtung mit jener, MC, der zu zerlegenden Kraft R spitzig ist. In diesem Falle ist $\cos\alpha$ positiv, und weil wir, wie schon früher, die R als absolut in Rechnung nehmen, muss der Ausdruck $P = R\cos\alpha$ auch positiv ausfallen. Ist dagegen der Winkel α stumpf, so fällt die Componente P in die der angewiesenen Richtung $MA \parallel u$ entgegengesetzte MA', der $\cos\alpha$ ist negativ und der Ausdruck $P = R\cos\alpha$ wird negativ. Um demnach diesen Ausdruck allgemein giltig zu machen, stellt man die fragliche Componente P positiv oder negativ, daher jedenfalls algebraisch bezogen, in Rechnung, je nachdem sie auf die ihr vorgezeichnete oder auf deren entgegengesetzte Richtung zu liegen kommt.

IV. Diese auf die vorgezeichnete Richtung $MA \parallel u$, oder auf deren Gegenrichtung MA' fallende und nach Vorangehendem vollkommen bestimmbare Componente P der zu zerlegenden Kraft R pflegt man die Componente dieser Kraft im Sinne (längs, entlang) der Richtung MA oder u, wohl auch die nach dieser Richtung geschätzte Kraft R insofern zu nennen; als man sie gewisser Massen für den Theil derselben Kraft ansieht, welcher längs der angewiesenen Richtung wirkt. Da hiernach dieser Theil P der vorgelegten Kraft R gleichsam auf die, von der ihrigen abweichende, Richtung übertragen (hinübergeworfen, projicirt) erscheint, nennt man dieselbe algebraische Componente P auch die algebraische Projection der gegebenen Kraft R auf die angewiesene Richtung MA oder u, oder auf jene Gerade (Axe), deren für positiv erklärte Richtung die u ist und die hiernach die festgelegte Projectionsaxe heisst, mit deren positiver Richtung die Richtung MC der zu zerlegenden Kraft R den sogenannten Projectionswinkel α dieser Kraft einschliesst oder bildet.

Dem Ausdrucke $P = R\cos\alpha$ gemäss ist daher die jedenfalls algebraische Projection einer Kraft auf eine Axe gleich dem Producte dieser Kraft in den Cosinus ihres Projectionswinkels.

Digitized by Google

V. Aus gleichem Grunde nennt man auch die andere Componente Q, welche in die zur vorgezeichneten Richtung (Axe) u senkrechte Ebene $\mathfrak{U}$ zu liegen kommt und nach Richtung und Stärke ebenso vollständig bestimmt ist, die Projection der vorgelegten Kraft R in diese auf der Projectionsaxe u senkrechte Ebene $\mathfrak{U}$; ihr Ausdruck ist $Q = R \sin\alpha = R \cos\beta$.

Wo es sich nur um die Grösse dieser Projection handelt, kann die Projectionsebene $\mathfrak{U}$ auch, ohne den Angriffspunkt M zu enthalten, wo immer, wofern nur auf der Axe u senkrecht, gelegt werden.

4.

Allgemeine Lehre von den Projectionen der an einem Punkte wirkenden Kräfte auf Axen. Bedingung ihres Gleichgewichtes.

Hauptlehrsatz. Wenn auf einen Punkt beliebig viel Kräfte wie immer gerichtet und stark einwirken, so ist die (algebraische) Projection ihrer Resultirenden auf irgend eine Richtung (Axe) gleich der Summe der (algebraischen) Projectionen sämmtlicher Kräfte (Componenten) auf dieselbe Axe.

Erster Fall: Zwei winkelrechte Kräfte.

Wirken, wie früher, auf den Punkt M nach den zu einander senkrechten Richtungen MA, MB zwei Kräfte P, Q; so wirke ihre Resultirende R längs der Mittelrichtung MC, welche gegen jene beiden unter den Winkeln α, β geneigt ist. Ferner sei u eine völlig beliebig bestimmte Richtung (Projectionsaxe) im Raume, mit der die Richtungen der Kräfte P, Q, R die (hohlen) Projectionswinkel uP, uQ, uR machen. (Taf. I. Fig. 4).

In M errichten wir auf die Ebene AMB der Richtungen beider Componenten die MD senkrecht, so hat in Bezug auf die 3 paarweis senkrechten Halbaxen MA, MB, MD die Richtung MC der Resultirenden R die Richtwinkel α, β, 90^0, und für ihren Winkel mit der Richtung u (Projectionswinkel) haben wir die Bestimmungsgleichung

$$\cos uR = \cos\alpha \cos uP + \cos\beta \cos uQ.$$

Multipliciren wir sie mit R und führen nach § 3, IV die P, Q ein, so erhalten wir sofort

$$R.\cos uR = P.\cos uP + Q.\cos uQ$$

als den algebraischen Ausdruck des behaupteten Satzes.

Digitized by Google

Zweiter Fall: Zwei wie immer gerichtete Kräfte.

Wenn dagegen am Punkte M nach den Richtungen MA, MB (Taf. I. Fig. 5), die mit einander einen beliebigen schiefen (spitzen oder stumpfen) Winkel machen, die Kräfte P, Q wirken, deren Resultirende R mit ihrer Richtung MC zwischen die ihrigen hineinfällt; so errichten wir in der Ebene der Kräfte die $ME \perp MA$ und zerlegen die Componente Q längs der auf einander senkrechten Richtungen MA, ME in die Kräfte Q' und Q'', für die nach dem so eben erwiesenen Satze die Gleichung

$$Q.\cos u\,Q = Q'.\cos uQ' + Q''.\cos uQ''$$

gilt. Es ist aber dann R auch die Resultirende der 2 ebenfalls winkelrechten Kräfte $P \pm Q'$ und Q'', mithin nach demselben Satze

$$\begin{aligned} R.\cos uR &= (P + Q')\cos uP + Q''\cos uQ'' \\ &= P.\cos uP + Q'.\cos u' + Q''\cos uQ'' \end{aligned}$$

daher auch hier allgemein

$$R.\cos uR = P.\cos uP + Q.\cos uQ.$$

Dritter und allgemeinster Fall: Beliebig viel und im Raume wie immer gerichtete Kräfte.

Wenn beliebig viele Kräfte nach willkürlichen Richtungen im Raume auf einen gemeinsamen Punkt wirken, so ist es natürlich, dass wir irgend zwei derselben in ihre Resultirende zusammensetzen, hierauf diese mit einer dritten Kraft zusammensetzen, und so fort jede eben gefundene Zwischenresultirende mit einer der noch übrigen Kräfte zusammensetzen, bis endlich keine unverwendete Kraft mehr übrig ist; wonach die zuletzt gefundene Resultirende auch die Resultirende aller vorgegebenen Kräfte sein muss.

Wäre nun für irgend welche n Kräfte

$$P_1, \quad P_2, \quad P_3, \ldots P_n$$

und deren Resultirende R_n der behauptete allgemeine Satz giltig, also

$$R_n \cos uR_n = P_1 \cos uP_1 + P_2 \cos uP_2 + P_3 \cos uP_3 + \ldots\ldots + P_n \cos uP_n;$$

und käme zu ihnen noch die $(n+1)^{\text{te}}$ Kraft P_{n+1}, welche mit der Resultirenden R_n die Gesammtresultirende R_{n+1} aller nunmehrigen $n+1$ Kräfte geben würde; so bestände (nach dem 2. Falle) die Gleichung:

Digitized by Google

$$R_{n+1}\cos uR_{n+1} = R_n\cos uR_n + P_{n+1}\cos uR_{n+1},$$

sohin gäbe die Summe beider Gleichungen:

$$R_{n+1}\cos uR''_{+1}$$
$$= P_1\cos uP_1 + P_2\cos uP_2 + \ldots\ldots + P_n\cos uP_n + P_{n+1}\cos uP_{n+1}.$$

Demzufolge gilt der aufgestellte Satz, sobald er für n Kräfte erwiesen ist, auch für $n+1$ Kräfte. Er wurde aber (im 2. Falle) für $n = 2$ Kräfte erwiesen, daher gilt er, nach bekannter Schlussweise, auch für jegliche Anzahl von Kräften.

Für den Bestand des Gleichgewichtes wird hier die kurze Bemerkung genügen, dass $R = 0$, folglich:

$$P_1\cos uP_1 + P_2\cos uP_2 + \ldots + P_n\cos uP_n = 0$$

d. i. dass die Summe der Projectionen sämmtlicher Kräfte auf jede beliebige Axe Null sein muss.

5.

Rechnende Bestimmung der Stärke und Richtung der Resultirenden solcher auf einen Punkt einwirkenden Kräfte.

Hierzu bedürfen wir überhaupt genügend viel Beziehungsgleichungen zwischen der Stärke R der Resultirenden, den Stärken P, P', P'',.... der gegebenen Kräfte und den Winkeln ihrer Richtungen mit einander oder mit gewissen befestigten Richtungen, daher einer passlichen Wahl hinreichend vieler Projectionsaxen.

I. Mittels der Projection der fraglichen Resultirenden auf die Richtung einer jeden der zusammenzusetzenden gegebenen Kräfte.

Diese Projectionen liefern nach einander die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
R &= P\cos PR + P'\cos P'R + P''\cos P''R + P'''\cos P'''R + \ldots\\
R\cos RP &= P + P'\cos P'P + P''\cos P''P + P'''\cos P'''P' + \ldots\\
R\cos RP' &= P\cos PP' + P' + P''\cos P''P' + P'''\cos P'''P' + \ldots\\
R\cos RP'' &= P\cos PP'' + P'\cos P'P'' + P'' + P'''\cos P'''P'' + \ldots\\
R\cos RP''' &= P\cos PP''' + P'\cos P'P''' + P''\cos P''P''' + P''' + \ldots
\end{aligned}$$

. . . .

Digitized by Google

Multiplicirt man diese Gleichungen mit den in ihnen vereinzelt stehenden Summanden, so wird ihre Summe:

$$\begin{aligned}R^2 = P^2 + P'^2 + P''^2 + P'''^2 + \ldots \\ + 2PP' \cos PP' + 2PP'' \cos PP'' + 2PP''' \cos PP''' + \ldots \\ + 2P'P'' \cos P'P'' + 2P'P''' \cos P'P''' + \ldots \\ + 2P''P''' \cos P''P''' + \ldots\end{aligned}$$

welche Gleichung leicht in einem Satze ausgesprochen werden kann und die Stärke R der Resultirenden berechnen lehrt. Durch sie theilt man dann alle obigen Gleichungen unterhalb der ersten, um die Winkel ihrer Richtung mit denen der gegebenen Kräfte zu berechnen; von welchen Winkeln — wie leicht zu ersehen — auch schon 2 oder 3 genügen, je nachdem die Richtungen aller dieser Kräfte in einerlei Ebene liegen oder nicht.

Sonderfall: Drei Componenten.

Hat man insbesondere blos drei nicht in einer Ebene wirksame Kräfte X, Y, Z, deren Richtungen x, y, z mit einander die Winkel

$$yz = YZ = \varkappa, \quad zx = ZX = \varkappa', \quad xy = XY = \varkappa''$$

machen und gegen welche die Richtung der Resultirenden R unter den sie richtenden Winkeln (Richtwinkeln) a, b, c geneigt ist; so erhält man die Gleichungen dieses besonderen Falles:

(1) . . . . $R = X\cos a + Y\cos b + Z\cos c$

(2) . . . . . . $R\cos a = X + Y\cos\varkappa'' + Z\cos\varkappa'$

$$R\cos b = X\cos\varkappa'' + Y + Z\cos\varkappa$$

$$R\cos c = X\cos\alpha' + Y\cos x + Z$$

daraus für die R:

(3)... $R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 + 2YZ\cos\varkappa + 2ZX\cos\varkappa' + 2XY\cos\varkappa''$

dann aus (2) die ihre Richtung bestimmenden 3 Richtcosinus $\cos a$, $\cos b$, $\cos c$; endlich noch aus den 4 Gleichungen (1) und (2) die zwischen diesen 3 Richtcosinus bestehende Bedingungsgleichung in Determinantenform:

(4) . . . . $\begin{vmatrix} 1 & \cos a & \cos b & \cos c \\ \cos a & 1 & \cos\varkappa'' & \cos\varkappa' \\ \cos b & \cos\varkappa'' & 1 & \cos\varkappa \\ \cos c & \cos\varkappa' & \cos\varkappa & 1 \end{vmatrix} = 0.$

Digitized by Google

II. Vermittelst der Projection der fraglichen Resultirenden auf beliebige drei feste Axen im Raume.

Weil jede Richtung durch ihre Richtwinkel bestimmt ist, die sie mit irgend dreien im Raume befestigten Axen macht, von denen keine zwei parallel sind, mögen sie sich übrigens schneiden oder nicht; so genügt es zur Bestimmung der Richtung und Stärke R der Resultirenden beliebig vieler und wie immer gerichteter Kräfte $P, P', P'', P'''\ldots$, sie insgesammt auf irgend welche 3 solche Axen x, y, z zu projiciren, deren positive Richtungen wie vorhin paarweis die Winkel

$$yz = \varkappa, \quad zx = \varkappa', \quad xy = \varkappa''$$

machen. Haben hier beziehlich dieser Axen die Richtungen der Kräfte

$$R; \quad P; \quad P'; \quad P''; \ldots.$$

die Richtwinkel

$$a, b, c; \quad \alpha, \beta, \gamma; \quad \alpha', \beta', \gamma'; \quad \alpha'', \beta'', \gamma''; \ldots.$$

und setzen wir abkürzend die Summen der dreierlei Projectionen der bekannten Componenten $P, P', P''\ldots$ gleich U, V, W, nemlich

$$(5) \ldots\ldots \begin{aligned} P\cos\alpha + P'\cos\alpha' + P''\cos\alpha'' + \ldots. &= U, \\ P\cos\beta + P'\cos\beta' + P''\cos\beta'' + \ldots. &= V, \\ P\cos\gamma + P'\cos\gamma' + P''\cos\gamma'' + \ldots. &= W; \end{aligned}$$

so werden die hiermit gegebenen Projectionen der Resultirenden

$$(6) \ldots. \quad R\cos a = U, \quad R\cos b = V, \quad R\cos c = W.$$

Multipliciren wir in der Gleichung (4) die erste Zeile und die erste Colonne der Determinante mit R, und führen diese U, V, W ein; so erhalten wir für die Stärke R der Resultirenden die Bestimmungsgleichung:

$$(7) \ldots\ldots \begin{vmatrix} R^2, & U, & V, & W \\ U, & 1, & \cos\varkappa'', & \cos\varkappa' \\ V, & \cos\varkappa'', & 1, & \cos\varkappa \\ W, & \cos\varkappa', & \cos\varkappa, & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Durch die hieraus berechnete Stärke R theilen wir sonach die 3 Gleichungen (6), um sogleich auch die noch erforderlichen Richtwinkel a, b, c der Resultirenden zu erhalten.

Digitized by Google

Sonderfall: Drei winkelrechte Projectionsaxen.

Man ersieht auf der Stelle, dass die vorigen und jetzigen Gleichungen sich ungemein vereinfachen, ohne dass Stärke und Richtung der Resultirenden eine Abänderung erleiden, wenn man die 3 Projectionsaxen x, y, z paarweis winkelrecht nimmt, also $\varkappa = \varkappa' = \varkappa'' = 90^0$ macht. Denn hiedurch übergehen die 3 axialen Projectionen U, V, W der Resultirenden R in ihre nach diesen Axen gerichteten Componenten X, Y, Z, und es verwandeln sich die gefundenen Gleichungen in

$$(8) \quad \ldots\ldots\ldots \quad R\cos a = U = X,$$

$$R\cos b = V = Y,$$

$$R\cos c = W = Z;$$

$$(9) \quad \ldots\ldots \quad R = X\cos a + Y\cos b + Z\cos c;$$

$$(10) \quad \ldots\ldots\ldots \quad R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2;$$

$$(11) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \cos a^2 + \cos b^2 + \cos c^2 = 1$$

und geben vereint die Proportionen:

$$\frac{\cos a}{X} = \frac{\cos b}{Y} = \frac{\cos c}{Z} = \frac{1}{R}.$$

Mittelbares Projiciren. In Bezug auf irgend eine Projectionsaxe u ist bekanntlich

$$\cos uR = \cos a \cos ux + \cos b \cos uy + \cos c \cos uz,$$

daher, wenn man mit R multiplicirt und auf die Ausdrücke (8) Bedacht nimmt, erfolgt

$$R.\cos uR = X\cos ux + Y\cos uy + Z\cos uz.$$

Anstatt also eine Kraft auf eine Axe unmittelbar zu projiciren, kann man sie auch vorerst auf 3 winkelrechte Axen projiciren und dann diese 3 Projectionen auf jene Axe projiciren und die so entstehenden zweiten Projectionen addiren.

Die Gleichung (9) lehrt den besonderen Fall der Rückprojection auf $u \parallel R$.

Digitized by Google

6.

Betrachtung des wichtigen Sonderfalls, wo alle auf einen Punkt wirkenden Kräfte sammt ihren Projectionsaxen in einerlei Ebene liegen.

Wir müssen den Fall, wo alle auf einen Punkt einwirkenden Kräfte ihre Richtungen in einer und derselben Ebene haben und auch die Richtungen, nach denen sie zerlegt oder auf die sie projicirt werden sollen, in eben dieser Ebene angenommen werden, wegen der an ihn sich knüpfenden Folgerungen, besonders betrachten; und benützen die Ergebnisse des vorigen Paragraphs.

I. Die in § 5, I für beliebig viele in einem Punkte thätigen Kräfte P, P', P''.... allgemein aufgestellten Rechnungen passen vollständig auch auf den eingeschränkten Fall, wo diese Kräfte insgesammt in einerlei Ebene enthalten sind.

Der dortige Sonderfall kommt dagegen hier auf zwei Kräfte X, Y zurück, die nach den Richtungen x, y unter dem Winkel $\varkappa$ wirken, mit denen die Richtung ihrer Resultirenden die Winkel a, b macht. Sonach haben wir daselbst zu setzen: $Z=0$, $\varkappa=\varkappa'=90^0$, $\varkappa''=\varkappa$, $c=90^0$, und verwandeln somit die Gleichungen (1—4) in:

(1) . . . . $R=X\cos a+Y\cos b,$

(2) . . . . $R\cos a=X+Y\cos\varkappa,$

$$R\cos b=X\cos\varkappa+Y;$$

(3) . . . . $R^2=X^2+Y^2+2XY\cos\varkappa;$

(4) . . . . $\begin{vmatrix} 1, & \cos a, & \cos b \\ \cos a, & 1, & \cos\varkappa \\ \cos b, & \cos\varkappa, & 1 \end{vmatrix}=0$

oder:

(4') . . . . . . $\cos a^2+\cos b^2-2\cos a\cos b=\sin\varkappa^2,$

welch letztere Gleichung dasselbe ausdrückf wie

$$a+b=\varkappa.$$

II. Projiciren wir dagegen die in einerlei Ebene wirksamen Kräfte P, P', P'', ... R anf ein Paar in derselben Ebene befindliche Axen x, y, die unter dem willkürlichen hohlen Winkel $\varkappa$ gegen einander geneigt sind, und mit denen jener Kräfte Richtungen die Winkel α, β; α', β'; α'', β'', ...; a, b machen, welche sich paarweis zu $\varkappa$

ergänzen und deshalb auch schon einzeln genügen; so haben wir in § 5, (5—7), nur zu setzen: $\gamma = \gamma' = \gamma'' \ldots = c = 90^0$, $W = 0$ und erhalten sofort die Gleichungen:

$$(5) \ldots\ldots \quad P\cos\alpha + P'\cos\alpha' + P''\cos\alpha'' + \ldots = U,$$
$$P\cos\beta + P'\cos\beta' + P''\cos\beta'' + \ldots = V;$$

$$(6) \ldots\ldots \quad R\cos a = U,$$
$$R\cos b = V;$$

$$(7) \ldots\ldots \quad \begin{vmatrix} R^2, & U, & V, \\ U, & 1, & \cos\varkappa \\ V, & \cos\varkappa, & 1 \end{vmatrix} = 0$$

oder:

$$(7') \ldots\ldots \quad R^2 \sin\varkappa^2 = U^2 + V^2 - 2UV\cos\varkappa,$$

welch letztere Gleichung auch eine Folge der Gleichungen (4′ und 6) ist.

Sonderfall: Rechtwinklige Projectionsaxen.

Hat man die Wahl beider Projectionsaxen in der Ebene der Kräfte frei, so ist es am vortheilhaftesten, auf die willkürlich angenommene Axe x, als die primäre oder Hauptaxe der Projection, die andere Axe y als die secundäre oder Nebenaxe senkrecht aufzustellen, also $\varkappa = 90^0$ zu machen; wonach man die beiderlei Projectionen jeglicher Kraft noch in deren Haupt- und Nebenprojection unterscheiden kann.

Hier genügen für das Richten der Kräfte R, P, P', P'',... ihre auf die Hauptaxe x (als ihren gemeinsamen Anfangsschenkel) beziehlichen Richt- oder Projectionswinkel a, α, α', α'',... schon allein vollständig, da ihre zweiten Richtwinkel b, β, β', β'',... zu ihnen complementär sind. Sonach ist die Summe der Hauptprojectionen der gegebenen Kräfte

$$(8) \ldots\ldots \quad U = P\cos\alpha + P'\cos\alpha' + P''\cos\alpha'' + \ldots$$

und die Summe ihrer Nebenprojectionen

$$(9) \ldots\ldots \quad V = P\sin\alpha + P'\sin\alpha' + P''\sin\alpha'' + \ldots$$

so wie die Haupt- und Nebenprojection der Resultirenden beziehungsweise

Digitized by Google

(10) . . . . $R \cos a = U$

und

(11) . . . . $R \sin a = V$;

so dass als Projections-Multiplicator einer jeden Kraft der Cosinus oder Sinus ihres Richt- oder Projectionswinkels gebraucht wird, je nachdem ihre Haupt- oder Nebenprojection aufzustellen ist.

Endlich erhält man wieder

(12) . . . . $R^2 = U^2 + V^2$.

7.

Besonders vortheilhafte Verwendung des Projicirens von, in einer Ebene auf einen Punkt einwirkenden, Kräften auf gewisse zwei winkelrechte Axen. Virtuelle und Drehmomente solcher Kräfte.

Aus den so eben gefundenen Gleichungen (8, 10) und (9, 11) lassen sich ein Paar höchst vortheilhafte Folgerungen ziehen.

Nehmen wir in der Ebene der Richtungen sämmtlicher eben betrachteten am Punkte M (Taf. I. Fig. 6) thätigen Kräfte P, P', P'' ... R noch irgendwo einen Punkt C an, und führen aus M nach C hin die Haupthalbaxe x als MCx; so erhalten erwähnte Gleichungen die Formen:

$$R \cos a = U = P \cos \alpha + P' \cos \alpha' + P'' \cos \alpha'' + \ldots$$

$$R \sin a = V = P \sin \alpha + P' \sin \alpha' + P'' \sin \alpha'' + \ldots$$

Setzen wir jetzt die beliebig lange Strecke $MC = e$, projiciren sie auf die Richtungen der Kräfte R, P, P', P'', ... und auf ihre Senkrechten, als auf Haupt- und Nebenaxen der Projection, und setzen wir abkürzend ihre Hauptprojectionen

$$ME = e \cos a = \varrho, \quad MD = e \cos \alpha = \varpi, \quad MD' = e \cos \alpha' = \varpi', \ldots.$$

und ihre Nebenprojectionen

$$EC = e \sin a = r, \quad DC = e \sin \alpha = p, \quad D'C = e \sin \alpha' = p', \ldots.$$

so verwandeln sich die beiden mit e multiplicirten vorigen Gleichungen in

(1) . . . . $R\varrho = P\varpi + P'\varpi' + P''\varpi'' + \ldots$

(2) . . . . $Rr = Pp + P'p' + P''p'' + \ldots$

Digitized by Google

Für die Erläuterung der Bedeutung dieser Gleichungen dient nun Folgendes.

I. Für die erste denkt man sich den Angriffspunkt M aller Kräfte, mit Beibehaltung ihrer Richtungen, auf irgend einem unendlich kurzen geraden oder krummen Wege in eine neue Stelle C verschoben (verrückt), und nennt dann eine solche — weil nur mögliche oder denkbare — Verschiebung (Verrückung) nach Lagrange eine virtuelle, im Gegensatze zu einer wirklichen (actuellen). Die Projection $\overline{\omega}$ dieser Verschiebung oder vielmehr nur ihrer Sehne $MC = e$ auf die ursprüngliche Richtungslinie einer Kraft P, ist sonach die nach der Richtung dieser Kraft geschätzte virtuelle Verschiebung ihres Angriffspunktes. Da die Projection $\overline{\omega} = e \cos \alpha$ ist, so muss sie (wie bei P und P''') positiv oder (wie bei P' und P'') negativ sein, also entweder längs der Richtung dieser Kraft selbst oder längs der ihr entgegengesetzten Richtung sich erstrecken, je nachdem der positive oder negative Winkel α jener Sehne e mit der Richtung der Kraft P spitzig oder stumpf ist.

Endlich nennt man (nach Navier) das mit $\overline{\omega}$ gleichstimmige Product $P\overline{\omega}$ der Stärke P dieser Kraft mit der nach ihrer Richtung geschätzten virtuellen Verschiebung $\overline{\omega}$ ihres Angriffspunktes das virtuelle Moment der Kraft P.

Bedient man sich dieser Benennungen, so liegt in der Gleichung (1) der Satz:

Wenn beliebig viele Kräfte in einer Ebene an einem Punkte wirken, so ist das virtuelle Moment ihrer Resultirenden gleich der Summe der virtuellen Momente aller jener Kräfte (Componenten).

Dieser Satz ist eigentlich nur ein vereinzelter Fall eines allgemeinen, unter der Benennung: „Princip der virtuellen Bewegung" für den Bestand des Gleichgewichtes eines Systems von Kräften geltenden, Satzes der Statik, und hat das Eigenthümliche, dass für ihn die Sehne der virtuellen Verschiebung des Angriffspunktes der Kräfte nicht, wie sonst gefordert wird, unendlich kurz sein muss, sondern beliebig lang sein kann.

II. Für die Gleichung (2) stellt man sich den Punkt C fest gemacht (befestigt) vor, und erwägt, dass da jede der auf M wirkenden Kräfte, wie z. B. P, wofern sie allein wirken könnte, den Angriffspunkt M längs ihrer Richtung fortbewegen, folglich weil er weder näher an C noch weiter von C rücken kann, seine Verbindungsstrecke CM, und mit ihr die ganze Ebene aller Kräfterichtungen um jenen festen Punkt

Digitized by Google

C drehen würde; mithin dass sie stets ein Streben nach Drehung dieser Kräften-Ebene um ihren brfestigt gedachten Punkt äussern muss.

In dieser Rücksicht nennt man das Product Pp der Stärke der wenn gleich nicht wirklich drehenden, so doch eine Drehung anstrebenden Kraft P in den senkrechten Abstand p ihrer Richtung von jenem fest gedachten Punkte C das Drehungs- oder Drehmoment, wohl auch das statische Moment, der drehenden oder Dreh-Kraft P in Bezug auf diesen Punkt, den man Mittelpunkt (Centrum) der Momente oder Momentenpunkt nennt, wozu noch der erwähnte senkrechte Abstand p der Arm der Kraft P genannt wird.

Dieser senkrechte Abstand oder Arm p ist ausgedrückt durch

$$p = e . \sin \alpha;$$

und da die Strecke $MC = e$, so wie die Kraft P, absolut in Rechnung gebracht wird, so ist sowohl p als auch das Moment Pp $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{positiv}}{\text{negativ}}$, wenn der nur positiv von 0 bis 360° gezählte Winkel $CMP = \alpha$ der Richtung der Kraft P mit dem Fahrstriche MC $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{kleiner}}{\text{grösser}}$ als ein gestreckter Winkel (180°) ist, oder wenn er von MC aus beiderseits bis 180° gezählt $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{positiv}}{\text{negativ}}$ ist.

Eine andere Ermittelungsweise des Beziehungszeichens des Armes p ist folgende. Man denkt sich auf der Ebene der Kräfte senkrecht stehend und entweder vom Angriffspunkte M oder von einem anderen Punkte der Richtung der Kraft P, am angemessensten vom Fusspunkte (Anfangspunkte) D des Armes $DC = p$ aus entlang dieser Richtung hinschauend. Da nun unterscheidet man die rechte und linke Seite dieser Richtung und nimmt etwa die nach $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{rechts}}{\text{links}}$ gehende Senkrechte, $\genfrac{}{}{0pt}{}{p}{p}$ „ für $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{positiv}}{\text{negativ}}$.

Gewöhnlich pflegt man den Kräften, welche um den fest gedachten Momentpunkt C den Fahrstrich CM und die Ebene der Kräfte auf entgegengesetzte Seiten desselben, rechts und links, auf- und abwärts, zu drehen streben, entgegengesetzte, den einen positive, den anderen negative Drehmomente zuzuschreiben.

In Taf. I. Fig. 6. z. B. können die Arme und Momente der Kräfte P, P' für positiv, die der P'', P''' und R für negativ angenommen werden.

Digitized by Google

Auffassung der Drehmomente als Kräfte. Das Drehmoment Pp der Kraft P am Arme p entstand aus der Multiplication ihrer Projection $P\sin\alpha$, die also ebenfalls eine Kraft ist, mit der Strecke $MC = e$; es ward nemlich $(P\sin\alpha)e = P(e\sin\alpha) = Pp$. Betrachtet man nun, wie es in den Productensummen (§ 6, 8—11) zulässig ist, die Kräfte $P, P', \ldots R$ an sich,so wie sie sind, daher als ungemessen; so müssen wir dagegen die Strecken MC und ihre Projectionen $DC, D'C, \ldots . EC$ als durch eine gewisse Längeneinheit ausgemessen, somit durch ihre Masszahlen $e, p, p', \ldots . r$ dargestellt ansehen. Von da ist nun blos ein kurzer und kaum verwehrbarer Schritt zu machen, um diese Masszahlen als abstracte Zahlen und Multiplicatoren jener Kräfte — der Multiplicande — anzusehen, folglich z. B. das Product Pp oder pP als $p$fache oder $p$malige Kraft P aufzufassen, mithin wieder als eine aus der ursprünglichen Kraft P entsprungene oder abgeleitete Kraft zu betrachten und zu behandeln.

Stellen wir uns ferner vor, dass wir auf den Punkt M in der Ebene sämmtlicher Kräfterichtungen eine Kraft Q am Arme q einwirken lassen, deren Drehmoment qQ dem Drehmomente pP der Kraft P vollkommen (an Grösse und Vorzeichen) gleicht, so dass $qQ = pP$ sei. Dann erhellet sofort, dass wir in der Momentengleichung (2), ohne Störung ihrer Giltigkeit, das Glied (Moment) pP durch dieses neue qQ ersetzen dürfen. Sohin darf, in Absicht auf Streben nach Drehung, die Kraft P durch eine jede andere Kraft Q vertreten werden, deren Moment dem der ersteren Kraft ganz gleich ist.

Machen wir nun den Arm einer solchen Ersatzkraft Q der Längeneinheit gleich, also $q = 1$, und weisen ihr eine solche Richtung und Stärke an, dass ihr Moment $1.Q = Q = pP$ wird; so sind wir berechtiget, die Kraft pP (das so genannte Drehmoment der Kraft P) als diejenige Kraft Q anzusehen, welche im Abstande 1 vom Momentenpunkte dasselbe Bestreben nach Drehung äussert, wie jene Kraft P im ähnlichen Abstande p.

Aus dieser Darstellung erhellet zugleich, wie alle oben betrachteten Drehmomente oder abgeleiteten Kräfte $rR, pP, p'P', \cdots$ in eine beliebige, vom Momentenpunkte um die Strecke (den Arm) 1 abstehende, Gerade verlegt werden könne und dadurch obige Gleichung (2) gleichsam sich verbildlichen lasse.

Digitized by Google

8.

Die Resultirende der Projectionen von an einem Punkte wirkenden Kräften in einer Ebene.

Projicirt man die an einem Punkte nach beliebigen Richtungen angebrachten Kräfte P, P', P'', ..., deren Resultirende R ist, auf irgend eine Axe u und auf (in) die zu ihr senkrechte Ebene $\mathfrak{U}$, und sind

die ersteren Projectionen P_1, P_1', P_1'', ...,
„ letzteren „ P_2, P_2', P_2'', ...;

so werden jene gegebenen Kräfte vertreten durch die Reihen (Gruppen) dieser ihrer zweierlei Projectionen oder Componenten, also auch durch deren Resultirenden R_1, R_2, von denen die erstere

$$R_1 = P_1 + P_1' + P_1'' + \ldots$$

zugleich die Projection (Componente) der Gesammtresultirenden R auf (längs) der Axe u ist.

Die Resultirende R sämmtlicher gegebenen Kräfte ist nunmehr die Resultirende der alleinigen zwei zu einander winkelrechten Einzel- (Partikular-) Resultirenden R_1, R_2; die Ebene der Richtungen dieser 3 Kräfte steht aber, mit der Richtung der u oder R_1, auf der Projectionsebene $\mathfrak{U}$ senkrecht, folglich ist R_2 die Projection der R in diese Ebene und sohin gilt folgender Satz:

Die Resultirende der Projectionen beliebig vieler und wie immer gerichteter Kräfte an einem Punkte in eine Ebene ist zugleich die Projection der Resultirenden aller dieser Kräfte in dieselbe Ebene, und umgekehrt;

weil es nur je Eine Resultirende und nur je Eine Projection gibt.

9.

Drehmomente willkürlich gerichteter an einerlei Punkt thätigen Kräfte um einen wo immer im Raume befestigt gedachten Punkt.

Denkt man sich nebst dem Angriffspunkte M (in Taf. I. Fig. 7) der eben betrachteten Kräfte P, P', P'' ... R noch einen bestimmten Punkt C des Raumes, zieht den Strahl $MC = c$, und bezeichnet die Neigungswinkel jener Kräfte gegen ihn mit

$$\alpha, \quad \alpha', \quad \alpha'', \ldots a;$$

Digitized by Google

so sind die Projectionen genannter Kräfte in die durch M zum Strahle MC senkrecht aufgestellte Ebene 𝕰:

(1) . . . . . . $P \sin \alpha$, $P' \sin \alpha'$, $P'' \sin \alpha''$, ... $R \sin \alpha$

und (wie in § 8 eben erwiesen) ist die Projection $R \sin \alpha$ die Resultirende sämmtlicher Projectionen $P \sin \alpha$, $P' \sin \alpha'$, $P'' \sin \alpha''$, ... in diese Ebene. Multipliciren wir hierauf wieder, wie in § 7, diese Reihe von Kräften mit der Masszahl e des Fahrstriches MC, oder machen wir sie unter Belassung ihrer Richtungen allesammt e mal grösser; so entsteht die neue Reihe von Kräften

(2) . . . . $e.P \sin \alpha$, $e.P' \sin \alpha'$, $e.P'' \sin \alpha''$ . . . . $e.R \sin \alpha$,

von denen nothwendig wieder die letzte die Resultirende aller ihr vorangehenden ist.

Führen wir dann eben so wie in § 7, II die Buchstaben p, p', p'', . . . r mit den nemlichen Werthbestimmungen und Benennungen ein, so erhalten wir die Reihe der Drehmomente

(3) . . . . pP, $p'P'$, $p''P''$, . . . rR

der gegebenen (gleichsam drehenden) Kräfte, als neue Kräfte, von denen die letzte gleichfalls die wie sonst zu bestimmende Resultirende aller ihr vorgehenden ist und das resultirende Drehmoment heisst.

Alle drei Reihen (1, 2, 3) stückweis gleichgerichteter und zu einander proportionirter Kräfte wirken an M in der auf MC senkrecht aufgerichteten Ebene 𝕰; und zwar strebt jede einzelne Kraft die Ebene der Richtung der Stammkraft und des Momentenpunktes C, welche die Momentenebene dieser Stammkraft heisst, um diesen fest gedachten Punkt zu drehen. Auch lässt sich die Wirkung solcher Kräfte so ansehen, als strebe z. B. die ursprünglich gegebene oder Stammkraft P in ihrer Momentenebene CMP am Arme p, ihre Projection $P \sin \alpha$ am Arme e, und ihr Drehmoment pP am Arme 1, nach Drehung derselben Ebene um den Punkt C.

Während also im Früheren (§ 7, II) die in einerlei Ebene gelegenen Kräfte allesammt diese Ebene um ihren Momentenpunkt C zu drehen suchten, streben hier die im Raume willkürlich gerichteten Kräfte zwar auch den nemlichen Fahrstrich CM um denselben Punkt C, jedoch eine jede Kraft in der ihr eigenthümlichen Momentenebene zu drehen. Demgemäss lässt hier die Lage der Momentenebene CMR der Resultirenden R oder der ihr entsprechenden in der Ebene 𝕰

Digitized by Google

wirkend gedachten Kraft rR erkennen, in welcher Ebene der Fahrstrich CM von allen Kräften P, P', ... würde zugleich gedreht werden, wenn es wirklich zu einer Drehung käme; und dazu gibt das resultirende Drehmoment rR die Stärke der Gesammtdrehung am Arme 1 an.

10.

Zweierlei entgegengesetzte Sinne der Drehung der Momentenebene einer Kraft um den fest gedachten Momentenpunkt.

Die Ebene des statischen oder Drehmomentes einer Kraft, P, kann sich um den fest gedachten Mittelpunkt der Momente, C, oder um die in ihm auf diese Ebene senkrecht aufgerichtete Gerade (Axe, Drehaxe) überhaupt in zweierlei Sinn (auf- oder abwärts, rechts oder links, hin und her) drehen. Sobald jedoch der Angriffspunkt und die Richtung dieser Kraft, P, in derselben starr gedachten Ebene, CMP, gegen den nun befestigten Momenten-Mittelpunkt, C, unverrückbar bestimmt sind, kann jene Kraft blos eine einzige (bestimmte) der beiden möglichen Drehbewegungen ihrer Momentenebene hervorzubringen streben.

Nehmen wir an, diese Drehung beginne und wir hätten im Momentenpunkte, C, auf die Momentenebene, CMP, eine der beiden möglichen senkrechten (normalen) Halbaxen errichtet. Dann denken wir uns einen Beschauer (spectateur, Beobachter) der mit seinen Füssen dergestalt auf diese Ebene sich stellt, dass er mit seinem Rücken an die aufgerichtete Halbaxe sich anlehnt; dieser nun wird sehen, dass die verschiedenen Punkte der Momentenebene, während sie vor seinen Augen vorübergehen, entweder von seiner linken Hand (Seite) zur rechten hin oder umgekehrt von seiner rechten Hand zur linken hin sich bewegen; was man dadurch ausdrücken kann, dass man sagt: die drehende Bewegung geschehe entweder von links nach rechts oder von rechts nach links, kürzer: rechtshin oder linkshin, die Ebene drehe sich (nach) rechts, oder (nach) links. Jene erstere Rechtsdrehung sehen wir an der täglich vor unseren Augen sich vollziehenden scheinbaren Bewegung der Sonne von ihrem Aufgange an bis zu ihrem Untergange, an der Drehung der Uhrzeiger, Schrauben, Kurbeln, Schlüssel u. a. m. Man kann deshalb diese Rechtsdrehung mit Gaubert (Mécanique, 1841, p. 20) die directe (rechtgängige, rechtläufige), also die ihr entgegengesetzte Linksdrehung die retrograde (rückgängige, rückläufige) nennen.

Digitized by Google

Hiezu wollen wir noch bemerken, dass, wenn wir im festen Mittelpunkte der Momente beide normale Halbaxen auf der Momentenebene aufrichten und zwei solche (gegen einander sehende) Beschauer an sie sich anlehnen würden, eine und dieselbe Drehbewegung dieser Ebene dem einen Beschauer rechtshin, dem anderen linkshin, oder um die eine Halbaxe rechtläufig, um die andere rückläufig vor sich gehend erscheinen müsste. Sonach ist von den beiden Halbaxen jeder Normale der Momentenebene einer Kraft immer eine so beschaffen, dass um sie die Drehung dieser Ebene rechtläufig (rechtshin, nach rechts) erfolgt; wir wollen sie die Halbaxe der Rechtsdrehung dieser Kraft nennen.

11.

Cauchy's lineare Momente von Drehkräften.

Wenn man nun aus dem Mittelpunkte der Momente von Kräften, auf der so eben beschriebenen Halbaxe der Rechtsdrehung einer gewissen Kraft, eine Strecke aufträgt, deren Masszahl (Länge, Zahlwerth) dem Zahlwerthe des Drehmomentes dieser Kraft gleicht; so ist diese Strecke das, was Cauchy (Exercices de Mathématiques, 1826, p. 66—84, 117—132, 155—159) das lineare Moment derselben Kraft genannt hat. Des linearen Momentes Richtung ist die der Halbaxe, auf der es gezählt wird; und des linearen Momentes Stärke (Intensität, Grösse) hat zum Masse eben das Drehmoment dieser Kraft selbst.

Da man sich der, keineswegs unbedingt nothwendigen, Darstellung der unter der Benennung „Drehmomente" eingeführten Kräfte durch zu ihnen proportionale Strecken, in der analytischen Statik, ganz wohl entschlagen darf; so kann man ohne Anstand auch das Drehmoment jeglicher Kraft selbst als eine aus ihr eigens ab- oder hergeleitete Kraft am Mittelpunkte der Momente anbringen und in die Richtung der nach obiger Vorschrift ausgemittelten, auf der zugehörigen Momentenebene senkrechten Halbaxe der Rechtsdrehung jener Kraft verlegen.

Weil hiernach die Richtung dieser abgeleiteten Kraft — dieses übertragenen Drehmomentes — auf der Richtung des ursprünglichen und eigentlichen Drehmomentes senkrecht stehen muss; so könnte es füglich das winkelrecht herausgeschwenkte, aufgerichtete oder aufgestellte Drehmoment der beziehlichen Kraft genannt werden. Allein, um nicht neue Namen einzuführen, wollen wir zwar Cauchy's Benennung „lineare Momente", aus Pietät für diesen höchstver-

Digitized by Google

dienten Mathematiker, beibehalten, sie jedoch nicht den beschriebenen Strecken, sondern denjenigen Kräften beilegen, welche den eigentlichen Drehmomenten gleichen, aber blos am Momentenpunkte in die Halbaxen der Rechtsdrehung der Momentenebenen der gegebenen Stammkräfte übertragen wurden.

12.

Aufstellung der linearen Momente der an einem Punkte beliebig gerichtet wirkenden Kräfte.

Betrachten wir jetzt wieder unser früheres System der Kräfte

$$P, \quad P', \quad P'', \ldots R$$

am Punkte M, (Taf. I. Fig. 7) sammt dem Momentenpunkte C, von dem jener um $MC = e$, die Richtungen der Kräfte aber um

$$p, \quad p', \quad p'', \ldots r$$

abstehen. Die e-fachen Projectionen dieser Kräfte oder die Projectionen der e-fachen Kräfte auf die in M zur MC senkrecht aufgestellte Ebene 𝕰 sind dann die denselben Kräften entsprechenden Drehmomente

$$pP, \quad p'P', \quad p''P'', \ldots rR$$

welche als derlei proportionirte Hilfskräfte in die zuletzt erwähnte rR, das resultirende Drehmoment, wie gewöhnlich (nach § 6) zusammengesetzt werden könnten. Indess errichten wir, zu gleichem Zwecke, im Momentenpunkte C auf die den Kräften P, P', P'', ... angehörigen Momentenebenen CMP, CMP', CMP'', ... die Halbaxen ihrer Rechtsdrehung (um welche diese Ebenen von den Kräften rechtläufig, rechtshin, gedreht werden), legen an jenen Punkt in diese Halbaxen die zusammenzusetzenden Drehmomente pP, $p'P'$, $p''P''$, ... unter der Benennung „lineare Momente" und setzen diese (als abgeleitete Kräfte) in ihre Resultirende rR, das „resultirende lineare Moment" zusammen; welche Kraft sohin nach Richtung und Stärke bestimmt, jener früheren rR gleich und gegen sie senkrecht gestellt sein wird.

In dem uns vorliegenden Falle, wo sämmtliche gegebenen Kräfte an einem Punkte M thätig sind, müssen die aus dem Momentenpunkte C ausgehenden Halbaxen (Richtungen) aller ihnen entsprechenden linearen Momente auf dem Fahrstriche CM insgesammt senkrecht stehen, also in der auf ihm senkrechten Ebene liegen, die deshalb zur früher betrachteten Projectionsebene 𝕰 parallel liegt. Und jede

Digitized by Google

zwei solche Halbaxen bilden denselben Winkel, wie die zwei projicirenden oder Momentenebenen, auf denen sie senkrecht stehen oder wie die Projectionen der Richtungen der Stammkräfte in die Ebene 𝕰.

13.

Analytische Zusammensetzung der erwähnten linearen Momente.

Um diese eben angedeutete Zusammensetzung der linearen Momente pP, $p'P'$, $p''P''$ ... in ihr resultirendes lineares Moment rR mit Hülfe der Analysis auszuführen, denken wir uns im Raume (wie Taf. I. Fig. 8.) irgend welche drei paarweis winkelrechte Axen I, II, III festgelegt, gleichviel ob sie sich schneiden oder kreuzen. In Bezug auf ihre positiven Richtungen seien

λ, μ, ν die Richtcosinus der Halbaxe des linearen Momentes pP der Kraft P.

λ', μ', ν' jene des linearen Momentes $p'P'$ der Kraft P', u. s. f., endlich

l, m, n die Richtcosinus der Halbaxe des resultirenden linearen Momentes $rR = K$.

Nachdem wir unsere Berechtigung, die linearen Momente als Kräfte anzusehen und in ihre Resultirende zusammenzusetzen begründet haben; so muss auch der für die — natürlich jedenfalls algebraische — Projection der resultirenden Kraft auf Axen erwiesene allgemeine Satz (§ 4) auch für die Projection des resultirenden Momentes auf irgend eine Axe gelten.

Demzufolge projiciren wir das resultirende Moment K und die componirenden linearen Momente pP, $p'P'$, $p''P''$, ... nach einander auf die 3 Axen I, II, III, und bezeichnen abkürzend die (algebraischen) Summen der (algebraischen) Projectionen dieser Componenten mit L, M, N; indem wir setzen

$$(1) \quad pP.\lambda + p'P'.\lambda' + p''P''.\lambda'' + \ldots = L,$$

$$pP.\mu + p'P'.\mu' + p''P''.\mu'' + \ldots = M,$$

$$pP.\nu + p'P'.\nu' + p''P''.\nu'' + \ldots = N;$$

sonach erhalten wir fürs resultirende lineare Moment $rR = K$ die projectivischen Gleichungen

$$(2) \quad K.l = L, \quad K.m = M, \quad K.n = N$$

Digitized by Google

zu denen noch, für die Halbaxe dieses resultirenden Momentes, die Bedingungsgleichung ihrer Richtcosinus

(3) . . . . $l^2+m^2+n^2=1$

beizufügen ist.

Da wir voraussetzen, es seien die linearen Momente aller gegebenen Kräfte P, P', ... nach Grösse und Richtung bekannt, folglich aus ihnen die mit L, M, N bezeichneten Momentensummen gemäss (1) berechenbar, so reichen die 4 Gleichungen (2) und (3) hin, um die 4 Unbekannten K, l, m, n, und somit das resultirende lineare Moment vollständig zu bestimmen.

Die Summe der zweiten Potenzen der Gleichungen (2) gibt nemlich wegen (3) für K die Bestimmungsgleichung

(4) . . . . $K^2=L^2+M^2+N^2$,

daher, wenn man durch den gefundenen von Null verschiedenen und absolut genommenen Werth von K die Gleichungen (2) theilt, findet man sofort die mit L, M, N gleichstimmigen Werthe der Richtcosinus l, m, n der Richtung (Halbaxe) des resultirenden linearen Momentes; die man auch, mit Rücksicht auf (3) und (4), in die zusammenhängende Proportion

(5) . . . . $\frac{l}{L}=\frac{m}{M}=\frac{n}{N}=\frac{1}{K}$

zusammenziehen kann.

14.

Aus den Projectionen einer Kraft und ihres linearen Momentes auf drei winkelrechte Axen diese Kraft vollständig zu bestimmen.

I. Kennt man von einer Kraft, wie etwa von der bereits mehrfach besprochenen Resultirenden R beliebig vieler an einem Punkte thätigen Kräfte P, P', P'', ..., deren Richtcosinus in Absicht auf drei winkelrechte Axen I, II, III, beziehungsweise α, β, γ; α', β', γ'; α'', β'', γ''; .... sein und deren Projectionen auf diese Axen die Summen

(6) . . . . $P\alpha+P'\alpha'+P''\alpha''+\ldots=X$,

$$P\beta+P'\beta'+P''\beta''+\ldots=Y,$$

$$P\gamma+P'\gamma'+P''\gamma''+\ldots=Z$$

Digitized by Google

geben mögen, diese ihre drei axialen Projectionen X, Y, Z; so findet man die absolute Stärke R der fraglichen Kraft (nach § 5, 10) aus

$$(7) \ldots\ldots\ldots \quad R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$$

und ihre Richtcosinus a, b, c, (nach § 5, 8) aus

$$(8) \ldots\ldots \quad a = \frac{X}{R}, \qquad b = \frac{Y}{R}, \qquad c = \frac{Z}{R},$$

welche die Richtung dieser Kraft vollkommen bestimmen.

II. Sind auch noch die Projectionen L, M, N des linearen Momentes dieser Kraft R gegeben, so erhält man die absolute Grösse (Stärke) K des fraglichen linearen Momentes aus der obigen Gleichung (4) nnd die Richtcosinus l, m, n der Halbaxe desselben aus der Proportion (5).

Nimmt man demnach irgendwo den Momentenpunkt C an, zieht aus ihm die nun bekannte Halbaxe oder Richtung (l, m, n) des linearen Momentes K und legt durch ihn die auf diese Richtung senkrechte Ebene, so soll diese die, noch der Lage nach zu bestimmende, Richtung (a, b, c) der Kraft R in sich aufnehmen, um deren Momentenebene zu sein. Dies ist aber nur möglich, wenn genannte beide Richtungen auf einander senkrecht stehen, also der Cosinus ihres Winkels Null nemlich

$$(9) \ldots\ldots\ldots \quad al + bm + cn = 0$$

ist. Ersetzt man in dieser Bedingungsgleichung die Richtcosinus a, b, c, l, m, n durch die ihnen (gemäss (5) und (8)) proportionirten Projectionen X, Y, Z, L, M, N, von denen sie abstammen; so verwandelt sie sich in

$$(10) \ldots\ldots\ldots \quad XL + YM + ZN = 0.$$

Damit also die, aus den beliebig angenommenen Projectionen X, Y, Z der Kraft R berechneten Richtcosinus a, b, c ihrer Richtung mit der, aus den willkürlich gewählten Projectionen L, M, N des linearen Momentes K berechneten Richtcosinus l, m, n seiner Halbaxe zusammenpassen, folglich, damit das lineare Moment K (L, M, N) wirklich das der Kraft R (X, Y, Z) sei; muss die Summe der Producte der auf einerlei Axe beziehlichen Projectionen der Kraft und des linearen Momentes der Null gleich ausfallen.

Wird dieser Bedingung wirklich entsprochen, so führt man in der bereits festgelegten Momentenebene zur Richtung (a, b, c) der

Digitized by Google

Kraft R eine gleichstimmige Parallele dergestalt, dass der Momentenpunkt C (vergl. § 7, II) auf ihrer rechten Seite liegt und von ihr um den jedesmal positiven senkrechten Arm $r=\frac{K}{R}$ absteht. Verlegt man endlich in diese Parallele an irgend einen ihrer Punkte die berechnete Kraft R, so wird sie, wie es sein muss, ihre Momentenebene um den befestigt gedachten Momentenpunkt mit dem Drehmomente $rR=K$ rechtgängig (rechts) zu drehen streben, und sohin wirklich die gesuchte Kraft sein.

15.

Analytisch - geometrische Ausdrücke der axialen Projectionen des linearen Momentes einer Kraft.

Die voranstehenden Rechnungen gelten, wo auch im Raume der Mittelpunkt der Momente und der Angriffspunkt einer Kraft sich befinden möge. Um nun noch die Coordinaten dieser Punkte in die Rechnung aufzunehmen, machen wir den Mittelpunkt C der Momente zum Ursprung rechtwinkeliger Coordinaten, indem wir die früheren 3 winkelrechten Axen I, II, III durch ihn hindurchführen und zu Coordinatenaxen der x, y, z bestimmen. Auf diese Weise werden wir aus den Coordinaten x, y, z des Angriffspunktes M, aus den Richtcosinus α, β, γ der Richtungslinie und aus der Stärke P einer Kraft die Projection ihres linearen Momentes auf die Coordinatenaxen zu bestimmen vermögen.

Setzen wir wieder den Fahrstrich $CM=e$, so ist bekanntlich seine zweite Potenz

(1) . . . . $e^2=x^2+y^2+z^2$,

seine Projection auf die Richtung der Kraft P

$$e.\cos eP=x\alpha+y\beta+z\gamma$$

und der Arm p dieser Kraft, als senkrechter Abstand ihrer Richtungslinie vom Ursprung C der Coordinaten,

$$p=e.\sin eP.$$

Hiernach ist

$$p^2=e^2(1-\cos eP^2)=x^2+y^2+z^2-(x\alpha+y\beta+z\gamma)^2$$

oder:

Digitized by Google

$$(2) \quad p^2 = (\gamma y - \beta z)^2 + (\alpha z - \gamma x)^2 + (\beta x - \alpha y)^2$$

und das Drehmoment, also auch die Grösse (Stärke, Intensität) des linearen Momentes, derselben Kraft $= pP$.

Die Halbaxe ihres linearen Momentes, d. i. diejenige normale Halbaxe der Momentenebene CMP, um welche diese Ebene von der Kraft P rechts (rechtläufig) gedreht würde, habe die Richtcosinus λ, μ, ν; so müssen, weil jene Normale auf den in dieser Ebene liegenden Geraden CM (x, y, z) und MP (α, β, γ) auch senkrecht steht, sich verhalten

$$(3) \quad \frac{\lambda}{\gamma y - \beta z} = \frac{\mu}{\alpha z - \gamma x} = \frac{\nu}{\beta x - \alpha y} = \frac{1}{p}$$

und bei diesen Voraussetznngen nehmen wir den Arm p, also auch das Moment pP, positiv in Rechnung, und folglich machen wir die Richtcosinus λ, μ, ν dieser Halbaxe der Rechtsdrehung den ihnen proportionirten Unterschieden gleichstimmig.

Aus dieser Proportion folgen die Producte

$$(4) \quad \begin{aligned} p\lambda &= \gamma y - \beta z, \\ p\mu &= \alpha z - \gamma x, \\ p\nu &= \beta x - \alpha y \end{aligned}$$

als die kürzesten oder senkrechten Abstände der Richtungslinie MP der Kraft von den Axen der x, y, z mit den Sinus der Richtwinkel dieser Richtungslinie. (Vergl. § 16, III).

Multipliciren wir die Gleichungen (4) mit der Kraft P, so erhalten wir für die Projectionen ihres linearen Momentes pP auf die Coordinatenaxen der x, y, z die Ausdrücke

$$(5) \quad \begin{aligned} pP.\lambda &= P(\gamma y - \beta z) \\ pP.\mu &= P(\alpha z - \gamma x) \\ pP.\nu &= P(\beta x - \alpha y). \end{aligned}$$

Da der Angriffspunkt einer Kraft bekanntlich in jeden anderen mit ihm unabänderlich verbundenen Punkt ihrer Richtungslinie übertragen werden darf, so dürfen in diesen Ausdrücken die x, y, z auch als laufende Coordinaten derselben Geraden angesehen werden.

Digitized by Google

16.

Drehmoment einer Kraft um eine Axe.

I. Um eine beliebige Axe.

Denken wir uns die am Punkte M (x, y, z) auf (Taf. I. Fig. 9) thätige Kraft P (α, β, γ) nach einer diesen Punkt nicht enthaltenden Halbaxe u, die durch einen festen Punkt D (ξ, η, ζ) gehend durch die beständigen Richtcosinus λ, μ, ν gerichtet wird, und nach der, durch jenen Angriffspunkt auf diese Axe senkrecht aufgerichteten, Ebene $\mathfrak{U}$ in die beiden winkelrechten Componenten N und Q zerlegt; oder bestimmen wir die Projectionen N, Q der Kraft P auf die Axe u und auf ihre Normalebene $\mathfrak{U}$. Da nun wird die letztere Componente oder Projection Q die Projectionsebene $\mathfrak{U}$ um deren fest gedachte $\frac{1}{2}$ Axe u, oder um den Durchschnittspunkt K beider, am Arme $LK = q$, also mit dem Drehmomente qQ, zu drehen streben; welches hiernach mit Recht das **D r e h m o m e n t d e r S t a m m k r a f t** P **u m d i e A x e** (Halbaxe) u genannt und für positiv oder negativ erklärt wird, je nachdem eine Rechts- oder Linksdrehung um solche angestrebt wird.

Der Arm $LK = q$ erscheint zunächst als der senkrechte Abstand der Richtung MQ der Kraft Q von ihrem Projectionspunkte K auf die Drehaxe u; ist aber, weil die Richtung MN und mit ihr die Ebene $MPNQ$ zur Axe u parallel ist, auch der senkrechte Abstand dieser Axe von jener Ebene, folglich zugleich der kürzeste und senkrechte Abstand der Richtung MP der Kraft P von derselben Axe; mithin ist er gleich der Projection der Strecke DM auf jegliche Normale n der Kräften-Ebene $MPNQ$ oder auf jede Gerade n, die auf der Richtung MP (α, β, γ) der Kraft P und der Axe u (λ, μ, ν) zugleich senkrecht steht. Demgemäss erhalten wir, wenn wir den Neigungswinkel NMP dieser beiden letzteren Richtungen mit ε bezeichnen, für die Richtwinkel dieser Normale n die bestimmende stetige Proportion

$$\frac{\cos nx}{\beta\nu - \gamma\mu} = \frac{\cos ny}{\gamma\lambda - \alpha\nu} = \frac{\cos nz}{\alpha\mu - \beta\lambda} = \frac{1}{\sin \varepsilon}.$$

Ferner sind die Projec[illegible] von D (ξ, η, ζ) zu M (x, y, z). [illegible]n gehenden Strecke auf [illegible]tenaxen

[illegible] Proj[illegible] d. i. der Arm

[illegible] $= (x$ [illegible] nz.

3*

Setzt man hierin die Ausdrücke der Cosinus, so findet man diesen Arm q aus der Gleichung

$$(1)..q\sin\varepsilon = (x-\xi)(\beta\nu-\gamma\mu)+(y-\eta)(\gamma\lambda-\alpha\nu)+(z-\zeta)(\alpha\mu-\beta\lambda)$$

$$=\begin{vmatrix} x-\xi, & \alpha, & \lambda \\ y-\eta, & \beta, & \mu \\ z-\zeta, & \gamma, & \nu \end{vmatrix}.$$

Weil endlich die eigentlich drehende Componente oder Projection

$$Q = P\sin\varepsilon$$

st, so findet man das fragliche Drehmoment

$$qQ = q.P\sin\varepsilon = P.q\sin\varepsilon$$

oder das Drehmoment der ursprünglichen Kraft P um die Axe u

$$(2) \ldots\ldots q.P\sin\varepsilon = P.q\sin\varepsilon = P.\begin{vmatrix} x-\xi, & \alpha, & \lambda \\ y-\eta, & \beta, & \mu \\ z-\zeta, & \gamma, & \nu \end{vmatrix}.$$

II. Drehmoment um eine den Coordinatenursprung enthaltende Axe.

Lassen wir die bisher willkürliche Axe u durch den Coordinatenursprung gehen, so dürfen wir ihren festen Punkt D (ξ, η, ζ) in diesen Ursprung versetzen, also $\xi = \eta = \zeta = 0$ machen; folglich erhalten wir das Drehmoment der Kraft P um eine solche Axe

$$(3) \ldots\ldots\ldots\ldots q.P\sin\varepsilon = \begin{vmatrix} \lambda & x & \alpha \\ \mu & y & \beta \\ \nu & z & \gamma \end{vmatrix}$$

$$= \lambda.P(\gamma y-\beta z)+\mu.P(\alpha z-\gamma x)+\nu.P(\beta x-\alpha y).$$

III. Drehmomente einer Kraft um die positiven Coordinatenhalbaxen.

Wählen wir demnach zu solchen Drehungsaxen — genauer gesprochen, zu Halbaxen der Rechtsdrehung — abwechselnd die Halbaxen der positiven Coordinaten

$$x, \quad y, \quad z;$$

so wird im letzten Ausdrucke der Richtcosinus dieser Halbaxe

Digitized by Google

$$\lambda, \quad \mu, \quad \nu$$

gleich 1, jeder der 2 übrigen aber 0.

Bezeichnen wir noch den kürzesten Abstand der Richtung (α, β, γ) der auf den Punkt (x, y, z) einwirkenden Kraft P von dieser Coordinatenaxe mit

$$A, \quad B, \quad C;$$

so finden wir das Drehmoment dieser Kraft

$$\text{um die } x\text{-Axe} \ldots\ldots A.P\sin Px = P(\gamma y - \beta z) \quad \ldots\ldots (4)$$

$$\text{„ „ } y\text{-Axe} \ldots\ldots B.P\sin Py = P(\alpha z - \gamma x) \quad \ldots\ldots (5)$$

$$\text{„ „ } z\text{-Axe} \ldots\ldots C.P\sin Pz = P(\beta x - \alpha y) \quad \ldots\ldots (6)$$

wobei, Früherem zufolge,

$$(7) \ldots\ldots \quad \cos Px = \alpha, \quad \cos Py = \beta, \quad \cos Pz = \gamma$$

ist.

IV. Einerleiheit dieser axialen Drehmomente einer Kraft mit den conaxialen Projectionen ihres linearen Momentes.

Da diese 3 Ausdrücke mit jenen (5) in § 15 einerlei sind, so

müssen die Projectionen des linearen Momentes einer Kraft auf 3 winkelrechte Coordinatenaxen, die den Momentenpunkt zum Ursprung haben, genau dasselbe sein, wie die Drehmomente dieser Kraft um die 3 positiven Halbaxen der Coordinaten.

17.

Vollständige analytische Bestimmung der Resultirenden beliebig vieler und nach willkürlichen Richtungen an einem Punkte angebrachten Kräfte beziehlich ihrer Stärke, Richtung und Lage.

Nach den nun aufgestellten allgemeinen Lehren ist es leicht, beliebig viele und wie immer gerichtete Kräfte P, P', P'', ..., welche an einem gegebenen Punkte thätig sind, analytisch zusammenzusetzen.

I. Die Stärke R und die Richtcosinus a, b, c der Richtung der Resultirenden berechnen wir nach den Gleichungen (6), (7), (8) des § 14.

Digitized by Google

II. Zur Bestimmung der Lage oder zur Aufstellung der Coordinaten-Gleichungen der Richtungslinie der Resultirenden denken wir uns die winkelrechten Projectionsaxen I, II, III durch den gewählten Momentenmittelpunkt C als Coordinatenaxen der x, y, z geführt, und setzen des Angriffspunktes M Coordinaten x, y, z als gegeben voraus, berechnen die Summen L, M, N der Projectionen der linearen Momente aller gegebenen Kräfte P, P', P'', ... auf diese Axen, oder die Summen der Drehmomente dieser Kräfte um die positiven Halbaxen der x, y, z, nach § 13, Gleichungen (1) und § 15, Gleichungen (5), aus den Formeln

$$(1) \ldots \quad L = P(\gamma y - \beta z) + P'(\gamma' y - \beta' z) + P''(\gamma'' y - \beta'' z) + \ldots$$
$$M = P(\alpha z - \gamma x) + P'(\alpha' z - \gamma' x) + P''(\alpha'' z - \gamma'' x) + \ldots$$
$$N = P(\beta x - \alpha y) + P'(\beta' x - \alpha' y) + P''(\beta'' x - \alpha'' y) + \ldots$$

Dann gleichen diese Summen auch (nach § 13) den Projectionen des linearen Momentes K der Resultirenden R auf die gleichnamigen Axen; nemlich es ist nach § 15, (5)

$$R(cy - bz) = L, \quad R(az - cx) = M, \quad R(bx - ay) = N$$

oder weil (gemäss § 15, Ende) die Cordinaten x, y, z des Angriffspunktes M der resultirenden Kraft R auch in die Coordinaten ξ, η, ζ des beschreibenden (laufenden) Punktes ihrer Richtungslinie vertauscht werden dürfen, haben wir die Gleichungen

$$(2) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad R(c\eta - b\zeta) = L$$
$$R(a\zeta - c\xi) = M$$
$$R(b\xi - a\eta) = N$$

die jedoch dieser Richtungslinie nur dann angehören, wenn jede die Folge der beiden andern ist, sie also mit gewissen beständigen Multiplicatoren, hier wie leicht zu sehen mit a, b, c multiplicirt in der Summe der Producte die ξ, η, ζ wegfallen machen, folglich wenn die Bedingungsgleichung

$$aL + bM + cN = 0$$

erfüllt ist.

Weil in den Summen-Ausdrücken (1) die x, y, z, als dem gemeinsamen Angriffspunkte der Kräfte angehörige Coordinaten, durchweg dieselben sind; so können deren Glieder nach ihnen geordnet werden, und jene Ausdrücke übergehen zufolge § 14, (6) in

Digitized by Google

$$(3) \quad\ldots\ldots\ldots\ldots \quad L = yZ - zY$$
$$M = zX - xZ$$
$$N = xY - yX.$$

Eben so verwandeln sich die Gleichungen (2), bei Beachtung der Ausdrücke der a, b, c in Gleichung (8) des § 14, in die einfacheren Gleichungen der nun auch noch der Lage nach bestimmten Richtungslinie der Resultirenden R

$$(4) \quad\ldots\ldots\ldots\ldots \quad Z\eta - Y\zeta = L$$
$$X\zeta - Z\xi = M$$
$$Y\xi - X\eta = N$$

und zugleich die hierfür unerlässliche Bedingungsgleichung in

$$(5) \quad\ldots\ldots\ldots \quad XL + YM + ZN = 0.$$

Da diese in § 14 als Gleichung (10) geforderte Bedingungsgleichung im vorliegenden Falle sicher erfüllt wird, so gibt dies zu erkennen:

dass bei jeglichem Systeme auf einerlei Punkt einwirkender Kräfte die Resultirende in der (Momenten-) Ebene des resultirenden linearen Momentes liegt, oder:

dass das resultirende Moment mit der resultirenden Kraft zusammengehört; mithin:

dass sämmtliche vorhandene Kräfte in eine einzige bestimmte resultirende Kraft zusammengesetzt werden können.

Eine andere Bestimmungsweise der Lage der Richtungslinie der Resultirenden R, aus den oben gefundenen Projectionen L, M, N des resultirenden linearen Momentes, ist die in § 14, II auseinandergesetzte; welche hier jedenfalls auf ein bestimmtes Ergebniss führen muss, weil der Bestand einer solchen Resultirenden so eben bewiesen worden ist.

18.

Zusammensetzung zweier, an zwei verschiedenen aber unveränderlich mit einander verbundenen Punkten wirkenden Kräfte.

Seien ein Paar unveränderlich (starr, fest) mit einander verbundene Stoffpunkte

Digitized by Google

$$M(x, y, z) \quad \text{und} \quad M'(x', y', z')$$

gegeben,

an jenem die Kraft P,
„ diesem „ „ P'

thätig. Man suche diese zwei getrennten Kräfte in eine einzige — ihre Resultirende — zusammenzusetzen.

I. Fall. Die Kräfte liegen in einer Ebene. Convergente und parallele Kräfte.

Liegen die Richtungen beider Kräfte P, P' in einer Ebene, so können wir die Unterscheidung, ob sie sich schneiden oder nicht, dadurch entbehrlich machen, dass wir (Taf. I. Fig. 10) in die Verbindungsgerade MM' zwei gleiche entgegen gerichtete Kräfte S, S', an M die S, an M' die S', legen; welche sonach an der als unabänderlich vorausgesetzten Strecke MM' sich das Gleichgewicht halten, und deshalb keine Störung der Wirkung der gegebenen 2 Kräfte verursachen können.

Die Stärke dieser gleichen Zusatzkräfte mag nun welche immer sein, so wird doch die Richtung der Resultirenden T der P und S, mit jener der Resultirenden T' der P' und S', in der Ebene der Kräfte P, P' liegen und selbst, wenn diese beiden parallel wären, sich in einem bestimmten Punkte N durchschneiden, der mit den beiden festen Angriffspunkten M, M' gleichfalls unveränderlich verbunden ist. In ihn dürfen wir demnach die so eben gefundenen Resultirenden T, T' versetzen, und ihre Resultirende R nach den bisher abgehandelten Lehren bestimmen; welche sohin den 4 Kräften P, S, P', S', oder nach Wegfall der einander aufhebenden Kräfte S, S', den ursprünglichen 2 Kräften P, P' äquivalent (gleichwirkend) sein muss. — Ein solcher Durchschnittspunkt N der Richtnngen MT, $M'T'$ kann blos in dem einzigen Falle sich nicht ergeben, wo die Kräfte P, P' gleich gross und entgegengesetzt parallel sind; weil da die abgeleiteten Kräfte T, T' eben so ausfallen. Dieser alleinige Ausnahmsfall wird jedoch unten (in § 21) eigens erforscht werden.

Wählen wir nun zuvörderst wo immer (in oder ausser der Ebene der Kräfterichtungen) eine willkürliche Axe u für das Projiciren der vorhandenen Kräfte; so ist, weil P, S die Resultirende T haben,

$$T.\cos uT = P.\cos uP + S.\cos uS$$

und weil P', S' die Resultirende T' liefern,

$$T'.\cos uT' = P'.\cos uP' + S'.\cos uS'$$

Digitized by Google

endlich, weil die auf N übertragenen Kräfte T, T' in die Resultirende R zusammengesetzt werden,

$$R.\cos uR = T.\cos uT + T'.\cos uT'.$$

Addiren wir jetzt diese 3 Gleichungen und erwägen, dass $S = S'$ und der Winkel $uS' = uS \pm 180^0$ also $\cos uS' = -\cos uS$ ist, so finden wir die Gleichung

$$(1) \ldots\ldots \quad R.\cos uR = P.\cos uP + P'.\cos uP',$$

welche sicher gilt, wenn die Richtungen der Kräfte T, T' sich durchschneiden, mögen auch jene der Kräfte P, P' convergiren oder parallel laufen. Sonach lehrt sie den Satz:

Auch im Falle eines Paares unveränderlich verbundener Angriffspunkte zweier auf sie einwirkenden und in einer Ebene befindlichen Kräfte ist, wie bei an einerlei Punkt thätigen Kräften, die Projection ihrer Resultirenden auf was immer für eine Axe gleich der Summe der Projectionen dieser Kräfte auf die nemliche Axe.

Nehmen wir ferner irgend einen Punkt C zum Mittelpunkt von Drehmomenten an, von dem die Richtungen der Kräfte

$$P,\ P';\quad S,\ S';\quad T,\ T';\quad R$$

die senkrechten Abstände — Arme der Kräfte —

$$p,\ p';\quad s,\ s';\quad t,\ t';\quad r$$

haben; und verlegen wir die unter der Benennung „lineare Momente" aus ihnen hergeleiteten Kräfte

$$pP,\ p'P';\quad sS,\ s'S';\quad tT,\ t'T';\quad rR$$

von C aus in ihre beziehlichen Halbaxen der Rechtsdrehung: so haben wir dieselben ebenfalls in ihr resultirendes lineares Moment zusammenzusetzen. Hiezu bezeichnen wir die Cosinus derjenigen Winkel, welche diese Halbaxen mit der vorhin gewählten Axe (Halbaxe) u bilden, beziehungsweise mit

$$\varpi,\ \varpi';\quad \sigma,\ \sigma';\quad \tau,\ \tau';\quad \varrho.$$

Nach diesen Voraussetzungen erhalten wir gemäss früherer Lehre für die Projectionen der linearen Momente der nach und nach gefundenen Resultirenden T, T', R auf diese Axe die Gleichungen

Digitized by Google

$$tT.\tau = pP.\overline{\omega} + sS.\sigma,$$

$$t'T'.\tau' = p'P'.\overline{\omega}' + s'S'.\sigma',$$

$$rR.\varrho = tT.\tau + t'T'.\tau'.$$

Die in der Geraden MM' einander entgegen wirkenden gleich starken Kräfte S, S' haben einerlei senkrechten Abstand ihrer Richtungen vom Momentenpunkte, also ihre Arme s, s' gleich; daher sind auch ihre absoluten Drehmomente sS, $s'S'$ gleich gross. Allein weil diesen einander entgegen gerichteten Kräften dieselbe Momentenebene zukommt, so streben sie diese Ebene entgegengesetzt zu drehen und deshalb werden ihre linearen Momente in die beiden entgegengesetzten Halbaxen der im Momentenpunkte auf diese Ebene errichteten Normale gelegt, mithin ist der Cosinus $\sigma' = -\sigma$ und sonach die Projection $s'S'.\sigma' = -sS.\sigma$. Demzufolge ist die Summe der 3 letzten Gleichungen:

(2) . . . . $rR.\varrho = pP.\overline{\omega} + p'P'.\overline{\omega}'$

und lehrt den Satz:

Auch wenn an einem Paar getrennter, jedoch unabänderlich mit einander verbundener, Punkte zwei in einerlei Ebene enthaltene Kräfte wirken, ist wie bei an einerlei Punkt thätigen Kräften, die Projection des linearen Momentes ihrer Resultirenden auf was immer für eine Axe gleich der Summe der Projectionen der linearen Momente beider Kräfte auf dieselbe Axe.

19.

Fortsetzung. Benützung rechtwinkeliger Coordinaten.

Da nun die Stärke und Richtung der Resultirenden R der zwei gegebenen Kräfte P, P' ganz so bestimmt werden, als wären diese an irgend einem gemeinsamen Punkte wirksam; so liefert, unter Beibehaltung der in § 14 benützten Bezeichnungen, das Projiciren dieser Resultirenden auf irgend welche 3 winkelrechte Coordinatenaxen der x, y, z, gemäss § 18, Gleichung (1), die Gleichungen:

(3) . . . . $Ra = P\alpha + P'\alpha'$,

$$Rb = P\beta + P'\beta',$$

$$Rc = P\gamma + P'\gamma'.$$

Digitized by Google

Die Summe der zweiten Potenzen derselben gibt, weil

$$\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = \cos PP'$$

ist, für die Stärke R der Resultirenden die Bestimmungsgleichung

(4) . . . . $R^2 = P^2 + P'^2 + 2PP' \cos PP''$,

daher, wofern die R von Null verschieden ausfällt, geben die durch sie getheilten Gleichungen (3) die Richtcosinus a, b, c der Resultirenden.

Zur Bestimmung der Lage dieser Richtung führen wir die winkelrechten Coordinatenaxen der x, y, z durch den beliebig wo angenommenen Momentenpunkt C, und indem wir die in § (14, 15 und 17) verwendeten Bezeichnungen beibehalten und nur noch dem Punkte M' die Coordinaten x' y' z' zuschreiben, projiciren wir das resultirende lineare Moment $K = rR$ auf jene 3 Axen. Auf diese Weise erhalten wir nach § 18, Gleichung (2) die Gleichungen:

(5) . . . $L = pP.\lambda + p'P'.\lambda' = P(\gamma y - \beta z) + P'(\gamma' y' - \beta' z')$

$$M = pP.\mu + p'P'.\mu' = P(\alpha z - \gamma x) + P'(\alpha' z' - \gamma' x')$$

$$N = pP.\nu + p'P'.\nu' = P(\beta x - \alpha y) + P'(\beta' x' - \alpha' y')$$

und

(6) . . . . $rR.l = K.l = R(c\eta - b\zeta) = L$,

$$rR.m = K.m = R(a\zeta - c\xi) = M,$$

$$rR.n = K.n = R(b\xi - a\eta) = N;$$

von denen die drei letzten der Richtungslinie der Resultirenden R angehören, wie die Gleichungen (2) in § 17.

Auch hier finden wir, wie in § 13, aus den Projectionen L, M, N des resultirenden linearen Momentes K für dieses selbst den Ausdruck

(7) . . . . $K^2 = L^2 + M^2 + N^2$

und hiernach aus (6) die Richtcosinus l, m, n seiner Halbaxe.

Nun frägt sich's nur noch, unter welcher Bedingung die berechnete resultirende Kraft R mit dem gefundenen resultirenden linearen Momente K zusammengehöre, folglich gemäss § 14, (9) die Richtung (a, b, c) jener auf der Halbaxe (l, m, n), dieses senkrecht stehe, daher die Gleichung bestehe:

(8) . . . . $al + bm + cn = 0.$

Digitized by Google

Hiezu multipliciren wir mit den Gleichungen (3) die gleichvielten der Gleichungen (6), indem wir uns in diesen die zweiten Ausdrücke (5) eingesetzt denken. Da zeigt sich bei der Summirung der Producte, dass die Factoren der P^2 und P'^2 geradezu Null werden, folglich der Factor des PP' ebenfalls Null sein, daher die Gleichung

$$\alpha'(\gamma y - \beta z) + \beta'(\alpha z - \gamma x) + \gamma'(\beta x - \alpha y)$$
$$+ \alpha(\gamma' y' - \beta' z') + \beta(\alpha' z' - \gamma' x') + \gamma(\beta' x' - \alpha' y') = 0$$

erfüllt werden muss.

Nach den zweierlei Coordinaten geordnet, übergeht dieselbe in

$$(9) \ldots (\beta\gamma' - \beta'\gamma)(x - x') + (\gamma\alpha' - \gamma'\alpha)(y - y') + (\alpha\beta' - \alpha'\beta)(z - z') = 0$$

oder in

$$(10) \ldots\ldots\ldots \quad \begin{vmatrix} x - x', & \alpha, & \alpha' \\ y - y', & \beta, & \beta' \\ z - z', & \gamma, & \gamma' \end{vmatrix} = 0$$

von welchen 2 Formen die erstere ersichtlich macht, dass jede auf den Richtungen $(\alpha\ \beta\ \gamma)$ und $(\alpha'\ \beta'\ \gamma')$ der Kräfte P, P' senkrechte Gerade auch auf der durch ihre Angriffspunkte $M(x\ y\ z)$ und $M'(x'\ y'\ z')$ gehenden Geraden senkrecht stehen muss; während die letztere erheischt, dass die Richtungen $(\alpha\ \beta\ \gamma)$ und $(\alpha'\ \beta'\ \gamma')$ beider Kräfte mit der Geraden MM' ihrer Angriffspunkte zugleich auf einer und derselben vierten Geraden senkrecht stehen.

Beide diese Forderungen für die Zusammengehörigkeit der resultirenden Kraft und ihres linearen Momentes, also für die Zusammensetzbarkeit solcher zwei Kräfte in eine einzige, kommen demnach darauf hinaus, dass die Richtungen beider gegebenen Kräfte in einer Ebene liegen müssen.

An sie schliesst sich jedoch noch die bereits Eingangs angedeutete, Forderung an, dass nicht $R = 0$ ausfalle. Nun wird aber für $R = 0$ gemäss Gleichung (4)

$$0 = P^2 + P'^2 + 2PP' \cos PP'$$
$$= (P - P')^2 + PP' \cdot \left(2 \cos \frac{PP'}{2}\right)^2,$$

was nur eintreten kann, wenn

$$P - P' = 0 \quad \text{und} \quad \cos \frac{PP'}{2} = 0,$$

also

Digitized by Google

$$P' = P \quad \text{und} \quad PP' = 180^0$$

ist. Dieser Ausnahmsfall, wo die zwei gegebenen Kräfte gleich gross aber entgegengerichtet sind, wird demnach später eigens zu erforschen kommen.

20.

II. Fall. Parallelkräfte.

Betrachten wir jetzt besonders den Fall, wo die an den Punkten $M(x\,y\,z)$ und $M'(x'\,y'\,z')$ wirksamen Kräfte $P(\alpha\,\beta\,\gamma)$ und $P'(\alpha'\,\beta'\,\gamma')$ parallel sind. Sind diese Kräfte gleichstimmig / entgegengesetzt parallel, also gleichgerichtet, / entgegengerichtet, so ist:

$$(11) \quad \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{\beta'}{\beta} = \frac{\gamma'}{\gamma} = \pm 1,$$

und die Gleichungen (3) verwandeln sich in:

$$Ra = (P \pm P')\,\alpha,$$

$$Rb = (P \pm P')\,\beta,$$

$$Rc = (P \pm P')\,\gamma;$$

daher wegen

$$1 = a^2 + b^2 + c^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$$

ist

$$R^2 = (P \pm P')^2.$$

Da wir die Kräfte P, P', R auch hier noch immer als absolut in Rechnung nehmen, so muss, wofern im Falle entgegen gerichteter Kräfte, die $P > P'$ ist, die Resultirende

$$(12) \quad R = P \pm P'$$

und

$$(13) \quad \frac{a}{\alpha} = \frac{b}{\beta} = \frac{c}{\gamma} = \frac{R}{P \pm P'} = 1$$

sein.

Sohin verwandeln sich die Ausdrücke § 19, (6) der Projectionen des resultirenden linearen Momentes K in

Digitized by Google

$$(14) \ldots \quad K.l = R(\gamma\eta - \beta\zeta) = \gamma(Py \pm P'y') - \beta(Pz \pm P'z'),$$
$$K.m = R(\alpha\zeta - \gamma\xi) = \alpha(Pz \pm P'z') - \gamma(Px \pm P'x'),$$
$$K.n = R(\beta\xi - \alpha\eta) = \beta(Px \pm P'x') - \alpha(Py \pm P'y').$$

daher, wenn wir dieselben durch die jedenfalls von Null verschiedene Resultirende R theilen, sehen wir uns aufgefordert, abkürzend die Quotienten

$$(15) \ldots \quad \frac{Px \pm P'x'}{R} = x_1, \quad \frac{Py \pm P'y'}{R} = y_1, \quad \frac{Pz \pm P'z'}{R} = z_1$$

zu setzen und dadurch die letzteren Gleichheiten umzuwandeln in

$$\gamma(\eta - y_1) = \beta(\zeta - z_1),$$
$$\alpha(\zeta - z_1) = \gamma(\xi - x_1),$$
$$\beta(\xi - x_1) = \alpha(\eta - y_1);$$

woraus sogleich folgt:

$$(16) \ldots\ldots\ldots \quad \frac{\xi - x_1}{\alpha} = \frac{\eta - y_1}{\beta} = \frac{\zeta - z_1}{\gamma},$$

welche die Gleichungen der Richtungslinie der Resultirenden darstellen.

Demzufolge werden die axialen Projectionen (14) des resultirenden linearen Momentes

$$(17) \ldots\ldots\ldots \quad K.l = R(\gamma y_1 - \beta z_1),$$
$$K.m = R(\alpha z_1 - \gamma x_1),$$
$$K.n = R(\beta x_1 - \alpha y_1).$$

Zusätze. 1. Die durch die Ausdrücke (15) bestimmten Coordinaten $x_1\ y_1\ z_1$ stellen einen Punkt N fest, der den Gleichungen (16) gemäss in der Richtungslinie der Resultirenden liegt und als der Angriffspunkt derselben angesehen zu werden pflegt.

2. Zieht man von diesen Coordinatenausdrücken einzeln die dem Punkte M' angehörigen Coordinaten x', y', z' ab, so erhält man leicht

$$\frac{P}{R} = \frac{x_1 - x'}{x - x'} = \frac{y_1 - y'}{y - y'} = \frac{z_1 - z'}{z - z'}.$$

Aus diesen Quotientengleichheiten ersieht man sofort, dass der Angriffspunkt $N(x_1\ y_1\ z_1)$ der Resultirenden R auf der durch die Angriffspunkte $M(x, y, z)$ und $M'(x', y', z')$ der beiden Parallelkräfte P, P' gehenden Geraden liegt.

Digitized by Google

Sind P und P' gleichgerichtet, ist also $R = P + P' > P$, so sind die Theiler dieser gleichen Quotienten grösser als die Dividende, folglich liegt der Punkt N zwischen M und M'.

Sind hingegen P, P' entgegengerichtet, ist also $R = P - P' < P$, so sind die Theiler der gleichen Quotienten kleiner als die Dividende, folglich liegt der Punkt N ausserhalb M und M', und zwar jenseits des M oder auf der Verlängerung der Strecke $M'M$.

3. Insofern in den Ausdrücken (15) der Coordinaten x_1, y_1, z_1 des Angriffspunktes N der Resultirenden der 2 Parallelkräfte die Richtcosinus α, β, γ dieser Kräfte nicht vorkommen; ist die Stelle dieses Punktes von den Richtungen der Parallelkräfte unabhängig; deshalb wird er auch der Mittelpunkt dieser zwei Parallelkräfte genannt.

4. Im Ausdrucke (13) der Stärke R der Resultirenden wird der Stärke P der einen der zwei Parallelkräfte die Stärke P' der anderen abwechselnd addirt oder subtrahirt, also entgegengesetzt aggregirt, je nachdem diese letztere Kraft P' die gleiche oder die entgegengesetzte Richtung jener ersteren P hat. Hierwegen ist es gestattet, bei Parallelkräften die Stärken derselben auch algebraisch bezogen, nemlich bei den nach einer gewissen Richtung parallel wirkenden Kräften, als positiv, und bei den anderen gleichzeitig ihnen entgegen gerichtet wirkenden als negativ in der Rechnung zu führen.

Diesem Uebereinkommen gemäss kann man obigen Ausdruck (13) der Grösse der Resultirenden in algebraischer Deutung auch so schreiben:

$$(18) \quad R = P + P'.$$

5. Schreibt man, mit Beibehalt dieser Gleichung und in demselben Sinne, auch in den Gleichungen (15) blos P' anstatt $\pm P'$, so leitet man aus ihnen leicht die allgemeinen algebraischen ab:

$$(19) \quad \begin{aligned} Rx_1 &= Px + P'x', \\ Ry_1 &= Py + P'y', \\ Rz_1 &= Pz + P'z'. \end{aligned}$$

Ein derartiges Product einer Kraft in den Abstand ihres Angriffspunktes von einer bestimmten Ebene, dessen beide Factoren algebraisch bezogen angenommen werden, pflegt man, bei Erforschung paralleler Kräfte, ihr (statisches) Moment in Bezug auf diese Ebene zu nennen.

Digitized by Google

Da ferner von drei Coordinatenebenen jedenfalls eine ganz willkürlich ist, so enthalten die Gleichungen (19) den Satz:

Das Moment der Resultirenden (zweier) paralleler Kräfte beziehlich einer jeden beliebigen Ebene gleicht der Summe der eben solchen Momente dieser Parallelkräfte.

21.

III. Fall. Das Kräftepaar. Moment desselben.

Betrachten wir nun den, schon im § 18 und 19 hervorgehobenen, Ausnahmsfall solcher zwei entgegen gerichteter paralleler Kräfte, welche gleichstark sind; ohne aber in der Geraden ihrer Angriffspunkte zu liegen, weil sie so ohnehin einander im Gleichgewichte erhalten, mithin weiter nichts Bemerkenswerthes darbieten würden.

Für diesen Fall gilt demnach in der stetigen Proportion (11) das untere Zeichen, also ist

(20) . . . . . . $\alpha' = -\alpha, \quad \beta' = -\beta, \quad \gamma' = -\gamma,$

und wegen $P' = P$ sind die dortigen Projectionen Ra, Rb, Rc der Resultirenden R allesammt $= 0$; mithin, weil $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ ist, muss die vermeintliche Resultirende

$$R = 0$$

sein und sonach sind auch ihre Richtcosinus a, b, c unangebbar, und die Ausdrücke (15) der Coordinaten x_1, y_1, z_1 des Angriffspunktes der Resultirenden werden unendlich gross, also unbestimmbar.

Zwei solche gleichstarke, in zwei (verschiedenen) Parallellinien entgegengesetzt gerichtet wirkende, Kräfte nennt man nach ihrem ersten Erforscher Poinsot (Éléments de Statique, éd. 1834) eine Kräftekoppel (couple de forces), gewöhnlich aber ein Kräftepaar oder Gegenpaar, auch einen Drehzwilling.

Obwohl nun ein Kräftepaar keine Resultirende besitzt, so halten seine Kräfte doch einander nicht das Gleichgewicht, sondern haben ein Drehmoment, also auch ein lineares Moment, insofern sie die Ebene ihrer Richtungen zu drehen bestrebt sind.

Denn bei diesen Voraussetzungen übergehen die Gleichungen § 20, (14) in

Digitized by Google

$$(21) \ldots\ldots \quad Kl = P[\gamma(y-y')-\beta(z-z')],$$
$$Km = P[\alpha(z-z')-\gamma(x-x')],$$
$$Kn = P[\beta(x-x')-\alpha(y-y')],$$

und die zweiten Theile dieser Gleichungen können nicht verschwinden, weil die Richtungen $(\alpha\,\beta\,\gamma)$ und $(-\alpha, -\beta, -\gamma)$ der Kräfte P und $(P' = P)$ nicht in der durch ihre Angriffspunkte $M(x, y, z)$ und $M'(x', y', z')$ gehenden Geraden liegen, also den Proportionen

$$x-x' : y-y' : z-z' = \alpha : \beta : \gamma$$
$$= -\alpha : -\beta : -\gamma$$

nicht genügen sollen.

Diese Gleichungen (21) geben zur Summe ihrer zweiten Potenzen

$$(22) \ldots\ldots \quad \left(\frac{K}{P}\right)^2$$
$$= [\gamma(y-y')-\beta(z-z')]^2+[\alpha(z-z')-\gamma(x-x')]^2+[\beta(x-x')-\alpha(y-y')]^2$$
$$= (x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2-[\alpha(x-x')+\beta(y-y')+\gamma(z-z')]^2.$$

Es ist aber dieser letztere Minuend die zweite Potenz der Verbindungsstrecke MM' der Angriffspunkte, und der Potentiand des Subtrahendes die Projection derselben Strecke auf die Richtung $(\alpha\,\beta\,\gamma)$ der Kraft P; folglich ist der ganze Unterschied die zweite Potenz des mit d zu bezeichnenden senkrechten Abstandes des Punktes M' von der Richtung dieser Kraft oder des senkrechten Abstandes der Richtungslinien beider Kräfte von einander. Sonach ist

$$(22) \ldots\ldots \quad \left(\frac{K}{P}\right)^2 = d^2$$

und wenn man P, K, d wieder als absolut betrachtet,

$$\frac{K}{P} = d,$$

daher das resultirende lineare Moment des Kräftepaares

$$(23) \ldots\ldots \quad K = Pd.$$

Für die Richtcosinus l, m, n der Halbaxe dieses resultirenden linearen Momentes geben dann noch die Gleichungen (21) und (23) die Proportionen

$$(24)$$
$$\frac{l}{\gamma(y-y')-\beta(z-z')} = \frac{m}{\alpha(z-z')-\gamma(x-x')} = \frac{n}{\beta(x-x')-\alpha(y-y')} = \frac{P}{K} = \frac{1}{d},$$

Digitized by Google

aus denen sich leicht die Ausdrücke

$$\alpha l + \beta m + \gamma n = 0$$

$$(x - x')l + (y - y')m + (z - z')n = 0$$

ableiten lassen, welche lehren, dass die Richtung (l, m, n) des linearen Momentes K auf den parallelen Richtungen der Kräfte P, P' und auf der Verbindungsstrecke MM' ihrer Angriffspunkte, daher auf der Ebene des Kräftepaares senkrecht steht.

Die Gleichung (22) lässt sich auch in folgender Weise herleiten.

Legt man (Taf. I. Fig. 11) durch den Momentenpunkt C auf die entgegengesetzt parallelen Richtungen MP, $M'P'$ der Kräfte P, P' die senkrechte Ebene, welche sie in D, D' schneidet, so sind $CD = p$, $CD' = p'$ die Arme, also pP, $p'P'$ die Drehmomente derselben Kräfte. — In der nemlichen Ebene ist einerseits die in C auf CD senkrecht errichtete Halbaxe CE die Richtung des linearen Momentes pP der an M ihre Momentenebene CMP rechtgängig (rechts) zu drehen bestrebten Kraft P, und die in C auf CD' senkrecht errichtete Halbaxe CE' die Richtung des linearen Moments $p'P'$ der an M' ihre Momentenebene $CM'P'$ rückgängig (links) zu drehen bestrebten Kraft P'.

Setzt man den Winkel

$$DCD' = \delta,$$

so ist der Winkel

$$ECE' = ECD + DCE' = 90^0 + (90^0 - \delta) = 180^0 - \delta,$$

mithin findet man die zweite Potenz des fraglichen linearen Momentes K (nach § 5, I und § 19, 4)

$$K^2 = (pP)^2 + (p'P')^2 + 2(pP)(p'P')\cos(180^0 - \delta),$$

daher wegen $P' = P$

$$\left(\frac{K}{P}\right)^2 = p^2 + p'^2 - 2pp'\cos\delta.$$

Auf den zwei parallelen Geraden MP, $M'P'$ ist eben so, wie die Ebene CDD', auch die Strecke DD' senkrecht, also dem senkrechten Abstande d dieser Parallellinien gleich; und das Dreieck CDD' liefert für ihn die Gleichung

$$d^2 = p^2 + p'^2 - 2pp'\cos\delta,$$

Digitized by Google

mithin ist wieder wie oben

$$(22) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \frac{K^2}{P^2} = d^2.$$

Bei einem Kräftepaare fällt demnach das Eigenthümliche auf, 1. dass die Grösse seines linearen Momentes nicht, wie bei anderen zusammenwirkenden Kräften, von der veränderlichen Lage des Momentenpunktes, sondern lediglich nur von der gemeinsamen Stärke seiner Kräfte und ihrem Arme abhängt, und 2. dass seine Richtung (Halbaxe) eine jede auf der Ebene (der Richtungen) seiner Kräfte senkrechte (normale) Halbaxe ist, um welche beide Kräfte diese Ebene rechtläufig (rechts) zu drehen streben.

Deshalb pflegt man (mit Poinsot) das Product einer Kraft mit dem Arme des Kräftepaares geradezu das Moment (Drehmoment) desselben zu nennen, und insofern die Wirkung des Paares durch sein Moment bemessen wird, sogar die Benennungen „Kräftepaar“ und „Moment“ für einander zu gebrauchen.

Dieses Moment, dP, nun wird längs der so eben beschriebenen Halbaxe (l, m, n) aus was immer für einem Punkte als Kraft unter dem Namen „lineares Moment des Kräftepaares“ aufgelegt.

Zwei mit einander unabänderlich verbundenen Kräftepaare können demnach, als gleichwirkend d. i. einerlei Drehung anstrebend, angesehen und in dieser Rücksicht unter sich vertauscht werden, wenn sie ihre linearen Momente völlig gleich d. h. gleichgross und gleichgerichtet haben, also mit dem nämlichen Momente in einerlei Ebene oder in parallelen Ebenen um einerlei oder gleichgerichtete Halbaxen rechtläufig (rechts) zu drehen suchen. Oder: es bleibt ohne Störung der Wirkung eines Kräftepaares gestattet; 1. dasselbe so, wie es ist, in seiner Ebene oder ausserhalb derselben parallel zu sich selbst zu verschieben oder 2. es in seiner Ebene nach Willkühr zu drehen, oder endlich 3. durch ein anderes in seiner Ebene oder in einer parallelen Ebene befindliches von gleichem Momente und gleichem Sinn der Drehung zu ersetzen; wofern nur das ersetzende Paar so wie das gegebene mit dem Systeme der Stoffpunkte unveränderlich verbunden ist.

Umgekehrt lässt sich — was als ein Hauptvorzug der linearen Momente anzusehen ist — jedes (gefundene) lineare Moment durch was immer für ein Kräftepaar ersetzen, dem es in vorbeschriebenen Rücksichten angehört.

Bemerkung. Es dürfte wohl kaum für unstatthaft angesehen werden, hieran folgende Bemerkung zu knüpfen. Anfangs (§ 3) zer-

Digitized by Google

legten wir jegliche Kraft in zwei auf einander senkrechte Componenten oder wir projicirten sie auf zwei gegen einander winkelrechte Axen, und wurden dadurch berechtiget, jene Kraft durch ein Paar solcher Componenten oder Projectionen zu ersetzen. Nachmals (§ 9) projicirten wir die Kräfte auf eine, ihren Angriffspunkt und einen beliebigen so genannten Momentenpunkt enthaltende Axe und auf die zu ihr senkrecht im Angriffspunkte errichtete Ebene. Letztere Projectionen, unter Belassung ihrer Richtungen, mit einem gewissen Multiplicator vervielfacht gaben uns hierauf (§ 9) die so genannten Drehmomente der Kräfte, welche wir bald danach (§ 11) senkrecht auf ihren Momentenebenen am Momentenpunkte als so genannte lineare Momente anbrachten, die wir jetzt wieder durch Kräftepaare ersetzen dürfen. Sohin vermögen wir jede gegebene Kraft durch eine andere Kraft und entweder durch ein lineares Moment oder durch ein Kräftepaar in angemessener Weise zu ersetzen. — Eine besonders einfache und leicht verständliche Ersetzung der letztern Art erzielt man (nach Poinsot) damit, dass man (vergl. Taf. I. Fig. 6 oder 8) zu der an einem Punkte M wirksamen Kraft P am willkürlichen (Momenten-) Punkte C in der zur MP gleichlaufenden Geraden zwei der P gleiche gegen einander gerichtete Kräfte P_1 und $-P_1$, erstere mit P gleichgerichtet hinzufügt; da dann die ursprüngliche Kraft P an M einestheils durch die von ihr nur im Angriffspunkte unterschiedene Kraft P_1, und anderentheils durch das, aus den zwei gleichen entgegengerichteten Parallelkräften P an M und $-P_1$ an C bestehende, Kräftepaar ersetzt oder vertreten werden kann, dessen Moment mit jenem der Kraft P an M augenfällig einerlei ist.

22.

IV. Fall. Gekreuzte Kräfte.

Nachdem wir in § 19 dargethan haben, dass zwei an einem Paare starr verbundener Punkte thätige Kräfte nur dann in eine einzige Kraft sich zusammenziehen lassen, wenn ihre Richtungen in einer Ebene liegen; so erhellet hieraus, dass zwei gekreuzte, d. h. nicht in einer Ebene wirkende, Kräfte niemals in eine einzige Kraft zusammengesetzt werden können.

Wegen dieses Ausnahmsfalles müssten wir demnach bei Zusammensetzung solcher an zwei starr verbundenen Stoffpunkten wirksamen Kräfte jedesmal in voraus untersuchen, ob die Richtungen dieser Kräfte in einer Ebene sich befinden, ihre Bestimmungsstücke also den Bedingungsgleichungen (9) und (10) des § 19 genügen oder nicht, und

Digitized by Google

hiernach müssten wir gemäss der im Vorangehenden erörterten Lehre verfahren.

Anstatt dieses Vorganges benützen wir aber lieber die folgende allgemeine Zusammensetzungsweise je zweier Kräfte an zwei verbundenen Punkten.

23.

Allgemeiner Vorgang bei dem Zusammensetzen zweier an einem Paar starr verbundener Punkte wirkender Kräfte.

I. Bei Bestimmung der Projectionen von Kräften auf irgend welche festgelegte Axen kommen bekanntlich nur die Stärken und Richtcosinus, nicht aber die Coordinaten ihrer Angriffspunkte in Betracht und Rechnung; folglich, gleichviel ob die Kräfte an einem Punkte oder an zwei fest verbundenen Punkten so oder so gerichtet wirken, gibt jedenfalls die Summe ihrer (algebraischen) Projectionen auf was immer für eine Axe die (algebraische) Projection ihrer Resultirenden.

Wählt man demnach im allgemeinen irgend welche drei, am vortheilhaftesten paarweis winkelrechte Axen — mögen sie sich schneiden oder kreuzen — zu Projectionsaxen; so vermag man aus den so kennen gelernten drei Projectionen der Resultirenden die Stärke und Richtcosinus oder Richtwinkel derselben zu berechnen, folglich hat man zu der so ermittelten Richtung der Resultirenden nur noch ihre Lage, also einen ihrer Punkte vermittelst seiner Coordinaten oder in einer sie enthaltenden Ebene den senkrechten Abstand derselben von einem gewissen Punkte zu bestimmen.

Sonach wird die Stärke und Richtung der Resultirenden zweier an einem Paar unwandelbar verbundener Punkte wirkender Kräfte, mit Hilfe des Projicirens derselben auf drei winkelrechte Axen, gerade so bestimmt, als befänden sich beide Kräfte an einem einzigen Punkte, oder als wären diese Kräfte zu sich selbst einstimmig parallel verbleibend und mit unveränderter Stärke, auf einen beliebigen Punkt übertragen worden.

II. Andererseits wird man einen beliebigen Punkt, am vortheilhaftesten den Ursprung der rechtwinkeligen Coordinaten, zum Mittelpunkt der Drehmomente der Kräfte feststellen und zu jeder gegebenen Kraft 1. ihre Momentenebene, 2. ihren Arm, 3. ihr Drehmoment und 4. die Halbaxe der Rechtsdrehung jener Kraft bestimmen und 5. auf diese am Momentenpunkte als neue Hilfskraft jenes Drehmoment als lineares Moment auflegen. Diese nun am Momentenpunkte ange-

Digitized by Google

brachten linearen Momente werden sodann mittels Projicirens auf drei winkelrechte Axen in ihr resultirendes lineares Moment zusammengesetzt; indem man nach einander a. dessen drei axiale Projectionen, b. seine Grösse (Stärke), c. die Richtcosinus seiner Halbaxe und d. endlich seine Momentenebene ermittelt.

III. Demzufolge kann man jede zwei, an einem Paar unwandelbar verbundener Punkte wirkenden Kräfte zunächst auf eine (vorläufig resultirte) Kraft und auf ein (vorläufig resultirtes) lineares Moment oder 1 Kräftepaar, dem es angehört, reduciren (zurückführen, -leiten); bei denen nur noch zu erforschen bleibt, ob sie zu einander gehören, also auf eine einzige Kraft zusammengezogen werden können, oder nicht. (§ 14).

IV. Bei dieser Forschung handelt es sich vor Allem darum, ob die Richtungen der bisher resultirten Kraft und des linearen Momentes auf einander senkrecht stehen, also die Bedingungsgleichungen (§ 14, 9, 10) erfüllt werden oder nicht.

Wenn nicht, was blos bei zwei gekreuzten Kräften eintreten kann, so sind Kraft und Moment nicht weiter zusammenziehbar, sondern nur durch andere mannigfaltig ersetzbar. Wenn ja, und jene Kraft $= 0$, was bei einem Kräftepaar allein eintritt, so kann das gefundene Moment durch unzählig viele Kräftepaare ersetzt werden; sonst aber, wo Kraft und Moment von Null verschieden sind, also bei 2 zusammen- oder gleichlaufenden Kräften, vereinen sie sich in eine bestimmte resultirende Kraft.

V. Demzufolge wird das in § 18 und 19 gelehrte allgemeine Verfahren der Zusammensetzung zweier an zwei verbundenen Punkten thätigen Kräfte auch für die uns nun bevorstehende Zusammensetzung beliebig vieler, an irgend einem Systeme starr verbundener Punkte wirkenden, Kräfte die Grundlage sein.

24.

Zusammensetzung beliebig vieler, an einem starren Systeme von Punkten in willkürlichen Richtungen wirkenden Kräften.

Bei solch einer Gruppe von Kräften setzen wir (ähnlich wie in § 4, dritter Fall) erst irgend welche 2 Kräfte und ihre linearen Momente in ihre Mittelkraft und ihr mittleres Moment zusammen; und verringern so die Anzahl der Kräfte und Momente um je eins. Mit dieser verringerten Anzahl von $\frac{\text{Kräften}}{\text{Momenten}}$ verfahren wir in gleicher

Digitized by Google

Weise zusammensetzend und verringernd, und eben so weiter mit jeglicher nach und nach zurückbleibenden Gruppe von Kräften, / Momenten, bis endlich auch die letzten zwei Kräfte / Momente in die Zusammensetzung mit einbezogen worden sind.

Weil nun bei der schrittweisen Zusammensetzung jedesmal zweier solcher Kräfte ihre Angriffspunkte (nach § 23, I) ausser aller Betrachtung bleiben, folglich diese Kräfte wie an einem einzigen Punkte wirkende (§ 4) zusammengesetzt werden; und da ferner die nach und nach hervorkommenden linearen Momente als Hilfskräfte ohnehin allesammt an dem nämlichen Momentenpunkte angebracht werden: so haben wir hier wie dort nur die Lehren des Zusammensetzens von Kräften an einem und demselben Punkte (§ 5) in Anwendüng zu bringen und sonach gilt (wie in § 4) der allgemeine Satz:

Die Projection der resultirenden Kraft / des resultirenden linearen Momentes beliebig vieler an einem starren Systeme von Punkten nach willkürlichen Richtungen wirksamen Kräfte auf was immer für eine Axe gleicht der Summe der Projectionen aller Kräfte / linearen Momente auf eben diese Axe.

Seien demnach

$$M, \quad M', \quad M'', \ldots .$$

irgend welche unwandelbar (starr, fest) mit einander zu einem Systeme verbundenen Stoffpunkte, deren auf rechtwinkelige Coordinatenaxen der x, y, z gemessene Coordinaten beziehungsweise

$$x, y, z; \quad x', y', z'; \quad x'', y'', z''; \ldots .$$

sind; und an ihnen mögen beliebig starke Kräfte

$$P, \quad P', \quad P'', \ldots .$$

nach Richtungen wirken, welche durch die auf die positiven Halbaxen der Coordinaten beziehlichen Richtcosinus

$$\alpha, \beta, \gamma; \quad \alpha', \beta', \gamma'; \quad \alpha'', \beta'', \gamma''; \ldots .$$

festgestellt werden.

Die Resultirende dieser Kräfte habe die Stärke R und die Richtcosinus a, b, c.

Projiciren wir nun sämmtliche jene gegebenen Kräfte auf die Coordinatenaxen, so seien die Summen ihrer Projectionen

Digitized by Google

$$(1) \;\ldots\ldots\ldots\; P\alpha + P'\alpha' + P''\alpha'' + \ldots. = X,$$
$$P\beta + P'\beta' + P''\beta'' + \ldots. = Y,$$
$$P\gamma + P'\gamma' + P''\gamma'' + \ldots. = Z,$$

dann sind, dem so eben aufgestellten Satze gemäss, die Projectionen der Resultirenden

$$(2) \;\ldots\ldots\ldots\; Ra = X, \quad Rb = Y, \quad Rc = Z$$

und geben für den Zahlwerth von R die Bestimmungsgleichung

$$(3) \;\ldots\ldots\ldots\; R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2,$$

wonach die fraglichen Richtcosinus aus

$$(4) \;\ldots\ldots\ldots\; a = \frac{X}{R}, \qquad b = \frac{Y}{R}, \qquad c = \frac{Z}{R}$$

berechnet werden und sohin nur noch die L a g e der, nach Stärke und Richtung bestimmten, Resultirenden, also das resultirende lineare Moment auszumitteln kommt.

Hiezu nehmen wir den Ursprung der Coordinaten zum gemeinsamen Mittelpunkte der zu bestimmenden Momente der Kräfte

$$P, \quad P', \quad P'', \ldots. R,$$

bezeichnen ihre Arme mit

$$p, \quad p', \quad p'', \ldots. r,$$

so dass ihre Drehmomente

$$pP, \quad p'P', \quad p''P'', \ldots. rR$$

werden, die zugleich die Grössen der linearen Momente der Kräfte angeben. Den Halbaxen dieser linearen Momente, d. i. den Halbaxen der Rechtsdrehung der Momentenebenen jener Kräfte, sollen die Richtcosinus

$$\lambda, \mu, \nu; \quad \lambda', \mu', \nu'; \quad \lambda'', \mu'', \nu''; \ldots. l, m, n$$

angehören und die Summe der axialen Projectionen der linearen Momente der gegebenen (zusammenzusetzenden) Kräfte mit L, M, N bezeichnet werden.

Demzufolge sind ihre Ausdrücke (nach § 13)

$$(5) \;\ldots\ldots\ldots\; L = pP.\lambda + p'P'.\lambda' + p''P''.\lambda'' + \ldots.$$
$$M = pP.\mu + p'P'.\mu' + p''P''.\mu'' + \ldots.$$
$$N = pP.\nu + p'P'.\nu' + p''P''.\nu'' + \ldots.$$

oder (nach § 15, 5 und § 17, 1)

Digitized by Google

$$(6).\quad \begin{aligned} L &= P(\gamma y-\beta z)+P'(\gamma' y'-\beta' z')+P''(\gamma'' y''-\beta'' z'')+\dots \\ M &= P(\alpha z-\gamma x)+P'(\alpha' z'-\gamma' x')+P''(\alpha'' z'-\gamma'' x'')+\dots \\ N &= P(\beta x-\alpha y)+P'(\beta' x'-\alpha' y')+P''(\beta'' x'-\alpha'' y'')+\dots \end{aligned}$$

und wenn wir nunmehr das resultirende lineare Moment $rR = K$ auf die drei Axen projiciren, werden seine Projectionen, wie in § 19, (6),

$$(7)\ \dots\quad \begin{aligned} rR.l &= K.l = R(c\eta-b\zeta) = Z\eta - Y\zeta = L, \\ rR.m &= K.m = R(a\zeta-c\xi) = X\zeta - Z\xi = M, \\ rR.n &= K.n = R(b\xi-a\eta) = Y\xi - X\eta = N; \end{aligned}$$

worin wieder (ξ, η, ζ) den laufenden Punkt der Richtungslinie der resultirenden Kraft R vorstellt.

Aus den letzten Gleichungen finden wir sofort für die absolute Grösse (Stärke) des resultirenden linearen Momentes K den Ausdruck

$$(8)\ \dots\dots\quad K^2 = L^2 + M^2 + N^2,$$

daher (wofern $K > 0$) die Richtcosinus seiner Halbaxe

$$(9)\ \dots\dots\quad l = \frac{L}{K}, \qquad m = \frac{M}{K}, \qquad n = \frac{N}{K},$$

womit also dieses resultirende lineare Moment vollständig bestimmt ist.

Sohin haben wir wieder sämmtliche gegebene Kräfte P, P', P'',... auf eine vorläufige resultirende Kraft R und auf ein vorläufiges resultirendes lineares Moment K zurückgebracht. — Man kann erstere kürzer nach Minding (Mechanik, 1838, Seite 43) die Mittelkraft und sohin letzteres das Mittelmoment des Kräftesystems nennen.*)

25.

Prüfung der Zusammengehörigkeit der vor der Hand gefundenen Kraft mit dem gefundenen linearen Momente.

Es bleibt uns noch zu untersuchen übrig, ob Moment und Kraft wie wir sie fanden in der That zu einander gehören, d. h., ob und wo jene vorläufige Resultirende — die Mittelkraft — in der Ebene des gefundenen resultirenden linearen Momentes — des Mittelmomentes — liege; welche Untersuchung wir nach § 14 und 17 auszuführen haben werden.

---

*) Die von französischen Gelehrten gebrauchten Benennungen: la force principale und le moment linéaire principal du système des forces dürften wohl kaum allgemein für angemessen erachtet werden.

Digitized by Google

Wie daselbst bewiesen wurde, ist hierzu erforderlich, dass die Richtung $(a \ b \ c)$ oder $(X \ Y \ Z)$ der Mittelkraft R auf der Richtung oder Halbaxe $(l \ m \ n)$ oder $(L \ M \ N)$ des Mittelmomentes K senkrecht stehe, folglich die Bedingungsgleichung (§ 17, 5)

$$(10) \ldots\ldots\ldots \quad XL + YM + ZN = 0$$

erfüllt werde; wonach (wie § 17, 4) die aus (7) folgenden Gleichungen

$$(11) \ldots\ldots\ldots \quad \begin{aligned} Z\eta - Y\zeta &= L \\ X\zeta - Z\xi &= M \\ Y\xi - X\eta &= N \end{aligned}$$

der Richtungslinie der schliesslichen eigentlichen Resultirenden R angehören.

Betrachten wir nun die hiebei möglichen Fälle einzeln, so erhalten wir folgende Schlussergebnisse.

Erster Fall, wo

$$R > 0, \quad K > 0$$

und

$$XL + YM + ZN = 0.$$

Da kommt das gegebene System von Kräften auf eine vollständig bestimmbare Kraft zurück.

Wenn wir nemlich nach den Ausdrücken (§ 24, 1) die Summen X, Y, Z der axialen Projectionen der Kräfte des Systemes und aus ihnen nach (3) die Kraft R; dann nach den Ausdrücken (5) oder (6) die Summen L, M, N der Projectionen der linearen Momente, und aus ihnen nach (8) das Moment K berechnet haben, und finden, dass obige drei Vergleichungen bestehen;

dann ist diese berechnete Kraft R die alleinige und bestimmte Resultirende des ganzen Systems der gegebenen Kräfte $P, P', P'', \ldots$;

die Richtung derselben bestimmen ihre nach (4) berechenbaren Richtcosinus a, b, c;

die Gleichungen dieser Richtung sind die Gleichungen (11);

und die Halbaxe der Rechtsdrehung ihrer Momentenebene wird durch deren nach (9) zu berechnende Richtcosinus l, m, n gerichtet.

Zweiter Fall, wo

$$R > 0 \quad \text{und} \quad K > 0$$

aber

$$XL + YM + ZN \gtrless 0.$$

Digitized by Google

Da kann das gegebene Kräftesystem nur auf eine Kraft und ein lineares Moment (Kräftepaar), oder auf zwei gekreuzte Kräfte zusammengezogen werden.

Denn wegen der dritten Ungleichung steht die Richtung $(X\ Y\ Z)$ der Mittelkraft R auf der Richtung $(L\ M\ N)$ des berechneten Mittelmomentes K nicht, wie es sein sollte, senkrecht sondern **schief**; deshalb gehören Kraft und Moment nicht zusammen. Dann aber kann dieses Moment durch irgend ein Kräftepaar $(Q, -Q)$, dem es angehört, in der Weise ersetzt werder, dass eine seiner Kräfte, $-Q$, mit jener Kraft R einen und denselben willkürlichen Angriffspunkt erhält, daher mit ihr zu einer neuen Kraft S sich zusammensetzt, welche dann mit der anderen Kraft Q ein Paar nothwendig gekreuzter Kräfte ausmacht, die das gegebene Kräftesystem als gleichwirkend vertreten.

Dritter Fall, wenn noch $R>0$, aber $K=0$ ist.

Da müssen (nach § 24, 8) die Projectionen des linearen Momentes K allesammt verschwinden, also

$$L=0,\quad M=0,\quad N=0$$

ausfallen, und folglich ist die Bedingung

$$(10) \ldots\ldots\ldots XL+YM+ZN=0$$

sicher erfüllt.

Hier ist die berechnete Kraft R die völlig bestimmte Resultirende des Kräftesystems und ihre Richtungslinie geht durch den Mittelpunkt der Momente.

Denn die Gleichungen (7) des § 24 geben den der Kraft

$$R=\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}$$

angehörigen **Arm**

$$r=0,$$

und die Gleichungen dieser Resultirenden

$$(12) \ldots\ldots\ldots \frac{\xi}{X}=\frac{\eta}{Y}=\frac{\zeta}{Z}.$$

Vierter Fall, wenn $R=0$, dagegen $K>0$ ist.

Da verschwinden (wegen (3) in § 24) die axialen Projectionen der Mittelkraft, nemlich es wird

$$X=0,\quad Y=0,\quad Z=0$$

und sohin ist die Bedingungsgleichung

Digitized by Google

(10 . . . . $XL + YM + ZN = 0$

gewiss erfüllt.

In diesem Falle kommt das gegebene Kräftesystem auf ein lineares Moment also auf irgend ein ihm entsprechendes Kräftepaar zurück.

Denn berechnet man (nach § 24, 5 oder 6) des Mittelmomentes K axiale Projectionen L, M, N, dann (nach § 24, 8) es selbst, und (nach § 24, 9) die Richtcosinus seiner Halbaxe; so braucht man nur wo immer auf einer so gerichteten Halbaxe die senkrechte Ebene aufzustellen und in sie ein Kräftepaar (Q, q) zu legen, dessen Kräfte die Stärke Q und ihren Arm q so bemessen haben, dass des Paares Moment $qQ = K$ ist, und natürlich diese ihre Ebene um jene Halbaxe rechts zu drehen streben. Jedes solche, mit dem Kräftesysteme fest verbundene Kräftepaar kann sohin als dessen Aequivalent angesehen werden.

Fünfter und letzter Fall, wo $R = 0$ und $K = 0$ ist, also sowohl die Summen X, Y, Z der axialen Projectionen der Kräfte als auch die Summen L, M, N der Projectionen der linearen Momente verschwinden.

Da herrscht zwischen den Kräften des gegebenen Systems Gleichgewicht.

Denn das Verschwinden der Kraft R lässt nach dem vierten Falle ersehen, dass sämmtliche gegebene Kräfte P, P', P'',... auf ein Kräftepaar zurückkommen; das Verschwinden des linearen Momentes K aber gibt zufolge des dritten Falles zu erkennen, dass dieses Kräftepaares Moment Null ist; mithin muss der Arm desselben Null sein, und sonach müssen seine beiden gleichen und entgegen gerichteten Kräfte in einer und derselben Geraden, an zwei starr verbundenen Punkten, wirken, folglich sich im Gleichgewicht erhalten.

Das Gleichgewicht des Kräftesystems erheischt demnach das gleichzeitige Verschwinden aller sechs Summen

$$X,\ Y,\ Z,\ L,\ M,\ N$$

axialer Projectionen.

Rückschau. Nachdem wir nun alle fünf hier möglichen Fälle erörtert haben; so ersehen wir, dass nur in dem Falle, wo das Productentrinom

$$XL + YM + ZN$$

Digitized by Google

nicht verschwindet (II. Fall) sämmtliche zusammenzusetzenden Kräfte höchstens auf zwei gekreuzte Kräfte zurückgebracht werden können; sonst aber, wo dieses Trinom verschwindet, alle vorhandenen Kräfte entweder in eine einzige Kraft sich zusammensetzen lassen (I. und III. Fall), oder auf ein Kräftepaar zurückkommen (IV. Fall), oder endlich einander das Gleichgewicht halten (V. Fall).

26.

Uebertragung des Mittelpunktes der Momente aus dem Ursprunge der Coordinaten in irgend einen anderen Punkt.

Wählen wir anstatt des Coordinatenursprungs irgend einen anderen Punkt $C(x_0\ y_0\ z_0)$ zum Mittelpunkte der Drehmomente und zum Angriffspunkte der linearen Momente, unter Beibehaltung aller früheren Voraussetzungen, Benennungen und Bezeichnungen.

Da nun finden wir für den Arm p und die Richtcosinus λ, μ, ν des linearen Momentes pP der Kraft $P(\alpha\ \beta\ \gamma)$ am Punkte $M(x\ y\ z)$ wie in (§ 21, Gleichungen 22 und 24), die bestimmenden Gleichungen und Proportionen

(1)

$$p^2=[\gamma(y-y_0)-\beta(z-z_0)]^2+[\alpha(z-z_0)-\gamma(x-x_0)]^2+[\beta(x-x_0)-\alpha(y-y_0)]^2$$
$$=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2-[\alpha(x-x_0)+\beta(y-y_0)+\gamma(z-z_0)]^2$$

(2)

$$\frac{\lambda}{\gamma(y-y_0)-\beta(z-z_0)}=\frac{\mu}{\alpha(z-z_0)-\gamma(x-x_0)}=\frac{\nu}{\beta(x-x_0)-\alpha(y-y_0)}=\frac{1}{p}$$

wobei wir zugleich p wie P absolut (oder positiv) nehmen.

Aehnliche Ausdrücke gelten natürlich auch für des Systems übrige Kräfte

$$P'(\alpha'\ \beta'\ \gamma'),\quad P''(\alpha''\ \beta''\ \gamma''),\ldots.$$

an den Punkten

$$M'(x'\ y'\ z'),\quad M''(x''\ y''\ z''),\ldots.$$

auf deren Verschiedenheit und Berücksichtigung sich die sogleich zu benützenden Summenzeichen Σ beziehen werden.

Digitized by Google

Projiciren wir jetzt die linearen Momente aller wirksamen Kräfte auf die Coordinatenaxen der x, y, z; und bezeichnen ihr vorläufig resultirendes lineares Moment oder (nach § 24) ihr **Mittelmoment** mit K_0, und die Richtcosinus seiner Halbaxe mit l_0, m_0, n_0; so finden wir die Projectionen dieses Mittelmomentes

$$(3) \quad \begin{aligned} K_0 l_0 &= \Sigma pP.\lambda = \Sigma P[\gamma(y-y_0)-\beta(z-z_0)] \\ K_0 m_0 &= \Sigma pP.\mu = \Sigma P[\alpha(z-z_0)-\gamma(x-x_0)] \\ K_0 n_0 &= \Sigma pP.\nu = \Sigma P[\beta(x-x_0)-\alpha(y-y_0)]. \end{aligned}$$

Entwickeln wir hierin die letzten zusammengesetzten Producte und setzen, in der Bedeutung der Ausdrücke (1), (5) und (6) des § 24, die Summen

$$(4) \quad \Sigma P\alpha = X, \quad \Sigma P\beta = Y, \quad \Sigma P\gamma = Z,$$

$$(5) \quad \begin{aligned} \Sigma P(\gamma y - \beta z) &= L, \\ \Sigma P(\alpha z - \gamma x) &= M, \\ \Sigma P(\beta x - \alpha y) &= N, \end{aligned}$$

so finden wir die einfacheren Ausdrücke

$$(6) \quad \begin{aligned} K_0 l_0 &= L - (Zy_0 - Yz_0) \equiv L_0, \\ K_0 m_0 &= M - (Xz_0 - Zx_0) \equiv M_0, \\ K_0 n_0 &= N - (Yx_0 - Xy_0) \equiv N_0, \end{aligned}$$

worin wir noch die drei Unterschiede oder die drei Projectionen des Mittelmomentes mit L_0, M_0, N_0 bezeichnen.

Da X, Y, Z die Projectionen der vorläufig resultirenden oder der **Mittelkraft** R bedeuten, so stellen die drei hierin subtrahirten Unterschiede (nach § 24, 7) die Projectionen des linearen Momentes rR dieser Mittelkraft vor, wenn man (Taf. I. Fig. 12) dieselbe Kraft R nach ihrer Richtung (a b c) den neuen Momentenpunkt $C(x_0\ y_0\ z_0)$ angreifen lässt, und ihren Momentenpunkt in den Coordinatenursprung O verlegt. Weil nun diese Unterschiede, als Projectionen des linearen Momentes rR, subtrahirt werden, hat man dasselbe nicht in seiner Richtung (l, m, n), sondern in der ihr entgegengesetzten ($-l$, $-m$, $-n$) aus O gehen zu lassen, um welche Halbaxe demnach die so verlegte Kraft R ihre Momentenebene OCR links (linkshin, rückläufig) zu drehen streben wird.

Digitized by Google

Setzt man nun am Coordinatenursprunge, als dem Anfangs- oder Angriffspunkte der linearen Momente, dieses lineare Moment

$$rR(Zy_0 - Yz_0, \quad Xz_0 - Zx_0, \quad Yx_0 - Xy_0)$$

mit dem bereits früher in Hinsicht auf den Coordinatenursprung als Momentenpunkt gefundenen Mittelmomente

$$K(L, M, N)$$

zusammen; so erhält man, laut der letzten drei projectivischen Gleichungen, der Grösse und Richtung nach das neue Mittelmoment K_0; welches man dann nur gleichgerichtet auf den neuen Momentenpunkt $C(x_0\, y_0\, z_0)$ zu übertragen braucht.

Ist insbesondere die Mittelkraft $R = 0$, das Mittelmoment K aber nicht; so ist auch $X = Y = Z = 0$, daher vereinfachen sich die Gleichungen (6) auf

(7) . . . . $L_0 = L, \quad M_0 = M, \quad N_0 = N,$

und sonach ist auch

$$K_0 = K.$$

Wenn demnach die Mittelkraft des Kräftesystems zu Null wird, folglich dieses System auf ein Kräftepaar sich zusammenzieht; so ist das Mittelmoment des Systems von der Lage des Momentenpunktes unabhängig.

27.

Die Projectionen der Mittelmomente auf die Richtung der Mittelkraft.

Bestimmt man die Winkel

$$\delta, \quad \delta_0,$$

welche die Richtungen (Halbaxen) der Mittelmomente

$$K(L, M, N), \quad K_0(L_0\, M_0\, N_0),$$

von denen jenes den Coordinatenursprung, dieses den gewählten Punkt $C(x_0\, y_0\, z_0)$ zum Momenten- oder Angriffspunkte hat, mit der Richtung der Mittelkraft

$$R(X, Y, Z)$$

Digitized by Google

machen; so findet man in bekannter Weise deren Cosinus

$$(8) \ldots\ldots\ldots\ldots \cos\delta = \frac{XL + YM + ZN}{RK}$$

und

$$\cos\delta_0 = \frac{XL_0 + YM_0 + ZN_0}{RK_0},$$

und wegen der Ausdrücke (6) der L_0, M_0, N_0

$$(9) \ldots\ldots\ldots\ldots \cos\delta_0 = \frac{XL + YM + ZN}{RK_0}.$$

Sonach ergeben sich die Projectionen der beiderlei Mittelmomente K, K_0 auf die Richtung der Mittelkraft R gleich, nemlich

$$(10) \ldots\ldots K_0 \cos\delta_0 = K \cos\delta = \frac{XL + YM + ZN}{R},$$

d. h.: Die Projection des Mittelmomentes eines Kräftesystemes auf die Richtung seiner Mittelkraft ist immer die gleiche, wo auch der Momentenpunkt angenommen werden mag. (Coriolis' Satz.)

28.

Kleinstes Mittelmoment. Ort seiner Momentenpunkte. Centralaxe.

I. Da sonach die Projection des allgemeinen Mittelmomentes, oder das Product $K_0 \cos\delta_0$, den von den Coordinaten x_0, y_0, z_0 seines Momentenpunktes C unabhängigen Werth

$$\frac{XL + YM + ZN}{R}$$

besitzt; so muss in jenem in dieser Hinsicht beständigen Producte, wenn sein zweiter Factor den möglich grössten Betrag 1 für $\delta_0 = 0$ erhält, sein erster Factor am kleinsten ausfallen.

Dasjenige Mittelmoment eines Kräftesystemes ist demnach das möglich kleinste, dessen Richtung zu jener der Mittelkraft gleichstimmig parallel ist.

Digitized by Google

Lassen wir daher, für $\delta_0 = 0$, K_1 das möglich kleinste Mittelmoment und L_1, M_1, N_1 seine axialen Projectionen vorstellen; so übergeht die Gleichung (10) in

$$(11) \ldots \quad K_1 = K_0 \cos\delta_0 = K \cos\delta = \frac{XL + YM + ZN}{R},$$

wodurch der Werth des kleinsten Mittelmomentes K_1 unmittelbar gegeben ist und für die Winkel δ, δ_0 der Richtungen der Mittelmomente K, K_0 mit der Richtung der Mittelkraft R die Bestimmungsgleichungen

$$(12) \ldots\ldots \quad \cos\delta = \frac{K_1}{K}, \qquad \cos\delta_0 = \frac{K_1}{K_0}$$

sich darbieten.

Zur Bestimmung der Projectionen L_1, M_1, N_1 erwägen wir, dass sie den Richtcosinus der Richtung des kleinsten Mittelmomentes K_1 proportionirt sind, die mit jener der Mittelkraft $R(X, Y, Z)$ übereinstimmt; folglich muss sich verhalten

$$(13) \ldots \quad \frac{L_1}{X} = \frac{M_1}{Y} = \frac{N_1}{Z} = \frac{K_1}{R} = \frac{XL + YM + ZN}{R^2}$$

und hiernach ist zugleich

$$(14) \ldots \quad XL_1 + YM_1 + ZN_1 = XL + YM + ZN$$

oder

$$(14') \ldots \quad (L - L_1)X + (M - M_1)Y + (N - N_1)Z = 0.$$

II. Es ist interessant, den (geometrischen) Ort aller Momentenpunkte des möglich kleinsten Mittelmomentes kennen zu lernen.

Bezeichnen wir hiezu die Coordinaten des dem kleinsten Mittelmomente $K_1(L_1, M_1, N_1)$ angehörigen Momentenpunktes mit x_1, y_1, z_1; so erhalten wir die sie verknüpfenden Gleichungen, indem wir in den Gleichungen (6) des § 26 die

$$L_0,\ M_0,\ N_0,\ x_0,\ y_0,\ z_0$$

in

$$L_1,\ M_1,\ N_1,\ x_1,\ y_1,\ z_1$$

vertauschen, sie also in

Digitized by Google

$$(15) \quad \begin{aligned} Zy_1 - Yz_1 &= L - L_1, \\ Xz_1 - Zx_1 &= M - M_1, \\ Yx_1 - Xy_1 &= N - N_1 \end{aligned}$$

umwandeln.

Diese Gleichungen geben mit X, Y, Z multiplirt zur Summe ihrer Producte, wegen (14′), die Identität $0 = 0$; mithin zieht jede von ihnen die beiden anderen nothwendig nach sich, und deshalb gibt es nicht blos einen einzigen solchen Punkt, sondern jedes Paar derselben Gleichungen stellt den Ort aller jener Momentenpunkte x_1, y_1, z_1 dar, denen das nemliche möglich kleinste Mittelmoment K_1 entspricht; welcher Ort sohin eine Gerade oder Axe ist, die nach Poinsot die Centralaxe des Kräftesystems genannt wird.

Die Momentenpunkte alle, denen das möglich kleinste Mittelmoment eines Kräftesystems entspricht, liegen demnach in einer bestimmten geraden Linie — der Centralaxe desselben.

Die Gleichungen der Centralaxe sind obige Gleichungen (15), wofern man in ihnen L_1, M_1, N_1 durch ihre aus (13) sich ergebenden Ausdrücke ersetzt denkt und x_1, y_1, z_1 als laufende Coordinaten ansieht.

29.

Eigenschaften der Centralaxe.

I. Denken wir uns zur Centralaxe ihre Parallele durch den Coordinatenursprung, so erhalten wir die Gleichungen der letzteren, indem wir in jenen (15) der ersteren die unveränderlichen zweiten Theile zu Null machen. Bezeichnen wir hiezu die laufenden Coordinaten dieser Parallellinie, wie sonst üblich, mit x, y, z; so hat sie die Gleichungen

$$Zy - Yz = 0, \quad Xz - Zx = 0, \quad Yx - Xy = 0$$

oder

$$\frac{x}{X} = \frac{y}{Y} = \frac{z}{Z},$$

aus denen sofort einleuchtet, dass diese Parallele, also auch die Centralaxe selbst, zur Richtung (X, Y, Z) der Mittelkraft R, daher auch zur Richtung (L_1, M_1, N_1) des kleinsten Mittelmomentes

Digitized by Google

K_1, parallel läuft; folglich liegt dieses Mittelmoment selbst in der Centralaxe und kann an jedem ihrer Punkte angreifend gedacht werden.

Multipliciren wir ferner die Gleichungen (15) des § 28 der Centralaxe der Ordnung nach mit x_1, y_1, z_1; so wird ihre Summe

(16) . . . . $(L-L_1)x_1+(M-M_1)y_1+(N-N_1)z_1=0,$

aus welcher Gleichung erhellet, dass die durch die Centralaxe und den Coordinatenanfang gehende Ebene die Richtcosinus ihrer Normalen zu den Unterschieden $L-L_1$, $M-M_1$, $N-N_1$ proportionirt hat.

Um den Gleichungen der Centralaxe die bekannte vortheilhafte Proportionenform zu ertheilen, bestimmen wir in ihr einen ausgezeichneten Punkt E, dessen Coordinaten ξ, η, ζ heissen mögen wonach wir jene Gleichungen zusammenhängend und symmetrisch wie folgt schreiben

(17) . . . . $\frac{x-\xi}{X}=\frac{y-\eta}{Y}=\frac{z-\zeta}{Z}.$

Zur Ausmittelung des erwähnten Punktes $E(\xi, \eta, \zeta)$ erwägen wir vor Allem, dass er auch in der vorhin gedachten Ebene (16) liegt, seine Coordinaten daher der Gleichung

$$(L-L_1)\xi+(M-M_1)\eta+(N-N_1)\zeta=0$$

Genüge leisten müssen, der wir auch die Gestalt

$$L\xi+M\eta+N\zeta=L_1\xi+M_1\eta+N_1\zeta$$

ertheilen können.

Nun bleibt es uns offenbar gestattet, die Coordinaten ξ, η, ζ dermassen zu wählen, dass das erste Trinom

(18) . . . . $L\xi+M\eta+N\zeta=0$

werde; weshalb auch das andere Trinom

$$L_1\xi+M_1\eta+N_1\zeta=0$$

oder wegen der Proportion (§ 28, 13) auch das ihm proportionale

(19) . . . . $X\xi+Y\eta+Z\zeta=0$

werden muss.

Digitized by Google

Zufolge dieser Gleichungen (18) und (19) liegt der fragliche Punkt $E(\xi, \eta, \zeta)$ in den zwei durch den Coordinatenanfang gehenden Ebenen, von denen die erstere auf der Halbaxe (L, M, N) des Mittelmomentes K, die letztere dagegen auf den parallelen Richtungen (X, Y, Z) der Mittelkraft R, des Mittelmomentes K_1 und der Centralaxe senkrecht steht; er ist sonach die Projection des Coordinatenursprungs auf die Centralaxe oder auch der Durchschnittspunkt der 3 Ebenen (16), (18) und (19). Dann ist die Strecke OE die Durchnittslinie beider letzteren Ebenen, und zugleich die kürzeste (und senkrechte) Zwischenweite der Halbaxe des Mittelmomentes K und der Centralaxe.

Die Coordinaten ξ, η, ζ werden wir demnach aus den zwei Gleichungen (18), (19) der beschriebenen Ebenen und aus der, einer der Glsichungen (15) der Centralaxe, etwa der ersten, nachgebildeten Gleichung

$$Z\eta - Y\zeta = L - L_1$$

zu bestimmen haben; und erhalten also

$$\frac{\xi}{YN-ZM} = \frac{\eta}{ZL-XN} = \frac{\zeta}{XM-YL} \mathrel{\substack{\therefore \\ =}} \frac{Z\eta - Y\zeta}{L(Z^2+Y^2)-X(ZN+YM)}$$
$$= \frac{L-L_1}{L(Z^2+Y^2+X^2)-X(ZN+YM+XL)} = \frac{L-L_1}{LR^2-L_1R^2}$$

oder endlich

$$(20) \quad . \; . \; . \; . \quad \frac{\xi}{YN-ZM} = \frac{\eta}{ZL-XN} = \frac{\zeta}{XM-YL} = \frac{1}{R^2}$$

welche Werthe wir in die Gleichungen (17) hinein zu schreiben oder zu denken haben.

II. Suchen wir endlich noch die Länge der Strecke $OE = \varrho$, so ist

$$\varrho^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2,$$

daher wegen der Gleichungen (20)

$$(21)$$
$$(\varrho R^2)^2 = (YN-ZM)^2 + (ZL-XN)^2 + (XM-YL)^2$$
$$= (X^2+Y^2+Z^2)(L^2+M^2+N^2) - (XL+YM+ZN)^2$$
$$= R^2(K^2 - K_1{}^2)$$

also in einfacherer Form

Digitized by Google

(22) . . . . $(\varrho R)^2 = K^2 - K_1^2$

oder endlich wegen des Ausdruckes § 28, (11)

(23) . . . . $\varrho R = K \sin \delta$

und

(24) . . . . $\varrho = \frac{K \sin \delta}{R}$.

Das hier auftretende Product ϱR lässt sich ansehen als das Drehmoment einer längs der Richtung (X, Y, Z) der Centralaxe wirksam gedachten Mittelkraft R um den Cordinatenanfang als Momentenpunkt am Arme ϱ; welches sohin als lineares Moment an diesem Momentenpunkte in die, auf der obigen Ebene (16) normale, Halbaxe der Rechtsdrehung gelegt zu denken kommt; weshalb diese seine Halbaxe auf der mit der Richtung der Centralaxe zusammen fallenden Halbaxe des kleinsten Mittelmomentes K_1 senkrecht steht.

Ertheilen wir sonach der Gleichung (22) die Form

(25) . . . . $K^2 = K_1^2 + (\varrho R)^2$

so lehrt sie uns, dass das Mittelmoment K in das kleinste Mittelmoment

$$K_1 = K \cos \delta$$

und in das darauf senkrechte lineare Moment

$$\varrho R = K \sin \delta$$

zerlegt werden könne; welche beiden (componirenden) Momente auch die Projectionen des Mittelmomentes K einerseits auf die Richtung der Mittelkraft R unter dem Winkel $(R, K) = \delta$, und andererseits auf deren senkrechte Ebene sind.

Schlussbemerkung.

Durch die voranstehende umständliche Erörterung, welcher jedoch der Vorwurf zu weiter Ausdehnung hoffentlich nicht mit Recht gemacht werden wird, dürfte entschieden der Beweis geliefert worden sein, dass in der analytischen Statik die ganze Lehre von der Zusammensetzung

Digitized by Google

eines Systems beliebig vieler, sei es an einem einzigen Punkte oder an einem starren Systeme von Punkten, nach willkürlichen Richtungen wirksamen Kräfte, nicht mittels der Darstellung dieser Kräfte durch proportionirte Strecken und des darauf gegründeten Parallelogramms oder Polygons der Kräfte, sondern lediglich mit Hilfe des algebraischen orthogonalen Projicirens dieser Kräfte und der ihnen entsprechenden, ebenfalls als eigenthümlich geschaffenen Hilfskräfte darstellbaren, linearen Momente, vollständig und wissenschaftlich gründlich durchgeführt werden kann.

II.

Sommation directe et élémentaire des quatrièmes puissances des *n* premiers nombres entiers.

Par

Monsieur *Georges Dostor*,
Docteur ès sciences
Professeur de mathématiques à Paris.

On voit aisément que

$$(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1) = (2n^2+3n+1)(3n^2+3n-1),$$
$$(n-1)(2n-1)(3n^2-3n-1) = (2n^2-3n+1)(3n^2-3n-1);$$

de plus on a

$$(2n^2+3n-1)(3n^2+3n-1) = 6n^4+15n^3+10n^2-1,$$
$$(2n^2-3n+1)(3n^2-3n-1) = 6n^4-15n^3+10n^2-1;$$

il vient, par conséquent, en retranchant et en multipliant par $\frac{n}{30}$:

Digitized by Google

(VII)

$$\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}-\frac{(n-1)n(2n-1)(3n^2-3n-1)}{30}=n^4.$$

Dans cette formule remplaçons n successivement par tous les nombres entiers depuis 1 jusqu' à n; nous obtenons:

$$1^4=\frac{1.2.3.5}{30},$$

$$2^4=\frac{2.3.5.17}{30}-\frac{1.2.3.5}{30},$$

$$3^4=\frac{3.4.7.35}{30}-\frac{2.3.5.17}{30},$$

$$4^4=\frac{4.5.9.57}{30}-\frac{3.4.7.35}{30},.$$

. . . .

$$(n-1)^4=\frac{(n-1)n(2n-1)(3n^2-3n-1)}{30}-\frac{(n-2)(n-1)(2n-3)(3n^2-9n+5)}{30},.$$

$$n^4=\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}-\frac{(n-1)n(2n-1)(3n^2-3n-1)}{30}.$$

Ajontons ces égalités membre à membre et supprimons, dans le second membre de l'égalité résultante, les termes en évidence qui s'entredétruisent; nous trouvons

(VIII)

$$1^4+2^4+3^4+4^4+\ldots+(n-1)^4+n^4=\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}.$$

Corollaire. Le second membre peut encore s'écrire:

$$\frac{1}{5}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\left[\frac{6n(n+1)}{2}-1\right]$$

ou

$$\frac{2(2n+1)}{5}\cdot\frac{n^2(n+1)^2}{4}-\frac{1}{5}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6};$$

par suite on a aussi

Digitized by Google

$$\begin{aligned} & 5(1^4+2^4+3^4+\ldots+n^4) \\ &= (1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2)[6(1+2+3+\ldots+n)-1] \\ &= 2(2n+1)(1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3)-(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2), \end{aligned}$$

ou encore

$$\text{(IX)} \ldots \ldots 6(1+2+3+\ldots+n)(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2)$$
$$= 2(2n+1)(1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3)$$
$$= (1^2+2^2+3^2+\ldots n^2)+5(1^4+2^4+3^4+\ldots+n^4);$$

c'est-à-dire que

La somme des n premiers nombres entiers, multipliée par la somme des carrés de ces nombres, est égale au tiers de la somme des cubes des mêmes n nombres multipliée par $2n+1$, ou est encore égale au sixième de la somme des carrés, augmenté des cinq sixièmes de la somme des quatrièmes puissances de ces n nombres.

Digitized by Google

III.

Aufsuchung der parallelen Drehaxen, für welche ein materielles Pendel die nämliche Schwingungszeit besitzt.

Von

Herrn Prof. Dr. *Eduard Zetzsche*
in Chemnitz.

(Aus den Protokollen der Section f. Physik und Chemie der naturwissenschaftl. Gesellschaft zu Chemnitz.)

Befindet sich der zur Masse $M = \Sigma(m)$ des durch sein eigenes Gewicht $G = Mg$ (worin g die Beschleunigung des freien Falls bedeutet) um eine horizontale Drehaxe D_1 schwingenden materiellen Pendels gehörige materielle Punkt m in der Entfernung r von der Drehaxe D_1, so hat er bei der Winkelbeschleunigung q des Pendels die Bahnbeschleunigung $p = qr$; zur Erzeugung dieser Beschleunigung aber ist die Tangentialkraft

$$t = mp = mqr$$

erforderlich, welche an m selbst, also in der Entfernung r von der Drehaxe D_1 wirkt und desshalb durch die in der Entfernung 1 von D_1 wirkende Kraft

$$t' = tr = mqr^2$$

ersetzt werden kann. Um der ganzen Masse M die Winkelbeschleunigung q zu ertheilen, muss man daher in der Entfernung 1 von D_1 die Tangentialkraft

$$\Sigma(t') = q\Sigma(mr^2) = qM\varrho_1^2$$

anbringen, wenn ϱ_1 den Trägheitshalbmesser der Masse $M = \Sigma(m)$ für die Drehaxe D_1 bezeichnet.

Digitized by Google

Macht nun die Strecke r, welche den Abstand des Punktes m von der Drehaxe D_1 misst, mit der Richtung der Schwerkraft, also auch mit der von m gelieferten beschleunigenden Kraft $k = mg$ den Winkel δ, so kommt von k nur die zu r normale Componente

$$k' = k \sin\delta = mg \sin\delta$$

für die Drehung um D_1 zur Wirkung; da aber die Kraft k', wenn sie aus der Entfernung r auf die Entfernung 1 von D_1 reducirt wird, die Kraft

$$k'' = k'r = mgr \sin\delta$$

liefert, so ergeben alle Massentheilchen für diese Drehung um D_1 die in der Entfernung 1 von D_1 wirkende beschleunigende Gesammtkraft

$$\Sigma(k'') = g\Sigma(mr \sin\delta).$$

Wählen wir nun die Drehaxe D_1 als Z-Axe eines dreimal rechtwinkeligen Coordinatensystems und legen die X-Axe parallel zur Richtung der Schwerkraft, so gleicht δ dem Winkel, welchen r mit der Ebene XZ macht. Dann ist also

$$y = r \sin\delta$$

der Abstand des Massentheilchens m von der XZ-Ebene, und es wird

$$\Sigma(k'') = g\Sigma(my) = g\eta_1\Sigma(m) = g\lambda_1 M \sin\delta_0,$$

wobei $\eta_1 = \lambda_1 \sin\delta_0$ den Abstand des Schwerpunktes S des Pendels von der XZ-Ebene, λ_1 den Abstand dieses Schwerpunktes von D_1 und δ_0 den Winkel zwischen λ_1 und der XZ-Ebene bedeutet. Die Gleichgewichtslage des Pendels ist durch $\eta_1 = 0$ gegeben.

Aus $\Sigma(t') = \Sigma(k'')$ ergiebt sich sodann als Winkelbeschleunigung des erforderlichen materiellen Pendels

$$q = \frac{g\lambda_1 \sin\delta_0}{\varrho_1^2}.$$

Für ein einzelnes Massentheilchen m' in der Entfernung e_1 von der Drehaxe D_1 wäre beim Ausschlag δ_0 die Bahnbeschleunigung $q'e_1$, die erforderliche beschleunigende Kraft $m'q'e_1$; demnach

$$q' = \frac{g \sin\delta_0}{e_1}.$$

Das einfache Pendel, welches bei gleicher Anfangsgeschwindigkeit mit dem materiellen in der Schwingungszeit übereinstimmt, muss also die Länge e_1 haben, und es ist dabei $q = q'$ zu setzen; daraus ergiebt sich

$$e_1 = \frac{\varrho_1^2}{\lambda_1}.$$

Digitized by Google

Ist ferner ϱ_0 der Trägheitshalbmesser des materiellen Pendels für die zu D_1 parallele Schweraxe D_0, so ist

$$\varrho_1^2 = \varrho_0^2 + \lambda_1^2,$$

und ϱ_1 ist constant, sobald λ_1 constant ist, d. h.

dasselbe materielle Pendel hat für alle zu D_0 oder D_1 parallele und in gleichem Abstande (λ_1) vom Schwerpunkte S, also für alle auf dem Mantel eines geraden Kreis-Cylinders, dessen Axe mit der Schweraxe D_0 zusammenfällt, liegende Drehaxen D_1 die nämliche Schwingungszeit.

Das Maximum der Winkelbeschleunigung q und zugleich das Minimum der Schwingungszeit oder der Pendellänge e_1 erscheint bei $\lambda_1 = \varrho_0$.

Für eine andere zu D_1 parallele Drehaxe D_2 in der Entfernung λ_2 vom Schwerpunkte S erhält man, wenn ϱ_2 der Trägheitshalbmesser des Pendels für D_2 ist, in gleicher Weise

$$e_2 = \frac{\varrho_2^2}{\lambda_1};$$

sollen nun die Schwingungszeiten für die Axen D_1 und D_2 gleich gross sein, so wird

$$e_1 = e_2,$$

$$\frac{\varrho_0^2 + \lambda_1^2}{\lambda_1} = \frac{\varrho_1^2}{\lambda_1} = \frac{\varrho_2^2}{\lambda_2} = \frac{\varrho_0^2 + \lambda_2^2}{\lambda_2},$$

$$\lambda_2(\varrho_0^2 + \lambda_1^2) = \lambda_1(\varrho_0^2 + \lambda_2^2),$$

$$(\lambda_2 - \lambda_1)(\varrho_0^2 - \lambda_1\lambda_2) = 0$$

sein, oder (weil $\lambda_2 - \lambda_1 = 0$ nichts Neues liefert) es muss

$$\varrho_0^2 = \lambda_2\lambda_1$$

sein, und daraus findet sich weiter

$$e_1 = \frac{\varrho_0^2 + \lambda_1^2}{\lambda_1} = \frac{\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1^2}{\lambda_1} = \lambda_2 + \lambda_1, \text{ d. h.}$$

wenn das Pendel für zwei parallele Drehaxen D_1 und D_2, welche nicht auf derselben geraden Kreiscylinderfläche um eine durch den Schwerpunkt S des Pendels gelegte, zu D_1 und D_2 parallele Axe D_0 liegen, gleiche

Digitized by Google

Schwingungszeit besitzt, so ist die Summe der Abstände λ_1 und λ_2 der Achsen D_1 und D_2 vom Schwerpunkte S als Länge des dem materiellen Pendel entsprechenden einfachen Pendels zu nehmen.

Für $\lambda_1 = \varrho_0$ wird auch

$$\lambda_2 = \varrho_0 = \lambda_1,$$

$$\varrho_1^2 = 2\lambda_1^2 = \varrho_2^2,$$

$$e_1 = 2\lambda_1$$

und

$$e_2 = 2\lambda_2;$$

es fallen also dann die beiden, sonst concentrischen Cylinderflächen vom Halbmesser λ_1 und λ_2 in eine zusammen.

Weicht λ_1 nur wenig von ϱ_0 ab, so ist λ_1 auch nicht sehr von λ_2 verschieden, und dann ist bei Aufsuchung des zum Aufhängepunkte D_1 gehörigen und mit D_1 und S in einer (zu den Axen D_1 und D_2 senkrechten) Geraden liegenden Schwingungspunktes D_2 Vorsicht nöthig (vergl. Poggendorff's Annalen, Bd. 134, S. 621).

Besteht man bei der Aufsuchung des Schwingungspunktes nicht darauf, die Länge $e = \lambda_1 + \lambda_2$ des dem materiellen Pendel entsprechenden einfachen Pendels in der bequemsten Weise zu finden, nämlich so, dass λ_1 und λ_2 in derselben geraden Linie, von S aus nach verschiedenen Seiten hin, neben einander liegen, so kann man den Begriff des Schwingungspunktes erweitern, und hat dann unter dem Schwingungspunkte nicht einen Punkt zu verstehen (wie unter dem Schwerpunkte), auch nicht eine gerade Kreis-Cylinderfläche um D_1 (wie unter dem am Ende des Trägheitshalbmessers ϱ_1 liegenden Massenmittelpunkte), sondern eine gerade Kreis-Cylinderfläche um die zu D_1 parallele Schweraxe D_0. Dann haben aber auch alle auf derselben geraden Kreis-Cylinderfläche um D_0 liegende Drehaxen D_1 einen gemeinschaftlichen Schwingungspunkt D_2.

Digitized by Google

IV.

A.

Ueber die Bestimmung des Leitungswiderstandes der Flüssigkeiten.

Von

Herrn Dr. *Külp*,

Assistenten der Physik am grossherzogl. Polytechnikum in Darmstadt.

Ein einfaches Verfahren, den Leitungswiderstand der Flüssigkeiten unabhängig von der galvanischen Polarisation zu ermitteln, ist folgendes. Es besteht für eine Kette von drei Zinkeisenelementen unter Einschaltung der Tangentenbussole und einer Flüssigkeitssäule der Ausdruck:

$$S = \frac{e_I + e_{II} + e_{III} - P}{w_I + w_{II} + w_{III} + g + x},$$

wenn e_I, e_{II} und e_{III} die electromotorischen Kräfte; w_I, w_{II} und w_{III} ihre Widerstände, g den Widerstand in der Bussole, P die Stärke der Polarisation und x den Widerstand der eingeschalteten Flüssigkeitssäule bedeuten. Wird der Kürze wegen:

$$e_I + e_{II} + e_{III} = E$$

und

$$w_I + w_{II} + w_{III} + g = W$$

gesetzt, so geht die obige Relation in die nachstehende über:

Digitized by Google

$$S = \frac{E-P}{W+x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{I.}$$

Schalte ich jetzt einen Neusilberdraht von der Länge l — die Dämpfungslänge — ein, der die Stromstärke S auf $\frac{S}{n}$ herabdrückt, so hat für diesen Fall die Gleichung:

$$\frac{S}{n} = \frac{E-P}{W+x+l} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{II}$$

Gültigkeit.

Aus den Gleichungen I und II erhält man durch Elimination von $(E-P)$, Reduction und Auflösung in Bezug auf x die Relation:

$$x = \frac{l+W(1-n)}{n-1},$$

welche für $n = 2$ in:

$$x+W = l \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{III}$$

übergeht; d. h. der Leitungswiderstand der Flüssigkeitssäule vermehrt um den Gesammtwiderstand — Dämpfungslänge — der Kette ist gleich der Länge des Neusilberdrahtes (Dämpfungslänge), welcher im Stande ist, die Stromstärke S auf $\frac{S}{2}$ zurückzuführen.

Um W zu bestimmen, damit x für sich bekannt, so wird aus Gleichung I, wenn die Flüssigkeitssäule weggenommen, $P = 0$ und $x = 0$, folglich:

$$S_1 = \frac{E}{W} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{IV.}$$

Wird wieder Neusilberdraht von der Länge l_1 eingeschaltet, welcher S_1 auf $\frac{S_1}{n}$ zurückführt, so ist:

$$\frac{S_1}{n} = \frac{E}{W+l_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{V.}$$

Aus IV und V erhält man:

$$W = \frac{l_1}{n-1},$$

und für $n = 2$:

Digitized by Google

$$W = l_1,$$

d. h. der Gesammtwiderstand in der Kette ist gleich der „Dämpfungslänge“.

Die Dämpfungslänge ist die Länge Neusilberdraht, welche eine vorhandene Stromstärke auf den n^{ten} Theil, bei meinen Versuchen auf die Hälfte, ihrer Stärke schwächt.

Nach dieser Bestimmung von l_1 ist:

$$x = l - l_1;$$

d. h. gleich dem Unterschiede beider Dämpfungslängen.

Das Glasgefäss meines Apparates war mit Schwefelsäure von 1,81 spec. Gewichte angefüllt, und die Platinplatten von 39 mm. Breite — im Abstande 2,3 cm. — tauchten 14 mm. tief in die Flüssigkeit ein. Die Stromstärke 7° 45′, welche die Kette unter diesen Umständen gab, wurde alsdann an der Bussole abgelesen. Ein Neusilberdraht von 2291 cm. Länge und 1,53 □mm. Querschnitt musste eingeschaltet werden, um die Stromstärke auf $\frac{S}{2}$ zurückzubringen, welche einem Ablenkungswinkel von 3° 53′ — dem halben Tangentenwerth — angehörte. Hiernach war:

$$x = 2291 - W.$$

Um W zu finden, so wurde die Flüssigkeitssäule aus dem Schliessungskreise entfernt, und die Ablenkung von Neuem — welche hier 72° 30′ war — abgelesen; ein Neusilberdraht von 222 cm. Länge brachte die Stromstärke auf 57° 45′ zurück, da diese Ablenkung dem halben Tangentenwerth entsprach; hierdurch wird:

$$x = 2291 - 222 = 1969.$$

Der Leitungswiderstand der Schwefelsäure ist nach diesen Messungen:

$$\frac{546 \times 1969}{1{,}53 \times 2{,}3} = 305505$$

mal grösser als der des Neusilbers, oder 2749545 mal grösser als der des Kupfers.

Digitized by Google

B.

Vergleichung des Leitungswiderstandes eines Metalldrahtes und einer Flüssigkeitssäule.

Von

Herrn Dr. *Külp*,

Assistenten der Physik am grossherzogl. Polytechnikum in Darmstadt.

Die Formel II auf Seite 78:

$$\frac{S}{n} = \frac{E-P}{W+x+l}$$

gibt auch darüber Aufschluss, warum ein Metalldraht einer Flüssigkeitssäule in einem galvanischen Schliessungskreise nicht allgemein äquivalent sein kann. Denn ist L der Widerstand eines mit der Flüssigkeit äquivalenten Drahtes, so besteht die weitere Gleichung:

$$\frac{S}{n} = \frac{E}{W+L+\varrho},$$

in welcher ϱ die bestimmte Drahtlänge darstellt, welche die Stromstärke $\frac{S}{n}$ vollständig herbeiführt. Die Gleichheit der Ströme liefert alsdann:

$$\frac{E}{W+L+\varrho} = \frac{E-P}{W+x+l},$$

mithin:

$$L = \frac{E(x+l+\varrho)+PW}{E-P}$$

welcher Ausdruck, sobald E oder P oder beide Grössen sich ändern, für L immer verschiedene Werthe liefert. Soll L constant bleiben, dann muss $P = 0$ sein, d. h. man muss eine solche Flüssigkeit wählen, dass jede Ablagerung fremder Körper auf den Polplatten nicht stattfinden kann, was bei Kupfervitriollösung und Kupferplatten als Polplatten der Fall ist.

Digitized by Google

V.

Ein Apparat zur mechanischen Lösung der nach Pothenot, Hansen u. A. benannten geodätischen Aufgaben.

Von

Herrn Professor Dr. *Carl Max Bauernfeind*,
Director der Königl. polytechnischen Schule in München.

(Nach eingeholter Erlaubniss aus den Abhandlungen der k. bayerischen Akademie der Wissenschaften II. Cl. XI. Bd. 1. Abth. abgedruckt.)

(Figuren s. Taf. II. und Taf. III.)

Wenn es Aufgabe der Geodäsie ist, die gegenseitige Lage von Punkten der Erdoberfläche zu bestimmen, so muss ihr jedes Hilfsmittel, welches diese Bestimmung erleichtert oder abkürzt, willkommen sein, und um so mehr dann, wenn mit diesen Vortheilen in vielen Fällen zugleich eine grössere Genauigkeit der Arbeit erreicht wird. Der hier zu beschreibende Apparat ist ein solches Hilfsmittel, da er die direkte Lösung der oben bezeichneten Aufgaben ohne jede Construction durch sofortige Verzeichnung von Kreisen möglich macht, welche entweder durch drei gegebene Punkte gehen oder über einer Sehne von gegebener Länge einen bestimmten Peripheriewinkel fassen.

Die Erfindung dieses Apparats beruht auf der Umkehrung des geometrischen Satzes, dass in einem Kreise alle auf dem nämlichen Bogen stehenden Peripheriewinkel einander gleich sind. Es wird demnach auch der Scheitel eines festen Winkels, dessen Schenkel an den Endpunkten einer Sehne hingleiten, einen Kreis beschreiben, und da, wenn drei Punkte gegeben sind, immer einer als Scheitel dieses

Digitized by Google

Winkels angesehen werden kann, während die Verbindung der beid anderen als Sehne erscheint, so folgt von selbst, dass die Lösung d Aufgabe: durch drei gegebene Punkte einen Kreis zu legen, leic darauf zurückgeführt werden kann: über einer gegebenen Sehne ein Kreisbogen zu beschreiben, welcher einen bestimmten Peripheri winkel fasst.

Aus der hier dargelegten Idee der Erfindung ergibt sich, da der in Rede stehende Apparat im Allgemeinen die Gestalt ein Zirkels haben muss, dessen Schenkel sich auf jeden Winkel einstelle lassen und der nicht, wie der gewöhnliche Zirkel, in vertikaler Ste lung, sondern in horizontaler Lage gebraucht wird. Und da dies Zirkel zunächst für die Lösung der Pothenot'schen Aufgabe, welcl auch unter dem Namen „Rückwärtseinschneiden auf drei Punkte" b kannt ist, erfunden wurde und zur Lösung aller geodätischen Au gaben dient, welche unter den Begriff des Einschneidens fallen, s kann man ihn füglich „Einschneidezirkel" nennen, wie von nu an geschehen soll.

Dieser Zirkel ist nach dem für die geodätische Sammlung de hiesigen k. polytechnischen Schule aus Stahl *) hergestellten Exemplar in Fig. 1 perspektivisch und in Fig. 2 geometrisch in halber natür licher Grösse abgebildet, und es sind in beiden Figuren gleiche Theil mit gleichen Buchstaben bezeichnet.

Die beiden Schenkel *A* und *B* bewegen sich in dem Gewinde wie die Schenkel eines gewöhnlichen Zirkels und können nach Aus lösung der unendlichen Schraube *s* durch grobe Drehung in all möglichen Lagen zwischen 0 und 250⁰ gebracht werden. Ist durc diese Drehung die erforderliche gegenseitige Neigung der Winke schenkel nahezu erreicht, so kann man mit der nunmehr wieder ei greifenden Schraube *s* den Schenkel *B* gegen *A* fein bewegen und den Zirkel auf einen gegebenen Winkel genau einstellen.

Die erwähnte Auslösungsvorrichtung *D* ist sehr einfach. Auf d mit dem Schenkel *B* fest verbundenen Platte *ae* (Fig. 1) befind sich nämlich zwei Drehpunkte: einer (*a*) für die Schraube, e anderer (*b*) für den Hebel *c*, und ausserdem zwei Federn: eine (*d*)

*) Für die genannte Sammlung ist der Einschneidezirkel auch in Mess ausgeführt worden. Ich finde zwischen beiden Ausführungen bis jetzt kei wesentlichen Unterschied; nach längerem Gebrauch mögen indessen die mes genen Schenkel durch die Reibung an den Anschlagnadeln sich etwas m abnützen als die von Stahl, wesshalb dieses härtere Metall vorzuziehen dürfte.

Digitized by Google

den Hebel in der Auslösungsstellung mittels einer Nase zurückzuhalten und eine andere (*e*) zum Andrücken der Schraube gegen den mit einem entsprechenden Gewinde versehenen Rand des Zirkelkopfs bei der Einlösungsstellung.

Um die Wirkungsweise dieser Vorrichtung noch anschaulicher zu machen, dient die schematische Fig. 3. In derselben stellen die ausgezogenen Linien die durch Anziehen des Hebels *c* gegen den Zirkelkopf bewirkte Auslösung und die punktirten Linien die durch Niederdrücken der Feder *d* hervorgerufene Einrückung der Schraube *s* vor: bei der Auslösung bewegt sich die Schraube um den Winkel $kak' = \alpha$ vom Kopfrande weg, und bei der Einrückung kommt sie diesem Rande um gleichviel wieder näher, um in dessen Gewinde einzugreifen.

Damit man auf dem Felde den Zirkel sofort auf einen durch Signale bezeichneten Winkel genau einstellen kann, befindet sich auf jedem Schenkel ein Diopter. Diese Absehen haben das Ocular *o*, welches entweder ein kleines Loch (Fig. 1) oder eine scharfe Kante (Fig. 4) ist, gemeinsam. Die Kante *o*, welche nur bei stark geneigtem Boden zum Visiren benützt wird, und ebenso der Mittelpunkt des kreisrunden Oculars fallen selbstverständlich mit der Zirkelaxe zusammen, und das letztere Ocular muss jedesmal in die Richtung gedreht werden, nach der visirt werden soll: zuerst also in die Richtung des Schenkels *A* mit dem Diopterflügel *f*, und dann in die des Schenkels *B* mit dem Diopterflügel *g*. Die Visirebenen *of* und *og* schneiden sich beide in der Axe des unten in eine feine Spitze *p* ausgehenden Zirkelgewinds und jede läuft in dem Abstande einer halben Nadeldicke der anliegenden inneren genau abgeschliffenen Seitenfläche eines der Schenkel *A* und *B* parallel. (Nach gemachtem Gebrauche werden die Diopterflügel auf diese Schenkel niedergeklappt).

Eine für den Einschneidezirkel unentbehrliche Hilfsvorrichtung sind die Anschlagnadeln (*m*, *n*), welche in den Endpunkten der Sehne, worüber ein Kreis mit gegebenem Peripheriewinkel (*mpn*) zu beschreiben ist, senkrecht auf das Zeichnungsbrett gestellt werden müssen, damit an ihnen die Zirkelschenkel hingleiten und sich drehen können. Diese Nadeln (feinste englische Nähnadeln) stecken in kleinen senkrechten Messingcylindern (*i*, *i*) und ragen unten etwa 3, oben 10 Millimeter über deren Grundflächen hervor. Auf den oberen Grundflächen ruhen die Zirkelschenkel, wenn ein Kreis beschrieben wird. Aus der Bedingung, dass diese Schenkel sowohl bei diesem Geschäfte, als bei der Winkelaufnahme der Zeichnungstafel parallel sein müssen, ergibt sich die Forderung gleicher Höhe der Cylinder *i*,

Digitized by Google

der elfenbeinernen Füsse *h* und des den Kreis beschreibend
Stiftes *p*.

Für einen andern, mit der Verzeichnung von Kreisen nicht z
sammenhängenden und später näher zu erörternden Zweck sind d
Zirkelschenkel von ihrer Drehaxe aus in halbe Centimeter eingethei
diese Eintheilung dient nämlich in Verbindung mit der Winkelmessu
zur systematischen Aufstellung des Messtisches über einem gegeben
Punkt und nach einer gegebenen Richtung.

Der Einschneidezirkel ist in ein Gehäuse eingeschlossen, das de
eines gewöhnlichen Zirkels gleicht: für den hier beschriebenen Appar
ist es 26^{cm} lang, 5^{cm} breit und 3^{cm} dick; es lässt sich also leic
verpacken und transportiren. Die Kosten eines stählernen Einschneid
zirkels mit Etui berechnet der am geodätischen Institute der hiesig
polytechnischen Schule angestellte Mechaniker Heinrich May
mit 21 fl. oder 12 Thlr.

Die Prüfung des Einschneidezirkels hat sich über folgende Punk
zu erstrecken:

1) ob die inneren Wände der Winkelschenkel genau eben un senkrecht zu den oberen Wänden sind;

2) ob die durch die oberen Schenkelflächen gebildete Instru mentenebene der durch die Füsse und den Zeichenstift be stimmten Unterlagsebene parallel ist;

3) ob die Visirebenen zur Instrumentenebene senkrecht stehe und den anliegenden inneren Zirkelwänden parallel laufen;

4) ob das Ocular des Diopters in der Axe des Zirkelgewinde liegt;

5) ob die Anschlagnadeln auf ihren Cylindern senkrecht stehe und diese die richtige Höhe haben.

Was die erste dieser fünf Untersuchungen betrifft, so kann si
mit bekannten mechanischen Hilfsmitteln leicht ausgeführt werden
es wird sich aber kaum jemals ein erheblicher Fehler in dieser Be
ziehung ergeben, da die Herstellung von parallelepipedischen Stäbe
zu den elementarsten und am meisten geübten Arbeiten des Mechani
kers gehört.

Die zweite Untersuchung führt man in derselben Weise mit Hilf
von Dioptern auf einem Messtischblatte aus, wie die Prüfung de
Spiegelsextanten in Bezug auf die Forderung, dass die Visirlinie de
Fernrohrs der Sextantenebene parallel sein soll. Ein allenfallsige

Digitized by Google

Fehler würde sich durch Abschleifen der Stützen des untersuchten Instrumentes beseitigen lassen.

Die dritte Untersuchung zerfällt in zwei Theile, von denen der erste (ob die Visirebenen senkrecht zur Instrumentenebene stehen) von der gleichnamigen Prüfung eines Diopters sich nicht unterscheidet, während der zweite Theil (ob die Visirebenen den anliegenden inneren Schenkelflächen parallel laufen) sich in genügender Weise dadurch erledigen lässt, dass man die Schenkel des Zirkels, soweit es die Diopterflügel gestatten, an einander legt nnd zusieht, ob erstens die inneren Schenkelflächen überall gleichweit (um die Nadeldicke) von einander abstehen, und ob zweitens die vereinigten Visirebenen der Diopter den Schlitz zwischen den Zirkelschenkeln halbiren. Ein durch diese Untersuchungen festgestellter Fehler wird an den Diopterflügeln verbessert.

Ob viertens das Diopter-Ocular in der Axe des Zirkelgewinds liegt, d. h. ob keine Excentricität der Visirlinie stattfindet, kann man wie folgt untersuchen. Es sei F in Fig. 5 das Objectiv eines Diopters, O dessen Ocular, A die Axe des Zirkelgewinds und OFG die Visirlinie nach einem Gegenstand G. Die Spitze A werde in das Papier des Messtisches gedrückt. Dreht man das Ocular O in der Axe A um 180^0, so kommt es zunächst nach O; stellt man aber damit auf G ein, so muss es um den Winkel $O'FO = 2\delta$ gedreht werden, wodurch die Spitze A nach A' kommt. Wird dieser Punkt wieder markirt, so zeigt der Abstand AA' die doppelte Excentricität $e = AO$ an. Eine solche Excentricität lässt sich nur durch ein neues Ocular verbessern, ihr Einfluss aber sofort aus dem Dreiecke AOF berechnen, worin die eine Seite AO die Excentricität e des Oculars und die andere AF die Länge l des Diopters ist. Für $e = \frac{1}{4}^{\text{mm}}$ und $l = 25^{\text{cm}} = 250^{\text{mm}}$ wäre $\delta = 206'' = 3'\,26''$; ein solcher grober Fehler wird aber wohl von keinem Mechaniker begangen werden.

Die fünfte Anforderung kann in der Praxis ebenfalls sehr leicht erfüllt werden; ob es geschehen wird theils nach Nr. 2, theils dadurch untersucht, dass man zusieht, ob die Nadel mit ihrem durch die obere Cylinder-Endfläche erzeugten Spiegelbilde in einer Geraden liegt oder nicht. Ein geneigtes Spiegelbild würde auf eine schiefe Stellung der Nadel deuten und deren erneute verbesserte Einsetzung in den Metallcylinder fordern.

Wir gehen nun zur Anwendung des als vollständig berichtigt vorausgesetzten Einschneidezirkels über.

Digitized by Google

1. Mechanische Lösung der Pothenot'schen Aufgabe.

Die Aufgabe, um deren mechanische Lösung es sich hier hande rührt bekanntlich nicht von Pothenot, nach dem sie benannt wir sondern von Snellius, dem Entdecker des Lichtbrechungsgesetzes u Erfinder der Triangulation her. Gleichwohl behalten wir den einm üblichen Namen bei, da er bei dem Fachmanne sofort die Vorstellu weckt, welche unserer Aufgabe enrspricht, die Vorstellung nämlic dass die Lage eines Punktes D aus der bekannten Lage drei anderen Punkte A, B, C zu bestimmen ist. Die Pothenot'sche Au gabe ist eine der wichtigsten in der praktischen Geometrie und h desshalb eine grosse Literatur hervorgerufen; am meisten beschä tigten sich die Geometer mit ihrer Lösung auf graphischem Weg In diesem Falle lässt sich die vorliegende Aufgabe auch so au sprechen: es soll (Fig. 6) auf dem Messtische ein Viereck $abcd$ co struirt werden, welches einem Vierecke $ABCD$ in der Natur ähnlic ist, von dem die Seiten AB, BC und die Winkel $ADB = \mu$ un $BDC = \nu$ bekannt sind.

Die einfachste graphische Lösung der vorliegenden Aufgabe geh aus der Betrachtung hervor, dass der Punkt D durch die zwei Seh winkel μ und ν, unter denen die Seiten AB und BC des Dreieck ABC von ihm aus erscheinen, charakterisirt ist: kein anderer Punk gibt gleichzeitig dieselben zwei Sehwinkel, den seltenen Fall ausge nommen, dass D mit A, B, C auf einem Kreise oder in eine Geraden liegt. Man wird daher einen geometrischen Ort des Punkte d auf dem Messtische erhalten, wenn man über ab als Sehne eine Kreis beschreibt, der den Peripheriewinkel μ fasst; ein zweite geometrischer Ort des Punktes d ist ein Kreis über bc, welcher durc den Peripheriewinkel ν bedingt ist. Da nun der Punkt d auf diese beiden Kreisen liegen muss, so kann er sich nur in ihrem Durch schnitt befinden, und er lässt sich folglich finden, wenn man auf der Felde die Winkel μ, ν misst und dann die beiden Kreise abd und bcd construirt.

Dieses einfache direkte Verfahren, den Punkt d zu finden, wird aber bekanntlich nicht angewendet, weil man auf dem Messtische keine umständlichen Constructionen ausführen will und auch der Fall ein treten kann, dass der Mittelpunkt eines zu beschreibenden Kreises über das Messtischblatt hinausfällt, wodurch das Ziehen dieses Kreises unmöglich wird. Mein Einschneidezirkel soll diesem direkten Verfahren in der Praxis Geltung verschaffen, indem er gestattet, ohne

Digitized by Google

jede Construction die geometrischen Oerter von d zu zeichnen und folglich auch den Punkt d selbst zu bestimmen.

Es sei der Messtisch, welcher das dem Dreieck ABC (Fig. 7) ähnliche Bilddreieck abc enthält, über dem Punkte D horizontal aufgestellt und auf ihn dieser Punkt mit der Lothgabel nach d' projicirt. Auf diesen Punkt d' stelle man die Zirkelspitze p, öffne den Zirkel mittelst der groben Drehung nahezu um den Winkel ADB und stelle mit der Schraube die Diopter genau auf A und B ein. Damit ist also der Winkel μ gemessen. Befestigt man nun in a und b die Anschlagnadeln, so kann man mit dem Zirkel, indem man die Schenkel sanft an a und b andrückt, den Kreis adb beschreiben. Misst man hierauf in gleicher Weise den Winkel $\nu = BDC$ und beschreibt über bc den Kreis bdc, so gibt der Schnitt dieses Kreises mit adb den gesuchten Punkt d und damit das Viereck $abcd$, welches dem $ABCD$ ähnlich ist.

Will man nun auch den Messtisch in Bezug auf D centriren und nach ABC orientiren, so braucht man nur den eben gefundenen Punkt d in das Loth von D und irgend eine der Richtungen da, db, dc in die entsprechende Vertikalebene DA, DB, DC zu bringen, was auf die weiter unten anzugebende Weise systematisch und leicht geschehen kann.

Wäre der Punkt D auf dem Felde nur annähernd gegeben und seine endgültige Festsetzung dem Geometer überlassen, so würde dieser nach der Bestimmung von d die Kippregel an da legen, den Messtisch drehen, bis da mit DA zusammenfällt, und schliesslich den Punkt d auf das Feld hinablothen und dort mit einem Pfahle bezeichnen.

Läge der Punkt D mit den drei anderen A, B, C ganz oder nahezu in einem Kreise, so würde dieses sofort durch die volle oder annähernde Deckung der Hilfskreise abd und bcd angezeigt werden, und es wäre hiedurch Veranlassung gegeben, die Bestimmung dieses Punktes aus A, B, C nicht weiter zu verfolgen oder wenigstens erst dann vorzunehmen, wenn ein anderer Punkt D' gefunden ist, der in Verbindung mit zweien der drei Punkte A, B, C die Lösung der Aufgabe in Bezug auf D zulässt.

Da Diopter überhaupt nicht weit zu sehen gestatten und für minder gute Augen diese Weite noch kleiner ist, so kann man die Sehwinkel μ und ν auch mit der Kippregel auf das Tischblatt zeichnen und von dieser Zeichnung aus mit dem Einschneidezirkel zur Beschreibung der Hilfskreise abnehmen. Es gehört dazu nur, dass man die Axe p des Zirkels in den Scheitel d' des überzutragenden

Winkels μ bringt und, nach vorausgegangener grober Drehung, den linken Schenkel mit Hilfe des elfenbeinernen Fusses h, der scharf nach der Innenfläche dieses Schenkels begrenzt ist, auf die Linie $d'A$ stellt und den rechten Schenkel durch die Schraube k in die Richtung $d'B$ so dreht, dass diese von dem Fusse h des Schenkels gedeckt wird.

2. Geometrische und mechanische Lösung der Hansen'schen Aufgabe.

Auch die nunmehr zu behandelnde Aufgabe führt nicht den Namen ihrers Erfinders. Man hat ihr den vorstehenden Namen gegeben, weil sie Herr Geheimrath Hansen in Gotha in Nr. 419, S. 165 der Astronomischen Nachrichten trigonometrisch aufgelöst und als neu bezeichnet hat. Diese Angabe beruhte aber auf einem Irrthum, da eine trigonometrische Lösung der vorliegenden Aufgabe schon von van Swinden in seinen Elementen der Geometrie (S. 321 der deutschen Uebersetzung von C. F. A. Jacobi) und von Gerling in Nr. 62 S. 233 der Astronomischen Nachrichten, eine praktisch-geometrische Lösung aber schon 1838 von Pross in seinem Lehrbuch der praktischen Geometrie (S. 198) gegeben wurde. Wir behalten indessen aus demselben Grunde wie in Nr. 1 den einmal angenommenen Namen bei, nachdem auf die Unrichtigkeit desselben wiederholt hingewiesen worden ist.

Hier haben wir es nicht mit der trigonometrischen, sondern lediglich mit der geometrischen und beziehungsweise mechanischen Lösung der Hansen'schen Aufgabe zu thun: wir werden also auf graphischem und mechanischem Wege die Lage zweier Standorte A, B (Fig. 8) des Messtisches aus den daselbst gemessenen scheinbaren Grössen α, α', β, β' der Verbindungslinien dieser Orte mit zwei anderen gegebenen Punkten C, D bestimmen, oder was dasselbe ist: wir werden auf dem Messtische ein Viereck $abcd$ aus einer Diagonale cd und den an der anderen Diagonale ab liegenden Winkeln α, α', β, β', so verzeichnen, dass es dem Vierecke $ABCD$ in der Natur ähnlich ist.

Stellt man nämlich den Messtisch über dem Punkte A horizontal auf, projicirt diesen Punkt auf das Blatt und stellt den Einschneidezirkel auf den Winkel $CAD = \alpha + \alpha'$ ein, so kann man mit dieser Einstellung über der Sehne cd sofort den Kreis $cadf$ beschreiben. Nimmt man dann ferner den Winkel $CAB = \alpha$ in den Zirkel und legt den einen Schenkel desselben an c und seinen Scheitel in α' auf

den eben beschriebenen Kreis, so schneidet der zweite Schenkel diesen Kreis in dem Punkte e. Wird hierauf der Messtisch nach B versetzt und horizontal aufgestellt, der Punkt B auf das Blatt projicirt und der Winkel $CDB = \beta + \beta'$ mit dem Einschneidezirkel aufgenommen, so lässt sich mit diesem über der Sehne cd der Kreis $cbde$ beschreiben.

Misst man endlich den Winkel $ABD = \beta'$ und legt ihn so auf den eben beschriebenen Kreis, dass der Scheitel irgend einen Punkt b' deckt und der Schenkel $b'd$ an dem Endpunkte d anliegt, so schneidet der andere Schenkel des Zirkels $(b'e)$ den Kreis $cbde$ in dem Punkte e. Verbindet man nun die Schnittpunkte e und f durch eine gerade Linie, so schneidet diese die zwei Kreise $cadf$ und $cbde$ in zwei Punkten a und b, welches die gesuchten Punkte sind.

Der Beweis für die Richtigkeit dieses Verfahrens ist sehr einfach. Die Lage des Punktes a ist offenbar durch die scheinbaren Grössen α, α' und $\alpha + \alpha'$, die des Punktes b durch β, β' und $\beta + \beta'$ bestimmt, also muss der Kreis $cadf$ ein geometrischer Ort von a und der Kreis $cbde$ ein geometrischer Ort von b sein. Dadurch, dass man $ca'f = \alpha$ und folglich $da'f = \alpha'$ macht, bestimmt man einen Punkt f, der die Eigenschaft hat, durch seine Verbindung mit den Punkten a, a' ... des Ortes von a alle auf der Sehne cd stehenden Peripheriewinkel $cad = ca'd = \ldots = \alpha + \alpha'$ in ihre zwei Bestandtheile α und α' zu zerlegen: jede von f ausgehende Sehne des Kreises $cadf$ liefert folglich einen Punkt a, a' ..., welcher mit c, f, d die Winkel α, α', $\alpha + \alpha'$ bildet. Ebenso hat der durch den Winkel $db'e = \beta'$ bestimmte Punkt e des Kreises $cbde$ die Eigenschaft, durch seine Verbindung mit den Punkten b, b' ... des Ortes von b alle auf der Sehne cd stehenden Peripheriewinkel cbd, $cb'd \ldots = \beta + \beta'$ in ihre zwei Bestandtheile β und β' zu zerlegen, so dass jede von e ausgehende Sehne des Kreises $cbde$ einen Punkt b, b' ... liefert, welcher mit c, e, d die Winkel β, β', $\beta + \beta'$ bildet. Wenn nun die Sehnen fa', fa ... in Bezug auf den Punkt a und die Sehnen eb', eb ... in Bezug auf den Punkt b allen Bedingungen der Aufgabe genügen, so ist klar, dass nur die zwei Sehnen fa und eb, welche in eine Gerade fe zusammenfallen, den Bedingungen der Aufgabe in Bezug auf die beiden Punkte a und b genügen können. In der That liegen gleichzeitig nur an den Enden der Geraden ab einerseits die scheinbaren Grössen α, α' der Seiten BC, BD und andererseits die scheinbaren Grössen β, β' der Seiten AC, AD, während jene Enden selbst auf den Kreisen ruhen, welche durch die Gesichtswinkel $\alpha + \alpha'$ und $\beta + \beta'$ der Geraden CD bestimmt sind.

Wollte man die Kreise cad und cbd nicht ganz ausziehen, um

Digitized by Google

die Punkte f und e als deren Schnitte mit den Geraden $a'f$ und $b'e$ zu erhalten, so dürfte man nur auf dem Kreise cad noch einmal den Winkel $\alpha = ca''f$ und auf dem Kreise cbd den Winkel $\beta' = db''e$ antragen und die Schnitte der Schenkel $a'f$, $a''f$, beziehungsweise $b'e$, $b''e$ suchen, welche mit den Kreisschnitten f und e übereinstimmen müssen. Jedenfalls gewähren die eben genannten Winkelschenkel $a''f$ und $b''f$ eine Controle für die Genauigkeit der Arbeit, wenn diese nach der ersten Vorschrift ausgeführt wurde.

Sind die Punkte a und b auf dem Messtische gefunden, so versteht es sich von selbst, wie derselbe für diese Punkte zu centriren und nach den Richtungen ac, ad und beziehungsweise bc, bd zu orientiren ist.

Um meine gegenwärtige Auflösung der vorliegenden Aufgabe mit der älteren von Pross vergleichen zu können*), führe ich letztere nach dessen Lehrbuch der praktischen Geometrie (S. 198) hier an. Es handle sich dabei (mit Bezug auf Fig. 9) um die Bestimmung der Punkte C und D aus den gegebenen Punkten A und B.

Auf dem Messtische sei ab gegeben. Man orientire denselben in D nach dem Augenmasse und schneide diesen Punkt in D durch die rückwärts gezogenen Visirlinien aA, bB ein. Von d visire man auch nach C und ziehe dc. Der Punkt D wird nunmehr mit einem Stabe bezeichnet und der Messtisch nach C so versetzt, dass cd mit CD in einer Ebene liegt, der Tisch also dieselbe Orientirung wie in D hat. Nun lege man die Kippregel an a, visire nach A und ziehe Aa rückwärts bis c in dc: von c visire man nach B und ziehe $b'c$. Trifft diese Vision den Punkt b, so war die Orientirung in D richtig und ist es folglich auch in C; tritt aber der gewöhnliche Fall ein, dass $b'c$ nicht mit bc zusammenfällt, so sind die Punkte d und c fehlerhaft bestimmt. Hierauf verbinde man a mit b', so ist ab' parallel zu AB, während es ab sein sollte: der Tisch ist folglich um den Winkel $b'ab$ unrichtig orientirt. Um ihn in die richtige Lage zu bringen, lege man das Lineal der Kippregel an ab' und lasse in dieser Richtung in grosser Entfernung einen Stab E ausstecken, bringe dann das Lineal an ab und drehe den Tisch, bis das Fadenkreuz des Fernrohrs der Kippregel den Stab E deckt. Von allen bis jetzt gezogenen Visionen und ihren Durchschnittspunkten wird jetzt keine Notiz mehr genommen, sondern aufs Neue von a nach A und von b nach B

*) In meinen „Elementen der Vermessungskunde," 3. Aufl. S. 499 findet sich eine von der Pross'schen abweichende Lösung der Hansen'schen Aufgabe, welche bei Messtischaufnahmen in kleinen Massstäben vortheilhaft anzuwenden ist.

Digitized by Google

visirt, wodurch sich der richtige Punkt c ergibt. Visirt man schliesslich von diesem Punkte nach D zurück, zieht eine neue Vision cd und ändert auch die früher gezogene Vision ad um den Winkel $b'ab$, der die falsche Orientirung anzeigt, so wird auch der Punkt D richtig erhalten.

Es bedarf wohl kaum der Erinnerung, dass meine Lösung der sogenannten Hansen'schen Aufgabe auch eine rein geometrische Bedeutung hat, indem sie zeigt, wie auf einfachste Weise ein Viereck $abcd$ zu construiren ist, von dem man eine Diagonale (cd) und die vier Winkel an der anderen Diagonale (α, α', β, β') kennt.

3. Das Centriren und Orientiren des Messtisches mit Hilfe des Einschneidezirkels.

In der Zeitschrift des österreichischen Ingenieur-Vereins, Bd. XXII, S. 215 hat Herr Joseph Schlesinger darauf aufmerksam gemacht, dass es bis jetzt an einem Mittel fehle, den Messtisch systematisch so aufzustellen, dass er nach einer auf ihm gegebenen Geraden mn, mit dem Punkte m lothrecht über M, orientirt ist, und er hat hiefür einen „Ordinatenwinkel" vorgeschlagen, welcher nichts anderes als ein vom Scheitel aus auf beiden Schenkeln getheiltes Winkelmass ist. Diese einfache Vorrichtung erfüllt ihren Zweck sehr gut und bedarf keiner Verbesserung; mein Einschneidezirkel ersetzt aber den obengenannten Ordinatenwinkel vollständig, wenn seine Schenkel von der Gewindaxe aus gleichmässig eingetheilt sind, wie es wirklick der Fall ist.

Wenn nämlich auf dem Messtische die Gerade mn (Fig. 10) und auf dem Felde die Vertikalebene MN gegeben und verlangt ist, den Punkt m des Messtisches in das Loth von M und mn in die Ebene MN zu stellen, so kann dieser Forderung durch folgendes systematische Verfahren genügt werden. Von dem (mit der Lothgabel leicht zu findenden) Durchschnittspunkte p der Drehaxe des Messtisches mit dem Zeichnungsblatte ziehe man auf diesem die Verbindungslinie pm, stelle den Einschneidezirkel auf den Winkel $pmn = \omega$ ein und messe auf dem feststehenden rechten Schenkel den Abstand $mp = l$ ab. Bringt man hierauf am Boden (etwa mit Hilfe einer Messlatte) den einen Winkelschenkel (hier den linken) in die Richtung MN und die Gewindaxe in den Punkt M, so bezeichnet der Punkt p des rechten Zirkelschenkels auf diesem Boden den Punkt P, über den der Punkt p des Messtisches lothrecht aufzustellen ist, wenn man diesen

nach m und mn centriren und orientiren will. Ist p wirklich im Lothe von P und der Tisch horizontal gestellt, so ist klar, dass durch entsprechende grobe und feine Drehungen m in das Loth von M und mn in die Vertikalebene MN kommen muss und dass damit der Aufgabe genügt ist.

Während ich hier die Aufstellung des Messtisches mit Polarcoordinaten bewirke, benützt Herr Schlesinger rechtwinkelige Coordinaten, indem er auf dem Messtische die Senkrechte pq auf mn fällt, die Abscisse $mq = x$, die Ordinate $qp = y$ misst und beide mittelst eines rechten Winkels (pqm) auf das Feld überträgt. Es bedarf wohl kaum der Erinnerung, dass man dieses Verfahren auch mit meinem Einschneidezirkel nachahmen kann, wenn man beide Schenkel mit Hilfe einer am Gewinde des Zirkels angebrachten Marke auf 90^0 ein- und feststellt. Ebenso ist leicht einzusehen, dass der Einschneidezirkel auch wie ein gewöhnlicher Zirkel benützt werden kann, wenn man die Schenkel bei A und B mit Spitzen oder Einsätzen versieht.

4. Die Genauigkeit und der Zeitgewinn, welche der Einschneidezirkel gewährt.

Die Genauigkeit des Einschneidezirkels kann entweder in Hinsicht auf die Beschreibung von Kreisen allein oder in Bezug hierauf und die Aufnahme der Peripheriewinkel geprüft werden; in dem letzteren Falle setzt sich der Ausdruck für die Genauigkeit aus denen für Winkelmessung und Kreisbeschreibung zusammen. Ich habe über beide Fälle Beobachtungen angestellt, beziehungsweise anstellen lassen.

Mit welcher Genauigkeit man Kreise beschreiben kann, von welchen entweder eine Sehne und ein Peripheriewinkel oder drei Punkte (also auch wieder Sehne und Peripheriewinkel) gegeben sind, erfährt man am besten dadurch, dass man die mit dem Einschneidezirkel und auf gewöhnliche Weise beschriebenen Kreise miteinander vergleicht, wobei es gleich ist, ob man zu dem vom Einschneidezirkel gelieferten Bogen den Mittelpunkt sucht und von diesem aus den Weg des Einschneidezirkels mit dem gewöhnlichen Zirkel prüft, oder ob man mit letzterem im Voraus einen Kreis beschreibt, den Einschneidezirkel auf drei Punkte desselben einstellt und zusieht, ob oder wie weit der von der Axe des Einschneidezirkels beschriebene Bogen mit dem voraus gezogenen Kreise zusammenfällt. Nach längerer Uebung, namentlich im sanften Andrücken der Winkelschenkel an die Einsatznadeln, ist jeder in geometrischen oder graphischen Arbeiten

Digitized by Google

nur einigermassen Geübte im Stande, mit dem Einschneidezirkel Kreise zu beschreiben, welche sich von den auf gewöhnliche Weise erzeugten nicht mehr unterscheiden, als zwei mit einem Stockzirkel aus Einem Mittelpunkte beschriebene Kreise, welche gleiche Halbmesser haben: der Einschneidezirkel gewährt somit als Kreisbeschreiber volle Befriedigung, und dasselbe ist mit seiner Gesammtleistung der Fall, wie aus den nachfolgenden Mittheilungen hervorgeht.

Herr Assistent August Vogler hat in der Umgebung von München (bei der Georgenschwaige) die Pothenot'sche und die Hansen'sche Aufgabe einerseits mit dem Theodolithen trigonometrisch, andrerseits mit dem Messtische geometrisch und mechanisch gelöst, und ich habe die gefundenen Messungsergebnisse in den zwei Tafeln Nr. 1 und Nr. 2 zusammengestellt. Ueber diese Versuche ist folgendes zu bemerken.

Zunächst wurde ein Dreieck ABC (Fig. 11) aus einer direkt mit Messstangen gemessenen Grundlinie $AC = 743^m,421 = b$ und den drei Winkeln $A = 56^0\ 30'\ 15'',4$; $B = 49^0\ 7'\ 15'',4$ und $C = 74^0\ 22'\ 29'',2$ bestimmt, wobei die Rechnung die Seitenlänge $BC = 819^m,950 = a$ und $AB = 946^m,904 = c$ ergab. Innerhalb des durch A, B, C gehenden Kreises wurden zwei Standpunkte D_2, D_3 angenommen und deren Abstände von A, B, C aus den hiezu erforderlichen Stücken berechnet. Auf denselben Standpunkten wurden dann je 4 Bestimmungen mit dem Einschneidezirkel und nach dem Lehmann'schen Verfahren gemacht und die Abstände der gefundenen Punkte d_2, d_3 von a, b, c mit genauen Massstäben in Centimetern gemessen. Die Resultate dieser Messungen sind in den Tabellen aufgeführt und es sind daselbst auch die Mittel aus je 4 solchen Messungen mit den betreffenden trigonometrischen Bestimmungen zusammengestellt.

Weiter wurden in dem Viereck ABC_1D_1 die Abstände AC_1, AD_1 BC_1, BD_1, C_1D_1 mit Hilfe des Theodolithen und der Grundlinie $AB = 946^m,904$ möglichst genau gemessen und in der Verjüngung von 1:6000 in der Tafel Nr. 1, Abth. B unter der Bezeichnung „berechnet" vorgetragen. Dieselben Abstände wurden dann je 4 mal theils nach meinem Verfahren (mechanisch), theils nach der oben angegebenen Methode von Pross (geometrisch) bestimmt und sowohl einzeln als nach ihren Mitteln in der eben genannten Abtheilung B der Tafel Nr. 1 aufgeführt.

Endlich wurden auch die Zeiten beobachtet und aufgeschrieben, welche für die mechanischen und geometrischen Lösungen der beiden hier in Betracht kommenden Aufgaben nöthig waren. Die hierauf

Digitized by Google

bezüglichen Angaben befinden sich in der Tafel Nr. 2. Es ist hiezu nur zu bemerken, dass bei den mechanischen Lösungen die Zeiten für die Orientirung des Messtisches besonders vorgetragen sind, weil diese Lösungen, abweichend von den rein geometrischen, eine Orientirung des Messtisches nicht voraussetzen.

Tafel Nr. 1

enthaltend die Ergebnisse der Genauigkeitsversuche.

I. Die Pothenot'sche Aufgabe.

A. Mechanische Lösung. Massstab = 1:5000.

Nr. des Versuchs.	Standpunkt D_2 Entfernung in Centimeter			Standpunkt D_3 Entfernung in Centimeter		
	ad_2	bd_2	cd_2	ad_3	bd_3	cd_3
1	10,41	11,68	6,75	11,00	8,37	14,62
2	10,40	11,67	6,76	11,11	8,25	14,69
3	10,48	11,61	6,76	11,11	8,28	14,68
4	10,49	11,62	6,72	11,07	8,31	14,69
Mittel	10,445	11,645	6,748	11,073	8,303	14,670
Berechnet	10,449	11,615	6,775	11,100	8,262	14,646

B. Lösung nach Lehmann. Massstab = 1:5000.

1	10,45	11,62	6,78	11,08	8,30	14,65
2	10,45	11,61	6,78	11,10	8,28	14,65
3	10,44	11,61	6,79	11,09	8,28	14,64
4	10,43	11,62	6,78	11,09	8,28	14,64
Mittel	10,443	11,615	6,783	11,090	8,285	14,645
Berechnet	10,449	11,615	6,775	11,100	8,262	14,646

Digitized by Google

II. Die Hansen'sche Aufgabe.

A. Mechanische Lösung. *Masstab* = 1:6000.

Nr. des Versuchs	Entfernung in Centimeter				
	ac_1	ad_1	bc_1	bd_1	c_1d_1
1	19,06	10,52	9,91	17,27	14,34
2	19,05	10,45	9,94	17,30	14,40
3	19,07	10,52	9,86	17,26	14,38
4	19,07	10,50	9,90	17,31	14,41
Mittel	19,063	10,498	9,903	17,285	14,383
Berechnet	19,046	10,516	9,907	17,256	14,320

B. Lösung nach Pross. *Masstab* = 1:6000.

Nr. des Versuchs	ac_1	ad_1	bc_1	bd_1	c_1d_1
1	19,07	10,52	9,90	17,23	14,32
2	19,03	10,50	9,90	17,24	14,31
3	19,05	10,51	9,92	17,25	14,32
4	19,05	10,51	9,91	17,27	14,32
Mittel	19,050	10,510	9,908	17,248	14,318
Berechnet	19,046	10,516	9,907	17,256	14,320

Digitized by Google

Tafel Nr. 2

enthaltend die Beobachtungen über den Zeitaufwand.

(In Minuten.)

I. Pothenot'sche Aufgabe.

Nr. des Versuchs	A. Mechanische Lösung (Massstab 1:5000)						B. Nach Lehmann	
	Standpunkt D_2			Standpunkt D_3			D_2	D_3
	Bestimmung	Orientirung	Summe	Bestimmung	Orientirung	Summe	Bestimmung und Orientirung	
1	10	4	14	9	6	15	17	24
2	8	4	12	8	4	12	15	25
3	7	5	12	8	3	11	16	23
4	9	3	12	9	5	14	14	15
Mittel	8,5	4,0	12,5	8,5	4,5	13,0	15,5	21,8

Digitized by Google

II. Die Hansen'sche Aufgabe.

Nr. des Versuchs	A. Mechanische Lösung				B. Lösung nach Pross		
	Bestimmung von		Orientirung	Summe	Bestimmung von		Summe
	C_1	D_1			C_1	D_1	
1	10	17	6	33	6	23	29
2	10	14	3	27	5	22	27
3	9	11	3	23	4	21	25
4	11	11	4	26	6	27	33
Mittel	10,0	13,3	4,0	27,3	5,3	23,3	28,5

Digitized by Google

Die vorstehenden Zahlen sprechen für sich selbst: die Genauigkeit des geometrischen Verfahrens scheint zwar im Allgemeinen etwas grösser zu sein als die des mechanischen, allein die Unterschiede zwischen den gemessenen und berechneten Entfernungen in Tafel Nr. 1 sind meistens so gering, dass sie innerhalb der Genauigkeitsgrenzen von Messtischaufnahmen liegen und daher zu einem entscheidenden Urtheile um so weniger berechtigen, als die auf trigonometrischem Wege bestimmten Entfernungen keineswegs absolut genau sind und die Fertigkeit eines Beobachters in rein geometrischen Aufnahmen, die Jahre lang geübt sind, offenbar grösser ist als in rein mechanischen Bestimmungen, die zum ersten Male ausgeführt werden.

Die Zeitersparniss, welche das mechanische Verfahren dem geometrischen gegenüber gewährt, ist namentlich dann bedeutend, wenn lediglich die Bestimmung der Standpunkte in Betracht kommt, also auf die Orientirung des Messtisches verzichtet werden darf: in diesem Falle kann die Pothenot'sche Aufgabe in der halben Zeit, welche zur Ausführung des Lehmann'schen Verfahrens nothwendig ist, gelöst werden, während die Ausführung der Hansen'schen Aufgabe einen so auffallenden Zeitgewinn allerdings nicht gewährt, und namentlich dann nicht, wenn statt des Pross'schen Verfahrens zur Lösung dieser Aufgabe dasjenige angewendet wird, welches ich in der dritten Auflage meiner Elemente der Vermessungskunde S. 499 beschrieben habe.

Digitized by Google

VI.

Neue vollständige Lösung der Aufgabe: Mit einem gegebenen Brennpunkte einen durch drei gegebene Punkte gehenden Kegelschnitt zu beschreiben.

Von

dem Herausgeber.

(Fig. s. Taf. IV.)

---

§. 1.

Die Aufgabe:

Mit einem gegebenen Brennpunkte einen durch drei gegebene Punkte gehenden Kegelschnitt zu beschreiben.

ist, schon wegen ihres vielfachen wichtigen Gebrauchs in der Astronomie bei der Berechnung der Bahnen der um die Sonne nach den Kepler'schen Gesetzen sich bewegenden Weltkörper, insbesondere auch bei der Berechnung der Erdbahn oder der scheinbaren Sonnenbahn, eine der wichtigsten geometrischen Aufgaben, und deshalb schon häufig durch Construction und durch Rechnung gelöst worden; bei den analytischen Lösungen hat man meistens die Polargleichungen der Kegelschnitte in Anwendung gebracht, worüber vorzüglich die Theoria motus von Gauss (pag. 86. Nr. 82.) nachzusehen ist. Ich selbst habe schon eine Auflösnng im Archiv Thl. XVII. S. 69. gegeben. Eine andere Auflösung zu geben, ist die vorliegende Abhandlung bestimmt, zu deren Grundlage ich meine Neue Theorie der Kegelschnitte (N. T. d. K.) im Archiv Thl. XXXI. Nr. XIII. machen werde, weil mir diese von mir entwickelte neue Theorie, wie bei so vielen anderen Untersuchungen, auch bei dieser Aufgabe eine besonders bequeme und vortheilhafte Anwendung zu finden scheint, und

Digitized by Google

eine in jeder Beziehung sehr vollständige Auflösung derselben zu geben gestattet. Zugleich aber beabsichtige ich die Aufgabe, wie ich dies für nöthig halte, in zwei Theile zu scheiden, was früher wenigstens noch nicht mit der Bestimmtheit, wie es im Folgenden der Fall sein wird, geschehen ist, und dabei noch verschiedene andere, bisher noch nicht gehörig erörterte Punkte, namentlich auch die mehrfachen Auflösungen, welche die Aufgabe bei verschiedenen Auffassungen zulässt, zur Sprache zu bringen, was bei dieser bei so vielen wichtigen, besonders — wie schon erwähnt — astronomischen Untersuchungen zur Anwendung kommenden Aufgabe jedenfalls von besonderer Bedeutung ist.

Ob schon Kepler Anwendungen dieser Aufgabe bei seinen Untersuchungen über die Bahnen der Planeten gemacht hat, kann ich jetzt mit Bestimmtheit nicht sagen. Jedenfalls aber hat Halley dieses Verdienst; denn in seinen immer noch sehr zur Beachtung und zum Studium zu empfehlenden „Introductiones ad veram Physicam et veram Astronomiam. Editio novissima. Lugduni Batavorum. MDCCXXXIX. 4°.“ sagt Keill (p. 464.): „Aliam excogitavit methodum Cl. Halleius, qua Planetae loca centrica, ejusque a Sole distantiae inveniri possunt, quae supponit tantum cognitum esse Planetae tempus periodicum etc.“ und fährt dann fort: „Si hac ratione acquirantur tria loca centrica Planetae, tresque correspondentes ejus a Sole distantiae, forma orbitae et Apsidum positio habebitur; describendo Ellipsim cujus focus est Sol quae transit per tria puncta data. Ellipsis autem illa sequenti methodo“ — (mittelst einer Construction) — determinatur.“

§. 2.

In Bezug auf ein beliebiges rechtwinkliges Coordinatensystem werde ich die Coordinaten des gegebenen Brennpunktes S durch f, g; die Coordinaten der drei gegebenen Punkte A_0, A_1, A_2, durch welche mit oder aus dem gegebenen Brennpunkte S der Kegelschnitt beschrieben werden soll, durch

$$x_0,\, y_0; \quad x_1,\, y_1; \quad x_2,\, y_2;$$

die natürlich gleichfalls gegebenen Entfernungen dieser Punkte von dem Brennpunkte, also die den drei gegebenen Punkten A_0, A_1, A_2 entsprechenden Vectoren

$$SA_0, \quad SA_1, \quad SA_2$$

Digitized by Google

des zu bestimmenden Kegelschnitts, durch

$$r_0, \quad r_1, \quad r_2$$

bezeichnen, wo dann:

1) . . . .
$$\begin{cases} r_0 = \sqrt{(x_0-f)^2+(y_0-g)^2}, \\ r_1 = \sqrt{(x_1-f)^2+(y_1-g)^2}, \\ r_2 = \sqrt{(x_2-f)^2+(y_2-g)^2} \end{cases}$$

ist. Die Entfernungen der drei gegebenen Punkte von einander, nämlich die Entfernungen

$$A_0A_1, \quad A_1A_2, \quad A_2A_0$$

mögen respective durch

$$r_{01}, \quad r_{12}, \quad r_{20}$$

bezeichnet werden, wo also:

2) . . . .
$$\begin{cases} r_{01} = \sqrt{(x_0-x_1)^2+(y_0-y_1)^2}, \\ r_{12} = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}, \\ r_{20} = \sqrt{(x_2-x_0)^2+(y_2-y_0)^2} \end{cases}$$

ist.

Der gesuchte Kegelschnitt wird bestimmt sein, wenn man seine dem gegebenen Brennpunkte (fg) entsprechende Directrix, deren Gleichung

3) . . . . $Ax+By+C=0$

sein mag, und seine Charakteristik n kennt, so dass wir also auf die Bestimmung dieser beiden Elemente unser Augenmerk im Folgenden hauptsächlich zu richten haben werden.

Auf der Stelle erkennt man aber die Nothwendigkeit der Unterscheidung der beiden folgenden Fälle bei dieser Aufgabe:

Mit dem gegebenen Brennpunkte soll man durch die drei gegebenen Punkte einen Kegelschnitt so beschreiben, dass diese drei Punkte sämmtlich in einer Parabel, oder in einer Ellipse, oder in dem ersten Zweige einer Hyperbel, oder in dem zweiten Zweige einer Hyperbel liegen.

und:

Digitized by Google

Mit dem gegebenen Brennpunkte soll man durch die drei gegebenen Punkte eine Hyperbel so beschreiben, dass der eine der drei gegebenen Punkte in dem einen Zweige, die beiden anderen gegebenen Punkte in dem anderen Zweige dieser Hyperbel liegen.

Die Lösung dieser beiden Aufgaben wird nun den Gegenstand der folgenden Betrachtungen bilden.

§. 3.

Zuerst stellen wir uns also die folgende Aufgabe:

Mit dem gegebenen Brennpunkte S durch die drei gegebenen Punkte A_0, A_1, A_2 einen Kegelschnitt so zu beschreiben, dass diese drei Punkte sämmtlich in einer Parabel, oder in einer Ellipse, oder in dem ersten Zweige einer Hyperbel, oder in dem zweiten Zweige einer Hyperbel liegen*).

Nach N. T. d. K. S. 79. Nr. 2) ist die Gleichung des gesuchten Kegelschnitts:

$$1)\ \ldots\ n^2(Ax+By+C)^2=(A^2+B^2)\{(x-f)^2+(y-g)^2\},$$

woraus sich, um die Bedingungen der Aufgabe zu erfüllen, nach N. T. d. K. S. 82. die folgenden Gleichungen, in denen die oberen und unteren Zeichen sich auf einander beziehen, ergeben:

$$2)\ \ldots \left\{\begin{array}{l} n(Ax_0+By_0+C)=\pm\sqrt{(A^2+B^2)\{(x_0-f)^2+(y_0-g)^2\}},\\ n(Ax_1+By_1+C)=\pm\sqrt{(A^2+B^2)\{(x_1-f)^2+(y_1-g)^2\}},\\ n(Ax_2+By_2+C)=\pm\sqrt{(A^2+B^2)\{(x_2-f)^2+(y_2-g)^2\}}; \end{array}\right.$$

oder nach §. 2. 1):

$$3)\ \ldots\ldots \left\{\begin{array}{l} n(Ax_0+By_0+C)=\pm r_0\sqrt{A^2+B^2},\\ n(Ax_1+By_1+C)=\pm r_1\sqrt{A^2+B^2},\\ n(Ax_2+By_2+C)=\pm r_2\sqrt{A^2+B^2}; \end{array}\right.$$

*) Ueber den Fall des Kreises, dessen im Folgenden der Kürze wegen keine besondere Erwähnung gethan werden soll, s. m. N. T. d. K. §. 6. S. 82, wo das Nöthige zur Beurtheilung dieses Falls im Allgemeinen gesagt worden ist.

Digitized by Google

so dass es also jetzt darauf ankommt, die Grössen A, B, C und das positive n so zu bestimmen, dass diesen drei Gleichungen, oder den drei Gleichungen:

$$4) \ldots \ldots \begin{cases} nAx_0+nBy_0+nC=\pm r_0\sqrt{A^2+B^2}, \\ nAx_1+nBy_1+nC=\pm r_1\sqrt{A^2+B^2}, \\ nAx_2+nBy_2+nC=\pm r_2\sqrt{A^2+B^2} \end{cases}$$

genügt wird. Setzen wir nun diese Gleichungen als erfüllt voraus, multipliciren sie nach der Reihe zuerst mit:

$$y_1-y_2, \quad y_2-y_0, \quad y_0-y_1;$$

dann mit:

$$x_1-x_2, \quad x_2-x_0, \quad x_0-x_1;$$

ferner mit:

$$x_1y_2-y_1x_2, \quad x_2y_0-y_2x_0, \quad x_0y_1-y_0x_1;$$

und addiren sie in jedem einzelnen Falle zu einander; so erhalten wir, wenn der Kürze wegen:

$$\begin{aligned} 5) \ldots \ldots N &= x_0(y_1-y_2)+x_1(y_2-y_0)+x_2(y_0-y_1) \\ &= -\{y_0(x_1-x_2)+y_1(x_2-x_0)+y_2(x_0-x_1)\} \\ &= (x_0y_1-y_0x_1)+(x_1y_2-y_1x_2)+(x_2y_0-y_2x_0) \end{aligned}$$

und:

$$6) \ldots \begin{cases} P=r_0(y_1-y_2)+r_1(y_2-y_0)+r_2(y_0-y_1), \\ Q=r_0(x_1-x_2)+r_1(x_2-x_0)+r_2(x_0-x_1), \\ R=r_0(x_1y_2-y_1x_2)+r_1(x_2y_0-y_2x_0)+r_2(x_0y_1-y_0x_1) \end{cases}$$

gesetzt wird, wie leicht zu übersehen ist, die folgenden Gleichungen:

$$7) \ldots \ldots \begin{cases} nAN=\pm P\sqrt{A^2+B^2}, \\ nBN=\mp Q\sqrt{A^2+B^2}, \\ nCN=\pm R\sqrt{A^2+B^2}. \end{cases}$$

Daher müssen jedenfalls die Grössen A, B, C und das positive n so bestimmt werden, dass diesen drei letzteren Gleichungen genügt wird.

Es frägt sich aber, ob auch umgekehrt, wenn die Gleichungen 7) erfüllt sind, dann auch jederzeit die Gleichungen 4) oder 3), auf

Digitized by Google

deren Erfüllung es eigentlich ankommt, erfüllt sind. Um diese Frage zu beantworten, bemerke man zuvörderst die folgenden Relationen, von deren Richtigkeit man sich durch leichte Rechnung überzeugen kann:

$$8)\quad \left\{\begin{array}{l} Px_0 - Qy_0 + R = r_0 N, \\ Px_1 - Qy_1 + R = r_1 N, \\ Px_2 - Qy_2 + R = r_2 N. \end{array}\right.$$

Multiplicirt man nun die als erfüllt vorausgesetzten Gleichungen 7) nach der Reihe mit

$$x_0,\quad y_0,\quad 1;\qquad x_1,\quad y_1,\quad 1;\qquad x_2,\quad y_2,\quad 1$$

und addirt sie in jedem dieser drei Fälle zu einander; so erhält man die folgenden Gleichungen:

$$n(Ax_0 + By_0 + C)N = \pm(Px_0 - Qy_0 + R)\sqrt{A^2 + B^2},$$

$$n(Ax_1 + By_1 + C)N = \pm(Px_1 - Qy_1 + R)\sqrt{A^2 + B^2},$$

$$n(Ax_2 + By_2 + C)N = \pm(Px_2 - Qy_2 + R)\sqrt{A^2 + B^2};$$

folglich nach 8):

$$n(Ax_0 + By_0 + C)N = \pm r_0 N\sqrt{A^2 + B^2},$$

$$n(Ax_1 + By_1 + C)N = \pm r_1 N\sqrt{A^2 + B^2},$$

$$n(Ax_2 + By_2 + C)N = \pm r_2 N\sqrt{A^2 + B^2};$$

also, wenn N nicht verschwindet:

$$n(Ax_0 + By_0 + C) = \pm r_0\sqrt{A^2 + B^2},$$

$$n(Ax_1 + By_1 + C) = \pm r_1\sqrt{A^2 + B^2},$$

$$n(Ax_2 + By_2 + C) = \pm r_2\sqrt{A^2 + B^2};$$

welches die zu erfüllenden Gleichungen 3) sind. Wenn also N nicht verschwindet, sind, wenn die Gleichungen 7) erfüllt sind, jederzeit auch die Gleichungen 4) oder 3) erfüllt.

Der absolute Werth von N ist bekanntlich der doppelte Flächeninhalt des Dreiecks $A_0A_1A_2$; und ist also $N = 0$, so verschwindet der Flächeninhalt dieses Dreiecks, die drei gegebenen Punkte A_0, A_1, A_2 liegen folglich in einer geraden Linie, oder fallen mit einander zusammen, welchen Fall wir natürlich ausschliessen müssen, und

aber immer voraussetzen können, dass N nicht verschwindet. Also werden nach dem Vorhergehenden immer die Gleichungen 7) die Gleichungen 4) oder 3) nach sich ziehen, und es kommt folglich bloss darauf an, die Grössen A, B, C und das positive n so zu bestimmen, dass die Gleichungen 7), nämlich die Gleichungen:

$$nAN = \pm P\sqrt{A^2+B^2},$$

$$nBN = \mp Q\sqrt{A^2+B^2},$$

$$nCN = \pm R\sqrt{A^2+B^2}$$

erfüllt werden.

Wenn nun aber ein wirklicher Kegelschnitt mit einer wirklichen, durch die Gleichung

$$Ax+By+C=0$$

gegebenen bestimmten Directrix und einer nicht verschwindenden positiven Charakteristik n durch die drei gegebenen Punkte A_0, A_1, A_2 unter den in der Aufgabe zu erfüllen verlangten Bedingungen beschrieben werden soll, so müssen offenbar zugleich A, B und n so bestimmt werden, dass A und B nicht zugleich verschwinden, also $\sqrt{A^2+B^2}>0$, und $n>0$ ist. Unter diesen Voraussetzungen erhellet aber aus den obigen zu erfüllenden Gleichungen, dass sich nothwendig die Grössen A, B, C wie die Grössen P, $-Q$, R zu einanher verhalten müssen, und also nur, wenn k eine beliebige nicht verschwindende Grösse bezeichnet:

9) . . . . $A=kP, \qquad B=-kQ, \qquad C=kR$

gesetzt werden kann, wodurch die zu erfüllenden Gleichungen in die folgenden übergehen:

$$nkPN = \pm P\sqrt{k^2(P^2+Q^2)},$$

$$nkQN = \pm Q\sqrt{k^2(P^2+Q^2)},$$

$$nkRN = \pm R\sqrt{k^2(P^2+Q^2)};$$

indem aber, weil A und B nicht zugleich verschwinden sollen, zugleich angenommen werden muss, dass die Grössen P und Q nicht zugleich verschwinden, unter welcher Voraussetzung aus den vorstehenden Gleichungen jedenfalls:

10) . . . . $n = \pm\dfrac{\sqrt{k^2(P^2+Q^2)}}{kN}$.

Digitized by Google

wo n nicht verschwindet, folgt, zugleich aber, weil n positiv sein so erhellet, dass man im Obigen die oberen oder unteren Zeichen nehm muss, jenachdem die nicht verschwindende Grösse kN positiv od negativ ist.

Wenn man die Werthe 9) und 10) von A, B, C und n in d Gleichungen 3) einführt, so werden dieselben:

$$\left\{\pm\frac{\sqrt{k^2(P^2+Q^2)}}{kN}\right\}\{kPx_0+k(-Q)y_0+kR\}=\pm r_0\sqrt{k^2(P^2+Q^2)},$$

$$\left\{\pm\frac{\sqrt{k^2(P^2+Q^2)}}{kN}\right\}\{kPx_1+k(-Q)y_1+kR\}=\pm r_1\sqrt{k^2(P^2+Q^2)},$$

$$\left\{\pm\frac{\sqrt{k^2(P^2+Q^2)}}{kN}\right\}\{kPx_2+k(-Q)x_2+kR\}=\pm r_2\sqrt{k^2(P^2+Q^2)};$$

also:

$$\left\{\pm\frac{\sqrt{k^2}.\sqrt{P^2+Q^2}}{N}\right\}\{Px_0+(-Q)y_0+R\}=\pm r_0\sqrt{k^2}\cdot\sqrt{P^2+Q^2},$$

$$\left\{\pm\frac{\sqrt{k^2}.\sqrt{P^2+Q^2}}{N}\right\}\{Px_1+(-Q)y_1+R\}=\pm r_1\sqrt{k^2}\cdot\sqrt{P^2+Q^2},$$

$$\left\{\pm\frac{\sqrt{k^2}.\sqrt{P^2+Q^2}}{N}\right\}\{Px_2+(-Q)y_2+R\}=\pm r_2\sqrt{k^2}\cdot\sqrt{P^2+Q^2};$$

woraus sich ferner:

$$\left\{\pm\frac{\sqrt{P^2+Q^2}}{N}\right\}\{Px_0+(-Q)y_0+R\}=\pm r_0\sqrt{P^2+Q^2},$$

$$\left\{\pm\frac{\sqrt{P^2+Q^2}}{N}\right\}\{Px_1+(-Q)y_1+R\}=\pm r_1\sqrt{P^2+Q^2},$$

$$\left\{\pm\frac{\sqrt{P^2+Q^2}}{N}\right\}\{Px_2+(-Q)y_2+R\}=\pm r_2\sqrt{P^2+Q^2}$$

ergiebt. Diese Gleichungen werden aber erhalten, wenn man in den allgemeinen Formeln 9) und 10) die Grösse $k=1$, also:

$$A=P,\qquad B=-Q,\qquad C=R$$

und

$$n=\pm\frac{\sqrt{P^2+Q^2}}{N},$$

indem man das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem N positiv oder negativ ist, setzt, und diese Werthe von A, B, C und n in die Gleichungen 3) einführt, woraus sich ergiebt, dass es völlig genügt:

$$11) \quad \ldots\ldots \quad A=P, \qquad B=-Q, \qquad C=R$$

und

$$12) \quad \ldots\ldots \quad n=\pm\frac{\sqrt{P^2+Q^2}}{N}$$

zu setzen, indem man in dieser letzteren Formel das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem die Grösse N positiv oder negativ ist.

Dem Vorhergehenden liegt die Voraussetzung zu Grunde, dass die Grössen P und Q nicht zugleich verschwinden, weshalb wir noch den Fall besonders betrachten müssen, wenn zugleich:

$$P=0, \qquad Q=0;$$

also nach 6) zugleich:

$$r_0(y_1-y_2)+r_1(y_2-y_0)+r_2(y_0-y_1)=0,$$
$$r_0(x_1-x_2)+r_1(x_2-x_0)+r_2(x_0-x_1)=0$$

ist. Eliminirt man aus diesen beiden Gleichungen nach der Reihe r_2, r_0, r_1; so ergeben sich, wie man leicht findet, die folgenden Gleichungen:

$$(r_0-r_1)N=0,$$
$$(r_1-r_2)N=0,$$
$$(r_2-r_0)N=0;$$

also, weil bekanntlich N nicht verschwindet:

$$r_0-r_1=0, \qquad r_1-r_2=0, \qquad r_2-r_0=0;$$

folglich:

$$r_0=r_1=r_2,$$

woraus sich ergiebt, dass in diesem Falle die drei gegebenen Punkte A_0, A_1, A_2 in einem Kreise liegen, dessen Mittelpunkt der gegebene Brennpunkt S ist, worin der Fall, wenn die Grössen P und Q zugleich verschwinden, seine vollständige Erledigung findet.

Aus 6) erhält man leicht:

Digitized by Google

$$\begin{aligned}P^2+Q^2= \;& r_0^2\{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2\}\\ &+r_1^2\{(x_2-x_0)^2+(y_2-y_0)^2\}\\ &+r_2^2\{(x_0-x_1)^2+(y_0-y_1)^2\}\\ &+2r_0r_1\{(x_1-x_2)(x_2-x_0)+(y_1-y_2)(y_2-y_0)\}\\ &+2r_1r_2\{(x_2-x_0)(x_0-x_1)+(y_2-y_0)(y_0-y_1)\}\\ &+2r_2r_0\{(x_0-x_1)(x_1-x_2)+(y_0-y_1)(y_1-y_2)\},\end{aligned}$$

so dass also, wenn man, indem M eine positive Grösse bezeichnet:

$$13)\ \ldots\ \begin{aligned}M^2= \;& r_0^2r_{12}^2+r_1^2r_{20}^2+r_2^2r_{01}^2\\ &+2r_0r_1\{(x_1-x_2)(x_2-x_0)+(y_1-y_2)(y_2-y_0)\}\\ &+2r_1r_2\{(x_2-x_0)(x_0-x_1)+(y_2-y_0)(y_0-y_1)\}\\ &+2r_2r_0\{(x_0-x_1)(x_1-x_2)+(y_0-y_1)(y_1-y_2)\}\end{aligned}$$

setzt, nach 12):

$$14)\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ n=\pm\frac{M}{N}$$

ist, indem man das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem die Grösse N positiv oder negativ ist.

Wir haben nun, indem wir bemerken, dass wir auf den Fall, wenn

$$Af+Bg+C=0$$

ist, nachher besonders zurückkommen werden, die folgenden Fälle zu unterscheiden:

Wenn

$$N\ \begin{matrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{matrix}$$

und beziehungsweise

$$Af+Bg+C\ \begin{matrix}\text{positiv}\\ \text{negatir}\end{matrix}$$

ist; so ist nach N. T. d. K. S. 82 und S. 76, jenachdem

$$n=1,\qquad n<1,\qquad n>1$$

ist, der Kegelschnitt respective

eine Parabel, eine Ellipse, der erste Zweig einer Hyperbel.

Wenn

$$N\ \begin{matrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{matrix}$$

Digitized by Google

und beziehungsweise

$$Af+Bg+C \begin{matrix}\text{negativ}\\ \text{positiv}\end{matrix}$$

ist; so kann, wie in einer Anmerkung am Schluss dieser Abhandlung besonders gezeigt worden ist, nur $n>1$ sein, und nach N. T. d. K. S. 82 und S. 76 ist folglich in diesem Falle der Kegelschnitt der zweite Zweig einer Hyperbel.

Setzen wir jetzt

$$15) \quad \ldots\ldots \begin{cases} x_0=f+r_0\cos\omega_0, & y_0=g+r_0\sin\omega_0;\\ x_1=f+r_1\cos\omega_1, & y_1=g+r_1\sin\omega_1;\\ x_2=f+r_2\cos\omega_2, & y_2=g+r_2\sin\omega_2; \end{cases}$$

wo keiner der Winkel ω_0, ω_1, ω_2, deren Bedeutung von selbst erhellet, grösser als 2π ist; so ist, weil wir nach 5) offenbar:

$$\begin{aligned} N= &\quad (x_0-f)\{(y_1-g)-(y_2-g)\}\\ &+(x_1-f)\{(y_2-g)-(y_0-g)\}\\ &+(x_2-f)\{(y_0-g)-(y_1-g)\}\\ = &\quad (x_0-f)(y_1-g)-(y_0-g)(x_1-f)\\ &+(x_1-f)(y_2-g)-(y_1-g)(x_2-f)\\ &+(x_2-f)(y_0-g)-(y_2-g)(x_0-f) \end{aligned}$$

setzen können, wie sogleich erhellet:

16)

$$N=-\{r_0r_1\sin(\omega_0-\omega_1)+r_1r_2\sin(\omega_1-\omega_2)+r_2r_0\sin(\omega_2-\omega_0)\}.$$

Ferner ist nach 6):

$$\begin{aligned} P= &\quad r_0\{(y_1-g)-(y_2-g)\}\\ &+r_1\{(y_2-g)-(y_0-g)\}\\ &+r_2\{(y_0-g)-(y_1-g)\}\\ = &\quad r_0(y_1-g)-r_1(y_0-g)\\ &+r_1(y_2-g)-r_2(y_1-g)\\ &+r_2(y_0-g)-r_0(y_2-g), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q= &\quad r_0\{(x_1-f)-(x_2-f)\}\\ &+r_1\{(x_2-f)-(x_0-f)\}\\ &+r_2\{(x_0-f)-(x_1-f)\}\\ = &\quad r_0(x_1-f)-r_1(x_0-f)\\ &+r_1(x_2-f)-r_2(x_1-f)\\ &+r_2(x_0-f)-r_0(x_2-f), \end{aligned}$$

Digitized by Google

$$\begin{aligned}
R = \;& r_0\{(f+(x_1-f))(g+(y_2-g))-(g+(y_1-g))(f+(x_2-f))\} \\
&+r_1\{(f+(x_2-f))(g+(y_0-g))-(g+(y_2-g))(f+(x_0-f))\} \\
&+r_2\{(f+(x_0-f))(g+(y_1-g))-(g+(y_0-g))(f+(x_1-f))\} \\
= & -f\{r_0(y_1-y_2)+r_1(y_2-y_0)+r_2(y_0-y_1)\} \\
&+g\{r_0(x_1-x_2)+r_1(x_2-x_0)+r_2(x_0-x_1)\} \\
&+r_0\{(x_1-f)(y_2-g)-(y_1-g)(x_2-f)\} \\
&+r_1\{(x_2-f)(y_0-g)-(y_2-g)(x_0-f)\} \\
&+r_2\{(x_0-f)(y_1-g)-(y_0-g)(x_1-f)\} \\
= & -fP+gQ+r_0\{(x_1-f)(y_2-g)-(y_1-g)(x_2-f)\} \\
&\qquad +r_1\{(x_2-f)(y_0-g)-(y_2-g)(x_0-f)\} \\
&\qquad +r_2\{(x_0-f)(y_1-g)-(y_0-g)(x_1-f)\};
\end{aligned}$$

also, wie leicht erhellet:

17)

$$\begin{aligned}
P = & -2r_0r_1\sin\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)\cos\tfrac{1}{2}(\omega_0+\omega_1) \\
& -2r_1r_2\sin\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)\cos\tfrac{1}{2}(\omega_1+\omega_2) \\
& -2r_2r_0\sin\tfrac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)\cos\tfrac{1}{2}(\omega_2+\omega_0),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q = \;& 2r_0r_1\sin\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)\sin\tfrac{1}{2}(\omega_0+\omega_1) \\
& +2r_1r_2\sin\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)\sin\tfrac{1}{2}(\omega_1+\omega_2) \\
& +2r_2r_0\sin\tfrac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)\sin\tfrac{1}{2}(\omega_2+\omega_0),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R = & -fP+gQ \\
& -r_0r_1r_2\{\sin(\omega_0-\omega_1)+\sin(\omega_1-\omega_2)+\sin(\omega_2-\omega_0)\} \\
= & -fP+gQ+4r_0r_1r_2\sin\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)\sin\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)\sin\tfrac{1}{2}(\omega_2-\omega_0).
\end{aligned}$$

Nach 11) ist:

$$Af+Bg+C=Pf-Qg+R,$$

also nach 17):

$$\begin{aligned}
Af+Bg+C = \;& Pf-Qg-Pf+Qg \\
& +4r_0r_1r_2\sin\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)\sin\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)\sin\tfrac{1}{2}(\omega_2-\omega_0),
\end{aligned}$$

folglich:

18)

$$Af+Bg+C=4r_0r_1r_2\sin\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)\sin\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)\sin\tfrac{1}{2}(\omega_2-\omega_0).$$

Insofern nun, wie wir hier natürlich annehmen müssen, keine der Grössen r_0, r_1, r_2 verschwindet, d. h. keiner der drei gegebenen

Digitized by Google

[Pu]nkte A_0, A_1, A_2 mit dem gegebenen Brennpunkte S zusammenfällt, [w]ird nur dann

$$Af + Bg + C = 0,$$

[w]enn wenigstens einer der drei Factoren:

$$\sin\tfrac{1}{2}(\omega_0 - \omega_1), \quad \sin\tfrac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2), \quad \sin\tfrac{1}{2}(\omega_2 - \omega_0)$$

verschwindet.

Wäre nun etwa

$$\sin\tfrac{1}{2}(\omega_0 - \omega_1) = 0,$$

so wäre, wenn λ eine ganze Zahl bezeichnet:

$$\tfrac{1}{2}(\omega_0 - \omega_1) = \lambda\pi, \quad \text{also} \quad \omega_0 - \omega_1 = 2\lambda\pi;$$

wo, weil bekanntlich der absolute Werth von $\omega_0 - \omega_1$ die Grösse 2π jedenfalls nicht übersteigt, λ nur die Werthe -1, 0, $+1$ haben kann. Jenachdem nun

$$\lambda = -1, \quad \lambda = 0, \quad \lambda = +1$$

ist, ist beziehungsweise:

$$\omega_0 - \omega_1 = -2\pi, \quad \omega_0 - \omega_1 = 0, \quad \omega_0 - \omega_1 = +2\pi;$$

also:

$$\omega_1 = \omega_0 + 2\pi, \quad \omega_0 = \omega_1, \quad \omega_0 = \omega_1 + 2\pi;$$

welche Gleichungen, weil keiner der Winkel ω_0, ω_1 grösser als 2π ist, nur Statt finden können, wenn respective:

$$\omega_0 = 0, \quad \omega_1 = 2\pi; \quad \omega_0 = \omega_1; \quad \omega_0 = 2\pi, \quad \omega_1 = 0$$

ist. In allen drei Fällen liegen aber die Punkte A_0, A_1 in derselben von dem Brennpunkte S ausgehenden Geraden, was offenbar unzulässig ist, wenn sich durch die drei Punkte A_0, A_1, A_2 mit dem Brennpunkte S eine Parabel, oder eine Ellipse, oder der erste Zweig einer Hyperbel, oder der zweite Zweig einer Hyperbel soll beschreiben lassen, wie hier verlangt wird. Zu ganz ähnlichen Schlüssen gelangt man, wenn man annimmt, dass

$$\sin\tfrac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2) = 0 \quad \text{oder} \quad \sin\tfrac{1}{2}(\omega_2 - \omega_0) = 0$$

ist.

Wenn wir also, wie es erforderlich ist, annehmen, dass nicht zwei der drei gegebenen Punkte A_0, A_1, A_2 in derselben von dem

Digitized by Google

Punkte S ausgehenden Geraden liegen, kann niemals der schon obe erwähnte Fall

$$Af + Bg + C = 0$$

eintreten.

Aus den Ausdrücken von P und Q in 17) erhält man leicht:

$$\begin{aligned} P^2 + Q^2 = \quad & 4r_0{}^2 r_1{}^2 \sin\tfrac{1}{2}(\omega_0 - \omega_1)^2 \\ & + 4r_1{}^2 r_2{}^2 \sin\tfrac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)^2 \\ & + 4r_2{}^2 r_0{}^2 \sin\tfrac{1}{2}(\omega_2 - \omega_0)^2 \\ & + 8r_0{}^2 r_1 r_2 \sin\tfrac{1}{2}(\omega_0 - \omega_1)\cos\tfrac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)\sin\tfrac{1}{2}(\omega_2 - \omega_0) \\ & + 8r_0 r_1{}^2 r_2 \sin\tfrac{1}{2}(\omega_0 - \omega_1)\sin\tfrac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)\cos\tfrac{1}{2}(\omega_2 - \omega_0) \\ & + 8r_0 r_1 r_2{}^2 \cos\tfrac{1}{2}(\omega_0 - \omega_1)\sin\tfrac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)\sin\tfrac{1}{2}(\omega_2 - \omega_0), \end{aligned}$$

also nach 13):

19)

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{4}M^2 = \quad & r_0{}^2 r_1{}^2 \sin\tfrac{1}{2}(\omega_0 - \omega_1)^2 \\ & + r_1{}^2 r_2{}^2 \sin\tfrac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)^2 \\ & + r_2{}^2 r_0{}^2 \sin\tfrac{1}{2}(\omega_2 - \omega_0)^2 \\ & + 2r_0{}^2 r_1 r_2 \sin\tfrac{1}{2}(\omega_0 - \omega_1)\cos\tfrac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)\sin\tfrac{1}{2}(\omega_2 - \omega_0) \\ & + 2r_0 r_1{}^2 r_2 \sin\tfrac{1}{2}(\omega_0 - \omega_1)\sin\tfrac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)\cos\tfrac{1}{2}(\omega_2 - \omega_0) \\ & + 2r_0 r_1 r_2{}^2 \cos\tfrac{1}{2}(\omega_0 - \omega_1)\sin\tfrac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)\sin\tfrac{1}{2}(\omega_2 - \omega_0). \end{aligned}$$

Bezeichnen wir den Parameter des Kegelschnitts durch p, so ist nach N. T. d. K. S. 107. Nr. 2) allgemein

$$p = \pm \frac{2n(Af + Bg + C)}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

wenn man nur das Zeichen so nimmt, dass p positiv ausfällt. Nun ist aber nach 18):

$$Af + Bg + C = 4r_0 r_1 r_2 \sin\tfrac{1}{2}(\omega_0 - \omega_1)\sin\tfrac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)\sin\tfrac{1}{2}(\omega_2 - \omega_0),$$

und nach 11) und 13):

$$\sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{P^2 + Q^2} = M;$$

ferner nach 14):

$$n = \pm \frac{M}{N};$$

also:

$$\frac{n}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{n}{M} = \pm \frac{1}{N},$$

Digitized by Google

ⅾher nach 16):

$$\frac{n}{\sqrt{A^2+B^2}}=\mp\frac{1}{r_0r_1\sin(\omega_0-\omega_1)+r_1r_2\sin(\omega_1-\omega_2)+r_2r_0\sin(\omega_2-\omega_0)}.$$

Also ist nach dem Obigen:

20)

$$p=\pm\frac{8r_0r_1r_2\sin\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)\sin\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)\sin\tfrac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)}{r_0r_1\sin(\omega_0-\omega_1)+r_1r_2\sin(\omega_1-\omega_2)+r_2r_0\sin(\omega_2-\omega_0)},$$

oder:

$$21)\ \ldots\ p=\pm\frac{8\sin\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)\sin\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)\sin\tfrac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)}{\frac{\sin(\omega_1-\omega_2)}{r_0}+\frac{\sin(\omega_2-\omega_0)}{r_1}+\frac{\sin(\omega_0-\omega_1)}{r_2}},$$

wenn man nur das Zeichen so nimmt, dass p positiv ausfällt.

Bezeichnen F, G die Coordinaten des Mittelpunkts des Kegelschnitts, insofern es einen solchen giebt, so ist nach N. T. d. K. S. 93. Nr. 3) allgemein:

$$F=f-\frac{n^2A(Af+Bg+C)}{(n^2-1)(A^2+B^2)}=f-\frac{n^2A(Af+Bg+C)^2}{(n^2-1)(A^2+B^2)(Af+Bg+C)},$$

$$G=g-\frac{n^2B(Af+Bg+C)}{(n^2-1)(A^2+B^2)}=g-\frac{n^2B(Af+Bg+C)^2}{(n^2-1)(A^2+B^2)(Af+Bg+C)};$$

also nach dem Obigen offenbar:

$$22)\ \ldots\ldots\ \left\{\begin{array}{l} F=f-\dfrac{Pp^2}{4(n^2-1)(Af+Bg+C)},\\[2ex] G=g+\dfrac{Qp^2}{4(n^2-1)(Af+Bg+C)}.\end{array}\right.$$

Haben ferner a, b, e ihre bekannte Bedeutung, so ist nach N. T. d. K. S. 99. Nr. 18) im Falle der Ellipse:

$$a^2=\frac{n^2(Af+Bg+C)^2}{(1-n^2)^2(A^2+B^2)}=\frac{p^2}{4(1-n^2)^2},$$

$$b^2=\frac{n^2(Af+Bg+C)^2}{(1-n^2)(A^2+B^2)}=\frac{p^2}{4(1-n^2)},$$

$$e^2=\frac{n^4(Af+Bg+C)^2}{(1-n^2)^2(A^2+B^2)}=\frac{n^2p^2}{4(1-n^2)^2};$$

Digitized by Google

und tm Falle der Hyperbel:

$$a^2 = \frac{n^2(Af+Bg+C)^2}{(n^2-1)^2(A^2+B^2)} = \frac{p^2}{4(n^2-1)^2},$$

$$b^2 = \frac{n^2(Af+Bg+C)^2}{(n^2-1)(A^2+B^2)} = \frac{p^2}{4(n^2-1)},$$

$$e^2 = \frac{n^4(Af+Bg+C)^2}{(n^2-1)^2(A^2+B^2)} = \frac{n^2p^2}{4(n^2-1)^2};$$

also im Falle der Ellipse:

$$23) \quad \left\{ \begin{aligned} a &= \frac{p}{2(1-n^2)}, \\ b &= \frac{p}{2\sqrt{1-n^2}} = a\sqrt{1-n^2}, \\ e &= \frac{np}{2(1-n^2)} = na; \end{aligned} \right.$$

und im Falle der Hyperbel:

$$24) \quad \left\{ \begin{aligned} a &= \frac{p}{2(n^2-1)}, \\ b &= \frac{p}{2\sqrt{n^2-1}} = a\sqrt{n^2-1}, \\ e &= \frac{np}{2(n^2-1)} = na. \end{aligned} \right.$$

Bezeichnen wir die Coordinaten des dem Brennpunkte S oder (fg) zunächst liegenden Scheitels des Kegelschnitts durch f', g'; so ist nach N. T. d. K. S. 97. Nr. 14):

$$f' = f - \frac{nA(Af+Bg+C)}{(n+1)(A^2+B^2)},$$

$$g' = g - \frac{nB(Af+Bg+C)}{(n+1)(A^2+B^2)};$$

also nach dem Obigen, wie man leicht übersieht:

$$f' = f - \frac{Ap^2}{4n(n+1)(Af+Bg+C)},$$

$$g' = g - \frac{Bp^2}{4n(n+1)(Af+Bg+C)};$$

Digitized by Google

...lglich:

$$
5) \quad \ldots\ldots \left\{ \begin{aligned} f' &= f - \frac{Pp^2}{4n(n+1)(Af+Bg+C)}, \\ g' &= g + \frac{Qp^2}{4n(n+1)(Af+Bg+C)}; \end{aligned} \right.
$$

welche Formeln bekanntlich auch für die Parabel, wo $n=1$ ist, gelten.

Bezeichnen wir den auf gewöhnliche Weise genommenen Winkel, welchen die von dem Brennpunkte S oder (fg) nach dem Scheitel $(f'g')$ gezogene Gerade mit dem positiven Theile der Axe der x einschliesst, durch $\overline{\omega}$; so ist für die

Parabel, Ellipse, Hyperbel

respective:

$$f' = f + \tfrac{1}{4}p\cos\overline{\omega},$$
$$g' = g + \tfrac{1}{4}p\sin\overline{\omega};$$

$$f' = f + (a-e)\cos\overline{\omega},$$
$$g' = g + (a-e)\sin\overline{\omega};$$

$$f' = f + (e-a)\cos\overline{\omega},$$
$$g' = g + (e-a)\sin\overline{\omega};$$

also für die Parabel:

$$f' = f + \tfrac{1}{4}p\cos\overline{\omega},$$
$$g' = g + \tfrac{1}{4}p\sin\overline{\omega};$$

und für die Ellipse und Hyperbel:

$$f' = f \pm (a-e)\cos\overline{\omega},$$
$$g' = g \pm (a-e)\sin\overline{\omega};$$

oder, weil nach dem Obigen allgemein $e = na$ ist:

$$f' = f \mp (n-1)a\cos\overline{\omega},$$
$$g' = g \mp (n-1)a\sin\overline{\omega};$$

wenn man für die Ellipse die oberen, für die Hyperbel die unteren Zeichen nimmt.

Digitized by Google

Nach dem Obigen ist also, wie man leicht findet, für die Para[e]
wo $n=1$ ist:

$$26) \quad \left\{\begin{aligned} \cos\overline{\omega} &= -\frac{Pp}{2(Af+Bg+C)}, \\ \sin\overline{\omega} &= \frac{Qp}{2(Af+Bg+C)}. \end{aligned}\right.$$

Für die Ellipse und Hyperbel ist, mit derselben Bestimm[ung]
wegen der Zeichen wie vorher:

$$\mp(n-1)a\cos\overline{\omega} = -\frac{Pp^2}{4n(n+1)(Af+Bg+C)},$$

$$\mp(n-1)a\sin\overline{\omega} = \frac{Qp^2}{4n(n+1)(Af+Bg+C)};$$

also, weil nach dem Obigen:

$$a = \mp\frac{p}{2(n^2-1)} = \mp\frac{p}{2(n-1)(n+1)}$$

ist:

$$27) \quad \left\{\begin{aligned} \cos\overline{\omega} &= -\frac{Pp}{2n(Af+Bg+C)}, \\ \sin\overline{\omega} &= \frac{Qp}{2n(Af+Bg+C)}. \end{aligned}\right.$$

Nach 26) und 27) ist also ganz allgemein für alle drei Ke[gel]-
schnitte:

$$28) \quad \left\{\begin{aligned} \cos\overline{\omega} &= -\frac{Pp}{2n(Af+Bg+C)}, \\ \sin\overline{\omega} &= \frac{Qp}{2n(Af+Bg+C)}; \end{aligned}\right.$$

folglich gleichfalls ganz allgemein:

$$29) \quad \tan\overline{\omega} = -\frac{Q}{P},$$

also nach 6):

$$30) \quad \tan\overline{\omega} = -\frac{r_0(x_1-x_2)+r_1(x_2-x_0)+r_2(x_0-x_1)}{r_0(y_1-y_2)+r_1(y_2-y_0)+r_2(y_0-y_1)},$$

und nach 17):

Digitized by Google

$$31) \ldots \quad \operatorname{tang}\bar{\omega} = \frac{\left\{\begin{array}{l} r_0 r_1 \sin\frac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)\sin\frac{1}{2}(\omega_0+\omega_1) \\ +r_1 r_2 \sin\frac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)\sin\frac{1}{2}(\omega_1+\omega_2) \\ +r_2 r_0 \sin\frac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)\sin\frac{1}{2}(\omega_2+\omega_0) \end{array}\right\}}{\left\{\begin{array}{l} r_0 r_1 \sin\frac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)\cos\frac{1}{2}(\omega_0+\omega_1) \\ +r_1 r_2 \sin\frac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)\cos\frac{1}{2}(\omega_1+\omega_2) \\ +r_2 r_0 \sin\frac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)\cos\frac{1}{2}(\omega_2+\omega_0) \end{array}\right\}},$$

oder:

$$32) \ldots \quad \operatorname{tang}\bar{\omega} = \frac{\left\{\begin{array}{l} \frac{\sin\frac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)\sin\frac{1}{2}(\omega_1+\omega_2)}{r_0} \\ +\frac{\sin\frac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)\sin\frac{1}{2}(\omega_2+\omega_0)}{r_1} \\ +\frac{\sin\frac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)\sin\frac{1}{2}(\omega_0+\omega_1)}{r_2} \end{array}\right\}}{\left\{\begin{array}{l} \frac{\sin\frac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)\cos\frac{1}{2}(\omega_1+\omega_2)}{r_0} \\ +\frac{\sin\frac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)\cos\frac{1}{2}(\omega_2+\omega_0)}{r_1} \\ +\frac{\sin\frac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)\cos\frac{1}{2}(\omega_0+\omega_1)}{r_2} \end{array}\right\}}.$$

Nach 28) ist:

$$\cos\{\tfrac{1}{2}(\omega_0+\omega_1)-\bar{\omega}\} = \cos\tfrac{1}{2}(\omega_0+\omega_1)\cos\bar{\omega}+\sin\tfrac{1}{2}(\omega_0+\omega_1)\sin\bar{\omega}$$
$$= -\frac{\{P\cos\frac{1}{2}(\omega_0+\omega_1)-Q\sin\frac{1}{2}(\omega_0+\omega_1)\}p}{2n(Af+Bg+C)},$$

$$\sin\{\tfrac{1}{2}(\omega_0+\omega_1)-\bar{\omega}\} = \sin\tfrac{1}{2}(\omega_0+\omega_1)\cos\bar{\omega}-\cos\tfrac{1}{2}(\omega_0+\omega_1)\sin\bar{\omega}$$
$$= -\frac{\{P\sin\frac{1}{2}(\omega_0+\omega_1)+Q\cos\frac{1}{2}(\omega_0+\omega_1)\}p}{2n(Af+Bg+C)};$$

nach 17) ist aber, wie man leicht findet:

$$\begin{aligned} &P\cos\tfrac{1}{2}(\omega_0+\omega_1)-Q\sin\tfrac{1}{2}(\omega_0+\omega_1) \\ &= -2r_0r_1\sin\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_1) \\ &\quad -2r_1r_2\sin\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)\cos\tfrac{1}{2}(\omega_2-\omega_0) \\ &\quad -2r_2r_0\sin\tfrac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)\cos\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &P\sin\tfrac{1}{2}(\omega_0+\omega_1)+Q\cos\tfrac{1}{2}(\omega_0+\omega_1) \\ &= -2r_2(r_0-r_1)\sin\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)\sin\tfrac{1}{2}(\omega_2-\omega_0) \end{aligned}$$

und nach 18):

$$Af+Bg+C = 4r_0r_1r_2\sin\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)\sin\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)\sin\tfrac{1}{2}(\omega_2-\omega_0);$$

Digitized by Google

also:

33)

$$\cos\{\tfrac{1}{2}(\omega_0+\omega_1)-\overline{\omega}\}$$
$$=\frac{p}{4n}\left\{\frac{1}{r_0}\cdot\frac{\cot\frac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)}{\sin\frac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)}+\frac{1}{r_1}\cdot\frac{\cot\frac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)}{\sin\frac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)}+\frac{1}{r_2}\cdot\frac{1}{\sin\frac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)\sin\frac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)}\right\}$$
$$\sin\{\tfrac{1}{2}(\omega_0+\omega_1)-\overline{\omega}\}$$
$$=-\frac{p}{4n}\cdot\frac{\frac{1}{r_0}-\frac{1}{r_1}}{\sin\frac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)}.$$

Weil nun aber:

$$\cot\tfrac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)+\cot\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)=-\frac{\sin\frac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)}{\sin\frac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)\sin\frac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)},$$

und folglich:

$$\frac{1}{r_2}\cdot\frac{1}{\sin\frac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)\sin\frac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)}=-\frac{1}{r_2}\cdot\frac{\cot\frac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)}{\sin\frac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)}-\frac{1}{r_2}\cdot\frac{\cot\frac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)}{\sin\frac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)}$$

ist, so kann man diese Formeln auch auf folgende Art darstellen:

34)

$$\cos\{\tfrac{1}{2}(\omega_0+\omega_1)-\overline{\omega}\}$$
$$=\frac{p}{4n}\left\{\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)\cdot\frac{\cot\frac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)}{\sin\frac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)}-\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_0}\right)\cdot\frac{\cot\frac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)}{\sin\frac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)}\right\},$$
$$\sin\{\tfrac{1}{2}(\omega_0+\omega_1)-\overline{\omega}\}$$
$$=-\frac{p}{4n}\cdot\frac{\frac{1}{r_0}-\frac{1}{r_1}}{\sin\frac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)}.$$

Man hat also jetzt überhaupt die folgenden Formeln:

35)

$$\cos\{\tfrac{1}{2}(\omega_0+\omega_1)-\overline{\omega}\}$$
$$=\frac{p}{4n}\left\{\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)\cdot\frac{\cot\frac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)}{\sin\frac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)}-\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_0}\right)\cdot\frac{\cot\frac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)}{\sin\frac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)}\right\},$$
$$\cos\{\tfrac{1}{2}(\omega_1+\omega_2)-\overline{\omega}\}$$
$$=\frac{p}{4n}\left\{\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_0}\right)\cdot\frac{\cot\frac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)}{\sin\frac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)}-\left(\frac{1}{r_0}-\frac{1}{r_1}\right)\cdot\frac{\cot\frac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)}{\sin\frac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)}\right\},$$
$$\cos\{\tfrac{1}{2}(\omega_2+\omega_0)-\overline{\omega}\}$$
$$=\frac{p}{4n}\left\{\left(\frac{1}{r_0}-\frac{1}{r_1}\right)\cdot\frac{\cot\frac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)}{\sin\frac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)}-\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)\cdot\frac{\cot\frac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)}{\sin\frac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)}\right\};$$

Digitized by Google

36)

$$\sin\{\tfrac{1}{2}(\omega_0+\omega_1)-\overline{\omega}\} = -\frac{p}{4n}\cdot\frac{\frac{1}{r_0}-\frac{1}{r_1}}{\sin\frac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)},$$

$$\sin\{\tfrac{1}{2}(\omega_1+\omega_2)-\overline{\omega}\} = -\frac{p}{4n}\cdot\frac{\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}}{\sin\frac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)},$$

$$\sin\{\tfrac{1}{2}(\omega_2+\omega_0)-\overline{\omega}\} = -\frac{p}{4n}\cdot\frac{\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_0}}{\sin\frac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)};$$

so:

37)

$$\tan\{\tfrac{1}{2}(\omega_0+\omega_1)-\overline{\omega}\} = -\frac{\frac{1}{r_0}-\frac{1}{r_1}}{\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)\cot\frac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)-\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_0}\right)\cot\frac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)},$$

$$\tan\{\tfrac{1}{2}(\omega_1+\omega_2)-\overline{\omega}\} = -\frac{\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}}{\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_0}\right)\cot\frac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)-\left(\frac{1}{r_0}-\frac{1}{r_1}\right)\cot\frac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)},$$

$$\tan\{\tfrac{1}{2}(\omega_2+\omega_0)-\overline{\omega}\} = -\frac{\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_0}}{\left(\frac{1}{r_0}-\frac{1}{r_1}\right)\cot\frac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)-\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)\cot\frac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)};$$

er:

Digitized by Google

38)

$$\tang\{\tfrac{1}{2}(\omega_0+\omega_1)-\bar{\omega}\}$$
$$=\frac{\frac{r_2}{r_0}-\frac{r_2}{r_1}}{\left(1-\frac{r_2}{r_1}\right)\cot\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)+\left(1-\frac{r_2}{r_0}\right)\cot\tfrac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)},$$

$$\tang\{\tfrac{1}{2}(\omega_1+\omega_2)-\bar{\omega}\}$$
$$=\frac{\frac{r_0}{r_1}-\frac{r_0}{r_2}}{\left(1-\frac{r_0}{r_2}\right)\cot\tfrac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)+\left(1-\frac{r_0}{r_1}\right)\cot\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)},$$

$$\tang\{\tfrac{1}{2}(\omega_2+\omega_0)-\bar{\omega}\}$$
$$=\frac{\frac{r_1}{r_2}-\frac{r_1}{r_0}}{\left(1-\frac{r_1}{r_0}\right)\cot\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)+\left(1-\frac{r_1}{r_2}\right)\cot\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)}.$$

Bezeichnen wir die Coordinaten des am weitesten von dem Br[…] punkte S oder (fg) entfernten Scheitels durch f_1', g_1'; so ist […] N. T. d. K. S. 97. Nr. 14*):

$$f_1'=f-\frac{nA(Af+Bg+C)}{(n-1)(A^2+B^2)},$$

$$g_1'=g-\frac{nB(Af+Bg+C)}{(n-1)(A^2+B^2)};$$

also nach dem Obigen, wie man leicht übersieht:

$$f_1'=f-\frac{Ap^2}{4n(n-1)(Af+Bg+C)},$$

$$g_1'=g-\frac{Bp^2}{4n(n-1)(Af+Bg+C)};$$

folglich:

$$39)\quad\ldots\ldots\quad\left\{\begin{array}{l} f_1'=f-\dfrac{Pp^2}{4n(n-1)(Af+Bg+C)},\\[2ex] g_1'=g+\dfrac{Qp^2}{4n(n-1)(Af+Bg+C)}; \end{array}\right.$$

welche Formeln natürlich auf die Parabel, die nur einen Sch[…]

Digitized by Google

ist und wo $n = 1$ ist, keine Anwendung finden. Die Lage der von dem Brennpunkte S oder (fg) nach dem Scheitel $(f_1'g_1')$ gezogenen Geraden ist natürlich jederzeit durch den Winkel $\overline{\omega}$ leicht gegeben. es einer weiteren Erläuterung nicht bedarf.

Ueber den oben gefundenen Ausdruck 14) der Grösse n wollen wir nun noch das Folgende bemerken.

Nach diesem Ausdrucke ist

$$n^2 = \frac{M^2}{N^2}, \quad \text{also } 1 - n^2 = \frac{N^2 - M^2}{N^2};$$

und nach 16) und 19) ist:

$$\begin{aligned}
N^2 - M^2 = \quad & \{r_0 r_1 \sin(\omega_0 - \omega_1) + r_1 r_2 \sin(\omega_1 - \omega_2) + r_2 r_0 \sin(\omega_2 - \omega_0)\}^2 \\
& - 4 r_0^2 r_1^2 \sin\tfrac{1}{2}(\omega_0 - \omega_1)^2 \\
& - 4 r_1^2 r_2^2 \sin\tfrac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)^2 \\
& - 4 r_2^2 r_0^2 \sin\tfrac{1}{2}(\omega_2 - \omega_0)^2 \\
& - 8 r_0^2 r_1 r_2 \sin\tfrac{1}{2}(\omega_0 - \omega_1) \cos\tfrac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2) \sin\tfrac{1}{2}(\omega_2 - \omega_0) \\
& - 8 r_0 r_1^2 r_2 \sin\tfrac{1}{2}(\omega_0 - \omega_1) \sin\tfrac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2) \cos\tfrac{1}{2}(\omega_2 - \omega_0) \\
& - 8 r_0 r_1 r_2^2 \cos\tfrac{1}{2}(\omega_0 - \omega_1) \sin\tfrac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2) \sin\tfrac{1}{2}(\omega_2 - \omega_0),
\end{aligned}$$

also, wenn man

$$\begin{aligned}
\sin(\omega_0 - \omega_1) &= 2 \sin\tfrac{1}{2}(\omega_0 - \omega_1) \cos\tfrac{1}{2}(\omega_0 - \omega_1), \\
\sin(\omega_1 - \omega_2) &= 2 \sin\tfrac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2) \cos\tfrac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2), \\
\sin(\omega_2 - \omega_0) &= 2 \sin\tfrac{1}{2}(\omega_2 - \omega_0) \cos\tfrac{1}{2}(\omega_2 - \omega_0)
\end{aligned}$$

setzt:

$$\begin{aligned}
N^2 - M^2 = & - 4 r_0^2 r_1^2 \sin\tfrac{1}{2}(\omega_0 - \omega_1)^4 \\
& - 4 r_1^2 r_2^2 \sin\tfrac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)^4 \\
& - 4 r_2^2 r_0^2 \sin\tfrac{1}{2}(\omega_2 - \omega_0)^4 \\
& - 8 r_0^2 r_1 r_2 \sin\tfrac{1}{2}(\omega_0 - \omega_1) \sin\tfrac{1}{2}(\omega_2 - \omega_0) \\
& \qquad \times \{\cos\tfrac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2) - \cos\tfrac{1}{2}(\omega_0 - \omega_1) \cos\tfrac{1}{2}(\omega_2 - \omega_0)\} \\
& - 8 r_0 r_1^2 r_2 \sin\tfrac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2) \sin\tfrac{1}{2}(\omega_0 - \omega_1) \\
& \qquad \times \{\cos\tfrac{1}{2}(\omega_2 - \omega_0) - \cos\tfrac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2) \cos\tfrac{1}{2}(\omega_0 - \omega_1)\} \\
& - 8 r_0 r_1 r_2^2 \sin\tfrac{1}{2}(\omega_2 - \omega_0) \sin\tfrac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2) \\
& \qquad \times \{\cos\tfrac{1}{2}(\omega_0 - \omega_1) - \cos\tfrac{1}{2}(\omega_2 - \omega_0) \cos\tfrac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)\}.
\end{aligned}$$

Nun ist aber, wie man mittelst einiger einfachen goniometrischen Transformationen leicht findet:

Digitized by Google

$$\cos\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)-\cos\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)\cos\tfrac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)$$
$$=-\sin\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)\sin\tfrac{1}{2}(\omega_2-\omega_0),$$

$$\cos\tfrac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)-\cos\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)\cos\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)$$
$$=-\sin\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)\sin\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_1),$$

$$\cos\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)-\cos\tfrac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)\cos\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)$$
$$=-\sin\tfrac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)\sin\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2);$$

also, wenn man diese Ausdrücke in den obigen Ausdruck von N^2-M^2 einführt:

$$\begin{aligned}N^2-M^2=&-4r_0{}^2r_1{}^2\sin\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)^4\\&-4r_1{}^2r_2{}^2\sin\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)^4\\&-4r_2{}^2r_0{}^2\sin\tfrac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)^4\\&+8r_0{}^2r_1r_2\sin\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)^2\sin\tfrac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)^2\\&+8r_0r_1{}^2r_2\sin\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)^2\sin\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)^2\\&+8r_0r_1r_2{}^2\sin\tfrac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)^2\sin\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)^2,\end{aligned}$$

folglich, wie man leicht übersieht:

$$\begin{aligned}&N^2-M^2\\=&\quad 16r_0{}^2r_1r_2\sin\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)^2\sin\tfrac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)^2\\&-4\{r_0r_1\sin\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)^2-r_1r_2\sin\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)^2+r_2r_0\sin\tfrac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)^2\}^2\end{aligned}$$

oder:

$$\begin{aligned}&N^2-M^2\\=&\quad 16r_0r_1{}^2r_2\sin\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)^2\sin\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)^2\\&-4\{r_0r_1\sin\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)^2+r_1r_2\sin\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)^2-r_2r_0\sin\tfrac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)^2\}^2\end{aligned}$$

oder:

$$\begin{aligned}&N^2-M^2\\=&\quad 16r_0r_1r_2{}^2\sin\tfrac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)^2\sin\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)^2\\&-4\{r_0r_1\sin\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)^2-r_1r_2\sin\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)^2-r_2r_0\sin\tfrac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)^2\}^2\end{aligned}$$

Wenn man den obigen ersten Ausdruck von N^2-M^2 durch

$$4.r_0{}^2r_1{}^2r_2{}^2=4.(\sqrt{r_0})^4.(\sqrt{r_1})^4.(\sqrt{r_2})^4$$

dividirt, so erhält man:

Digitized by Google

$$\frac{M^2-N^2}{4r_0^2r_1^2r_2^2}=\left\{\frac{\sin\frac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)}{\sqrt{r_0}}\right\}^4$$
$$+\left\{\frac{\sin\frac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)}{\sqrt{r_1}}\right\}^4$$
$$+\left\{\frac{\sin\frac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)}{\sqrt{r_2}}\right\}^4$$
$$-2\left\{\frac{\sin\frac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)}{\sqrt{r_0}}\right\}^2.\left\{\frac{\sin\frac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)}{\sqrt{r_1}}\right\}^2$$
$$-2\left\{\frac{\sin\frac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)}{\sqrt{r_1}}\right\}^2.\left\{\frac{\sin\frac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)}{\sqrt{r_2}}\right\}^2$$
$$-2\left\{\frac{\sin\frac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)}{\sqrt{r_2}}\right\}^2.\left\{\frac{\sin\frac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)}{\sqrt{r_0}}\right\}^2.$$

Nun ist aber, wie man leicht zeigen kann, allgemein:

$$x^4+y^4+z^4-2x^2y^2-2y^2z^2-2z^2x^2$$
$$=-(x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z),$$

also nach dem Obigen:

$$\frac{N^2-M^2}{4r_0^2r_1^2r_2^2}=\left\{\frac{\sin\frac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)}{\sqrt{r_0}}+\frac{\sin\frac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)}{\sqrt{r_1}}+\frac{\sin\frac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)}{\sqrt{r_2}}\right\}$$
$$\times\left\{-\frac{\sin\frac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)}{\sqrt{r_0}}+\frac{\sin\frac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)}{\sqrt{r_1}}+\frac{\sin\frac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)}{\sqrt{r_2}}\right\}$$
$$\times\left\{\frac{\sin\frac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)}{\sqrt{r_0}}-\frac{\sin\frac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)}{\sqrt{r_1}}+\frac{\sin\frac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)}{\sqrt{r_2}}\right\}$$
$$\times\left\{\frac{\sin\frac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)}{\sqrt{r_0}}+\frac{\sin\frac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)}{\sqrt{r_1}}-\frac{\sin\frac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)}{\sqrt{r_2}}\right\}.$$

Soll nun $N^2-M^2=0$, also nach dem Obigen $1-n^2=0$, $n^2=1$, $n=1$ sein, welchem Falle bekanntlich die Parabel entspricht, so muss wenigstens eine der vier folgenden Gleichungen erfüllt sein:

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)}{\sqrt{r_0}}+\frac{\sin\frac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)}{\sqrt{r_1}}+\frac{\sin\frac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)}{\sqrt{r_2}}=0,$$

$$-\frac{\sin\frac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)}{\sqrt{r_0}}+\frac{\sin\frac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)}{\sqrt{r_1}}+\frac{\sin\frac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)}{\sqrt{r_2}}=0,$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)}{\sqrt{r_0}}-\frac{\sin\frac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)}{\sqrt{r_1}}+\frac{\sin\frac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)}{\sqrt{r_2}}=0,$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)}{\sqrt{r_0}}+\frac{\sin\frac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)}{\sqrt{r_1}}-\frac{\sin\frac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)}{\sqrt{r_2}}=0.$$

Digitized by Google

Sollten zwei dieser Gleichungen erfüllt sein:

die 1ste und 2te, 1ste und 3te, 1ste und 4te;
2te und 3te, 2te und 4te;
3te und 4te;

so würde aus den beiden betreffenden Gleichungen durch Subtractio oder Addition derselben beziehungsweise folgen:

$$\sin\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)=0,\quad \sin\tfrac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)=0,\quad \sin\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)=0;$$
$$\sin\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)=0,\quad \sin\tfrac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)=0;$$
$$\sin\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)=0;$$

und unter der Voraussetzung, dass keine der drei Grössen

$$\sin\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_1),\quad \sin\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2),\quad \sin\tfrac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)$$

verschwindet, wird man also schliessen können, dass niemals *zwei* der vier obigen Gleichungen zugleich erfüllt sein können, also immer nur eine der vier obigen Gleichungen erfüllt sein kann.

Welche der vier in Rede stehenden Gleichungen erfüllt ist, kann nur in besonderen Fällen sicher entschieden werden.

Um hierfür ein Beispiel zu geben, bemerken wir, dass für die Berechnung der Cometenbahnen der Fall von besonderer Wichtigkeit ist, wenn der Kegelschnitt eine Parabel ist, und in dieser Parabel die Punkte A_0, A_1, A_2 in dieser Ordnung auf einander folgen, indem der von S aus nach der Seite der Parabel hin liegende Winkel A_0SA_2, welchem die Summe der beiden von S aus nach der Parabel hin liegenden Winkel A_0SA_1, A_1SA_2 gleich ist, 180^0 nicht übersteigt, wobei wir voraussetzen wollen, dass von einer gewissen von S ausgehenden Geraden SK an, die Winkel ω_0, ω_1, ω_2 nach der durch die Punkte A_0, A_1, A_2 angegebenen Richtung hin von 0 bis 360^0 gezählt werden.

Es können nur die vier in Taf. IV.

Fig. I., Fig. II., Fig. III., Fig. IV.

dargestellten Fälle vorkommen, welche Fälle wir beziehungsweise durch

I., II., III., IV.

bezeichnen wollen.

Digitized by Google

In dem Falle I. ist*):

$$\omega_1 - \omega_2 = KSA_1 - KSA_2$$
$$= - A_1SA_2,$$

$$\omega_2 - \omega_0 = KSA_2 - KSA_0$$
$$= A_0SA_2,$$

$$\omega_0 - \omega_1 = KSA_0 - KSA_1$$
$$= - A_0SA_1.$$

Also entsprechen den vier obigen Gleichungen die vier folgenden Gleichungen:

$$-\frac{\sin\frac{1}{2}A_1SA_2}{\sqrt{r_0}} + \frac{\sin\frac{1}{2}A_0SA_2}{\sqrt{r_1}} - \frac{\sin\frac{1}{2}A_0SA_1}{\sqrt{r_2}} = 0,$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}A_1SA_2}{\sqrt{r_0}} + \frac{\sin\frac{1}{2}A_0SA_2}{\sqrt{r_1}} - \frac{\sin\frac{1}{2}A_0SA_1}{\sqrt{r_2}} = 0,$$

$$-\frac{\sin\frac{1}{2}A_1SA_2}{\sqrt{r_0}} - \frac{\sin\frac{1}{2}A_0SA_2}{\sqrt{r_1}} - \frac{\sin\frac{1}{2}A_0SA_1}{\sqrt{r_2}} = 0,$$

$$-\frac{\sin\frac{1}{2}A_1SA_2}{\sqrt{r_0}} + \frac{\sin\frac{1}{2}A_0SA_2}{\sqrt{r_1}} + \frac{\sin\frac{1}{2}A_0SA_1}{\sqrt{r_2}} = 0.$$

In dem Falle II. ist:

$$\omega_1 - \omega_2 = KSA_1 - KSA_2$$
$$= - A_1SA_2,$$

$$\omega_2 - \omega_0 = KSA_2 - (360^0 - KSA_0)$$
$$= A_0SA_2 - 360^0,$$

$$\omega_0 - \omega_1 = (360^0 - KSA_0) - KSA_1$$
$$= 360^0 - A_0SA_1.$$

Also entsprechen den vier obigen Gleichungen die vier folgenden Gleichungen:

---

*) Im Folgenden werden alle Winkel von S an nach der Seite der Parabel hin genommen.

Digitized by Google

$$-\frac{\sin\frac{1}{2}A_1SA_2}{\sqrt{r_0}}-\frac{\sin\frac{1}{2}A_0SA_2}{\sqrt{r_1}}+\frac{\sin\frac{1}{2}A_0SA_1}{\sqrt{r_2}}=0,$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}A_1SA_2}{\sqrt{r_0}}-\frac{\sin\frac{1}{2}A_0SA_2}{\sqrt{r_1}}+\frac{\sin\frac{1}{2}A_0SA_1}{\sqrt{r_2}}=0,$$

$$-\frac{\sin\frac{1}{2}A_1SA_2}{\sqrt{r_0}}+\frac{\sin\frac{1}{2}A_0SA_2}{\sqrt{r_1}}+\frac{\sin\frac{1}{2}A_0SA_1}{\sqrt{r_2}}=0,$$

$$-\frac{\sin\frac{1}{2}A_1SA_2}{\sqrt{r_0}}-\frac{\sin\frac{1}{2}A_0SA_2}{\sqrt{r_2}}-\frac{\sin\frac{1}{2}A_0SA_1}{\sqrt{r_2}}=0.$$

In dem Falle III. ist:

$$\begin{aligned}\omega_1-\omega_2 &= (360^0-KSA_1)-KSA_2\\ &= 360^0-A_1SA_2,\\ \omega_2-\omega_0 &= KSA_2-(360^0-KSA_0)\\ &= A_0SA_2-360^0,\\ \omega_0-\omega_1 &= (360^0-KSA_0)-(360^0-KSA_1)\\ &= -A_0SA_1.\end{aligned}$$

Also entsprechen den vier obigen Gleichungen die vier folgenden Gleichungen:

$$\frac{\sin\frac{1}{2}A_1SA_2}{\sqrt{r_0}}-\frac{\sin\frac{1}{2}A_0SA_2}{\sqrt{r_1}}-\frac{\sin\frac{1}{2}A_0SA_1}{\sqrt{r_2}}=0,$$

$$-\frac{\sin\frac{1}{2}A_1SA_2}{\sqrt{r_0}}-\frac{\sin\frac{1}{2}A_0SA_2}{\sqrt{r_1}}-\frac{\sin\frac{1}{2}A_0SA_1}{\sqrt{r_2}}=0,$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}A_1SA_2}{\sqrt{r_0}}+\frac{\sin\frac{1}{2}A_0SA_2}{\sqrt{r_1}}-\frac{\sin\frac{1}{2}A_0SA_1}{\sqrt{r_2}}=0,$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}A_1SA_2}{\sqrt{r_0}}-\frac{\sin\frac{1}{2}A_0SA_2}{\sqrt{r_1}}+\frac{\sin\frac{1}{2}A_0SA_1}{\sqrt{r_2}}=0.$$

In dem Falle IV. ist:

$$\begin{aligned}\omega_1-\omega_2 &= (360^0-KSA_1)-(360^0-KSA_2)\\ &= -A_1SA_2,\\ \omega_2-\omega_0 &= (360^0-KSA_2)-(360^0-KSA_0)\\ &= A_0SA_2,\\ \omega_0-\omega_1 &= (360^0-KSA_0)-(360^0-KSA_1)\\ &= -A_0SA_1.\end{aligned}$$

Digitized by Google

Also entsprechen den vier obigen Gleichungen die vier folgenden Gleichungen:

$$-\frac{\sin\frac{1}{2}A_1SA_2}{\sqrt{r_0}}+\frac{\sin\frac{1}{2}A_0SA_2}{\sqrt{r_1}}-\frac{\sin\frac{1}{2}A_0SA_1}{\sqrt{r_2}}=0,$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}A_1SA_2}{\sqrt{r_0}}+\frac{\sin\frac{1}{2}A_0SA_2}{\sqrt{r_1}}-\frac{\sin\frac{1}{2}A_0SA_1}{\sqrt{r_2}}=0,$$

$$-\frac{\sin\frac{1}{2}A_1SA_2}{\sqrt{r_0}}-\frac{\sin\frac{1}{2}A_0SA_2}{\sqrt{r_1}}-\frac{\sin\frac{1}{2}A_0SA_1}{\sqrt{r_2}}=0,$$

$$-\frac{\sin\frac{1}{2}A_1SA_2}{\sqrt{r_0}}+\frac{\sin\frac{1}{2}A_0SA_2}{\sqrt{r_1}}+\frac{\sin\frac{1}{2}A_0SA_1}{\sqrt{r_2}}=0.$$

Man sieht hieraus, dass es jetzt bloss darauf ankommt, zu entscheiden, welche von den vier Gleichungen:

$$\frac{\sin\frac{1}{2}A_1SA_2}{\sqrt{r_0}}+\frac{\sin\frac{1}{2}A_0SA_2}{\sqrt{r_1}}+\frac{\sin\frac{1}{2}A_0SA_1}{\sqrt{r_2}}=0,$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}A_1SA_2}{\sqrt{r_0}}+\frac{\sin\frac{1}{2}A_0SA_2}{\sqrt{r_1}}-\frac{\sin\frac{1}{2}A_0SA_1}{\sqrt{r_2}}=0,$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}A_1SA_2}{\sqrt{r_0}}-\frac{\sin\frac{1}{2}A_0SA_2}{\sqrt{r_1}}+\frac{\sin\frac{1}{2}A_0SA_1}{\sqrt{r_2}}=0,$$

$$-\frac{\sin\frac{1}{2}A_1SA_2}{\sqrt{r_0}}+\frac{\sin\frac{1}{2}A_0SA_2}{\sqrt{r_1}}+\frac{\sin\frac{1}{2}A_0SA_1}{\sqrt{r_2}}=0$$

die richtige ist.

Da nun aber im vorliegenden Falle die Grössen

$$\sin\tfrac{1}{2}A_1SA_2,\qquad \sin\tfrac{1}{2}A_0SA_2,\qquad \sin\tfrac{1}{2}A_0SA_1$$

sämmtlich positiv sind, so ist, wenn nur diese Grössen nicht sämmtlich verschwinden, offenbar die erste Gleichung unstatthaft, und es kommt also bloss darauf an, zu entscheiden, welche von den drei Gleichungen:

$$\frac{\sin A_1SA_2}{\sqrt{r_0}}+\frac{\sin\frac{1}{2}A_0SA_2}{\sqrt{r_1}}-\frac{\sin\frac{1}{2}A_0SA_1}{\sqrt{r_2}}=0,$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}A_1SA_2}{\sqrt{r_0}}-\frac{\sin\frac{1}{2}A_0SA_2}{\sqrt{r_1}}+\frac{\sin\frac{1}{2}A_0SA_1}{\sqrt{r_2}}=0,$$

$$-\frac{\sin\frac{1}{2}A_1SA_2}{\sqrt{r_0}}+\frac{\sin\frac{1}{2}A_0SA_2}{\sqrt{r_1}}+\frac{\sin\frac{1}{2}A_0SA_1}{\sqrt{r_2}}=0$$

die richtige ist.

Digitized by Google

Nach den Formeln der ebenen Trigonometrie ist nun bekanntlich, wobei man sich die Punkte A_0, A_1, A_2 durch Sehnen der Parabel verbunden zu denken hat:

$$\cos A_1SA_2 = \frac{r_1^2 + r_2^2 - \overline{A_1A_2}^2}{2r_1r_2},$$

$$\cos A_0SA_2 = \frac{r_0^2 + r_2^2 - \overline{A_0A_2}^2}{2r_0r_2},$$

$$\cos A_0SA_1 = \frac{r_0^2 + r_1^2 - \overline{A_0A_1}^2}{2r_0r_1},$$

also:

$$\frac{\sin\frac{1}{2}A_1SA_2}{\sqrt{r_0}} = \frac{\sqrt{\overline{A_1A_2}^2 - (r_1 - r_2)^2}}{2\sqrt{r_0r_1r_2}},$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}A_0SA_2}{\sqrt{r_1}} = \frac{\sqrt{\overline{A_0A_2}^2 - (r_0 - r_2)^2}}{2\sqrt{r_0r_1r_2}},$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}A_0SA_1}{\sqrt{r_2}} = \frac{\sqrt{\overline{A_0A_1}^2 - (r_0 - r_1)^2}}{2\sqrt{r_0r_1r_2}};$$

so dass es also jetzt darauf ankommt, zu entscheiden, welche von den drei Gleichungen:

$$\sqrt{\overline{A_1A_2}^2 - (r_1 - r_2)^2} + \sqrt{\overline{A_0A_2}^2 - (r_0 - r_2)^2} - \sqrt{\overline{A_0A_1}^2 - (r_0 - r_1)^2} = 0,$$

$$\sqrt{\overline{A_1A_2}^2 - (r_1 - r_2)^2} - \sqrt{\overline{A_0A_2}^2 - (r_0 - r_2)^2} + \sqrt{\overline{A_0A_1}^2 - (r_0 - r_1)^2} = 0,$$

$$-\sqrt{\overline{A_1A_2}^2 - (r_1 - r_2)^2} + \sqrt{\overline{A_0A_2}^2 - (r_0 - r_2)^2} + \sqrt{\overline{A_0A_1}^2 - (r_0 - r_1)^2} = 0$$

die richtige ist.

Bezeichnen wir nun in dem gewöhnlichen, der Theorie der Parabel zu Grunde liegenden Coordinatensysteme die Coordinaten der Punkte

$$A_0, \quad A_1, \quad A_2$$

beziehungsweise durch

$$\xi_0, \eta_0; \quad \xi_1, \eta_1; \quad \xi_2, \eta_2$$

und den Parameter der Parabel durch p; so ist bekanntlich:

Digitized by Google

$$r_0 = \tfrac{1}{4}p + \xi_0,$$

$$r_1 = \tfrac{1}{4}p + \xi_1,$$

$$r_2 = \tfrac{1}{4}p + \xi_2;$$

lso:

$$r_1 - r_2 = \xi_1 - \xi_2,$$

$$r_0 - r_2 = \xi_0 - \xi_2,$$

$$r_0 - r_1 = \xi_0 - \xi_1;$$

ner ist:

$$\overline{A_1A_2}^2 = (\xi_1 - \xi_2)^2 + (\eta_1 - \eta_2)^2,$$

$$\overline{A_0A_2}^2 = (\xi_0 - \xi_2)^2 + (\eta_0 - \eta_2)^2,$$

$$\overline{A_0A_1}^2 = (\xi_0 - \xi_1)^2 + (\eta_0 - \eta_1)^2;$$

lglich nach dem Obigen:

$$\overline{A_1A_2}^2 - (r_1 - r_2)^2 = (\eta_1 - \eta_2)^2,$$

$$\overline{A_0A_2}^2 - (r_0 - r_2)^2 = (\eta_0 - \eta_2)^2,$$

$$\overline{A_0A_1}^2 - (r_0 - r_1)^2 = (\eta_0 - \eta_1)^2.$$

nter den gemachten Voraussetzungen is aber offenbar:

$$\eta_0 \gtrless \eta_1 \gtrless \eta_2,$$

lso mit Beziehung der oberen und unteren Zeichen auf einander:

$$\sqrt{\overline{A_1A_2}^2 - (r_1 - r_2)^2} = \pm(\eta_1 - \eta_2),$$

$$\sqrt{\overline{A_0A_2}^2 - (r_0 - r_2)^2} = \pm(\eta_0 - \eta_2),$$

$$\sqrt{\overline{A_0A_1}^2 - (r_0 - r_1)^2} = \pm(\eta_0 - \eta_1)$$

der:

$$\sqrt{\overline{A_1A_2}^2 - (r_1 - r_2)^2} = \pm\eta_1 \mp \eta_2,$$

$$\sqrt{\overline{A_0A_2}^2 - (r_0 - r_2)^2} = \pm\eta_0 \mp \eta_2,$$

$$\sqrt{\overline{A_0A_1}^2 - (r_0 - r_1)^2} = \pm\eta_0 \mp \eta_1;$$

lso:

Digitized by Google

$$\sqrt{\overline{A_1A_2}^2-(r_1-r_2)^2}-\sqrt{\overline{A_0A_2}^2-(r_0-r_2)^2}+\sqrt{\overline{A_0A_1}^2-(r_0-r_1)^2}=0,$$

welche Gleichung folglich die allein richtige ist. Daher ist nach dem Obigen auch die Gleichung

$$\frac{\sin\frac{1}{2}A_1SA_2}{\sqrt{r_0}}-\frac{\sin\frac{1}{2}A_0SA_2}{\sqrt{r_1}}+\frac{\sin\frac{1}{2}A_0SA_1}{\sqrt{r_2}}=0$$

die allein richtige.

Vergleicht man nun dies mit dem Obigen, so ergiebt sich Folgendes:

In dem Falle I. ist:

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)}{\sqrt{r_0}}+\frac{\sin\frac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)}{\sqrt{r_1}}+\frac{\sin\frac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)}{\sqrt{r_2}}=0.$$

In dem Falle II. ist:

$$-\frac{\sin\frac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)}{\sqrt{r_0}}+\frac{\sin\frac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)}{\sqrt{r_1}}+\frac{\sin\frac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)}{\sqrt{r_2}}=0.$$

In dem Falle III. ist:

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)}{\sqrt{r_0}}+\frac{\sin\frac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)}{\sqrt{r_1}}-\frac{\sin\frac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)}{\sqrt{r_2}}=0.$$

In dem Falle IV. ist:

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)}{\sqrt{r_0}}+\frac{\sin\frac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)}{\sqrt{r_1}}+\frac{\sin\frac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)}{\sqrt{r_2}}=0.$$

Also ist in den Fällen I. und IV.:

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)}{\sqrt{r_0}}+\frac{\sin\frac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)}{\sqrt{r_1}}+\frac{\sin\frac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)}{\sqrt{r_2}}=0;$$

dagegen ist in den Fällen II. und III. beziehungsweise:

$$-\frac{\sin\frac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)}{\sqrt{r_0}}+\frac{\sin\frac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)}{\sqrt{r_1}}+\frac{\sin\frac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)}{\sqrt{r_2}}=0$$

und

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)}{\sqrt{r_0}}+\frac{\sin\frac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)}{\sqrt{r_1}}-\frac{\sin\frac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)}{\sqrt{r_2}}=0.$$

Digitized by Google

§. 4.

Hiernach gehen wir nun zu der Lösung der folgenden Aufgabe über:

Mit dem gegebenen Brennpunkte S durch die drei gegebenen Punkte A_0, A_1, A_2 eine Hyperbel so zu beschreiben, dass der eine der drei gegebenen Punkte in dem einen Zweige liegt, die beiden anderen gegebenen Punkte in dem anderen Zweige dieser Hyperbel liegen.

Wir wollen annehmen, dass der Punkt A_0 oder $(x_0 y_0)$ in dem einen Zweige, die beiden Punkte A_1, A_2 oder $(x_1 y_1)$, $(x_2 y_2)$ in dem anderen Zweige der zu beschreibenden Hyperbel liegen sollen.

Nach N. T. d. K. S. 79. Nr. 2) ist die Gleichung der gesuchten Hyperbel:

$$1) \ldots\quad n^2(Ax+By+C)^2 = (A^2+B^2)\{(x-f)^2+(y-g)^2\},$$

woraus sich, um die Bedingungen der Aufgabe zu erfüllen, nach N. T. d. K. S. 82. die folgenden Gleichungen, in denen die oberen und unteren Zeichen sich auf einander beziehen, ergeben:

$$2) \ldots \begin{cases} n(Ax_0+By_0+C) = \pm\sqrt{(A^2+B^2)\{(x_0-f)^2+(y_0-g)^2\}}, \\ n(Ax_1+By_1+C) = \mp\sqrt{(A^2+B^2)\{(x_1-f)^2+(y_1-g)^2\}}, \\ n(Ax_2+By_2+C) = \mp\sqrt{(A^2+B^2)\{(x_2-f)^2+(y_2-g)^2\}}; \end{cases}$$

oder nach §. 2. 1):

$$3) \ldots\ldots \begin{cases} n(Ax_0+By_0+C) = \pm r_0\sqrt{A^2+B^2}, \\ n(Ax_1+By_1+C) = \mp r_1\sqrt{A^2+B^2}, \\ n(Ax_2+By_2+C) = \mp r_2\sqrt{A^2+B^2}; \end{cases}$$

so dass es also jetzt darauf ankommt, die Grössen A, B, C und das positive n so zu bestimmen, dass diesen drei Gleichungen, oder den drei Gleichungen:

$$4) \ldots\ldots \begin{cases} nAx_0+nBy_0+nC = \pm r_0\sqrt{A^2+B^2}, \\ nAx_1+nBy_1+nC = \mp r_1\sqrt{A^2+B^2}, \\ nAx_2+nBy_2+nC = \mp r_2\sqrt{A^2+B^2} \end{cases}$$

Digitized by Google

genügt wird. Setzen wir nun diese Gleichungen als erfüllt voraus multipliciren sie nach der Reihe zuerst mit:

$$y_1-y_2,\quad y_2-y_0,\quad y_0-y_1;$$

dann mit:

$$x_1-x_2,\quad x_2-x_0,\quad x_0-x_1;$$

ferner mit:

$$x_1y_2-y_1x_2,\quad x_2y_0-y_2x_0,\quad x_0y_1-y_0x_1;$$

und addiren sie in jedem einzelnen Falle zu einander; so erhalten wir, wenn der Kürze wegen:

$$5)\ \ldots\ N= x_0(y_1-y_2)+x_1(y_2-y_0)+x_2(y_0-y_1)$$
$$=-\{y_0(x_1-x_2)+y_1(x_2-x_0)+y_2(x_0-x_1)\}$$
$$=(x_0y_1-y_0x_1)+(x_1y_2-y_1x_2)+(x_2y_0-y_2x_0)$$

und:

$$6)\ \ldots \left\{\begin{array}{l} P=r_0(y_1-y_2)-r_1(y_2-y_0)-r_2(y_0-y_1),\\ Q=r_0(x_1-x_2)-r_1(x_2-x_0)-r_2(x_0-x_1),\\ R=r_0(x_1y_2-y_1x_2)-r_1(x_2y_0-y_2x_0)-r_2(x_0y_1-y_0x_1)\end{array}\right.$$

gesetzt wird, wie leicht zu übersehen ist, die folgenden Gleichungen:

$$7)\ \ldots \left\{\begin{array}{l} nAN=\pm P\sqrt{A^2+B^2},\\ nBN=\mp Q\sqrt{A^2+B^2},\\ nCN=\pm R\sqrt{A^2+B^2}.\end{array}\right.$$

Daher müssen jedenfalls die Grössen A, B, C und das positive n so bestimmt werden, dass diesen drei letzteren Gleichungen genügt wird.

Es frägt sich aber, ob auch umgekehrt, wenn die Gleichungen 7) erfüllt sind, dann auch jederzeit die Gleichungen 4) oder 3), auf deren Erfüllung es eigentlich ankommt, erfüllt sind. Um diese Frage zu beantworten, bemerke man zuvörderst die folgenden Relationen, von deren Richtigkeit man sich durch leichte Rechnung überzeugen kann:

$$8)\ \ldots \left\{\begin{array}{l} Px_0-Qy_0+R=r_0N,\\ Px_1-Qy_1+R=-r_1N,\\ Px_2-Qy_2+R=-r_2N.\end{array}\right.$$

Digitized by Google

Multiplicirt man nun die als erfüllt vorausgesetzten Gleichungen 7) nach der Reihe mit

$$x_0,\quad y_0,\quad z_0;\qquad x_1,\quad y_1,\quad z_1;\qquad x_2,\quad y_2,\quad z_2$$

und addirt sie in jedem dieser drei Fälle zu einander; so erhält man die folgenden Gleichungen:

$$n(Ax_0+By_0+C)N=\pm(Px_0-Qy_0+R)\sqrt{A^2+B^2},$$

$$n(Ax_1+By_1+C)N=\pm(Px_1-Qy_1+R)\sqrt{A^2+B^2},$$

$$n(Ax_2+By_2+C)N=\pm(Px_2-Qy_2+R)\sqrt{A^2+B^2};$$

folglich nach 8):

$$n(Ax_0+By_0+C)N=\pm r_0N\sqrt{A^2+B^2},$$

$$n(Ax_1+By_1+C)N=\mp r_1N\sqrt{A^2+B^2},$$

$$n(Ax_2+By_2+C)N=\mp r_2N\sqrt{A^2+B^2};$$

also, wenn N nicht verschwindet:

$$n(Ax_0+By_0+C)=\pm r_0\sqrt{A^2+B^2},$$

$$n(Ax_1+By_1+C)=\mp r_1\sqrt{A^2+B^2},$$

$$n(Ax_2+By_2+C)=\mp r_2\sqrt{A^2+B^2};$$

welches die zu erfüllenden Gleichungen 3) sind. Wenn also N nicht verschwindet, sind, wenn die Gleichungen 7) erfüllt sind, jederzeit auch die Gleichungen 4) oder 3) erfüllt.

Dass man aber berechtigt ist, immer anzunehmen, dass N nicht verschwindet, wird ganz eben so gezeigt wie im vorhergehenden Paragraphen, und es werden also nach dem Vorhergehenden immer die Gleichungen 7) die Gleichungen 4) oder 3) nach sich ziehen, es folglich bloss darauf ankommen, die Grössen A, B, C und das positive n so zu bestimmen, dass die Gleichungen 7), nämlich die Gleichungen:

$$nAN=\pm P\sqrt{A^2+B^2},$$

$$nBN=\mp Q\sqrt{A^2+B^2},$$

$$nCN=\pm R\sqrt{A^2+B^2}$$

erfüllt werden.

Digitized by Google

Eine der in dem vorhergehenden Paragraphen angestellten gan: ähnliche Betrachtung führt nun auch hier zu den **Formeln:**

9) . . . . . . $A = P,\qquad B = -Q,\qquad C = R$

und

10) . . . . $n = \pm\frac{\sqrt{P^2+Q^2}}{N}$,

indem man in dieser letzteren Formel das obere oder untere *Zeichen* nimmt, jenachdem die Grösse N positiv oder negativ ist.

Wie im vorhergehenden Paragraphen liegt auch hier die Voraussetzung zu Grunde, dass die Grössen P und Q nicht zugleich verschwinden; wäre aber zugleich:

$$P = 0,\qquad Q = 0;$$

so hätte man nach 6) die beiden Gleichungen:

$$r_0(y_1-y_2)-r_1(y_2-y_0)-r_2(y_0-y_1) = 0,$$

$$r_0(x_1-x_2)-r_1(x_2-x_0)-r_2(x_0-x_1) = 0;$$

aus denen, wenn man nach der Reihe r_2, r_0, r_1 eliminirt, die folgenden Gleichungen erhalten werden:

$$(r_0+r_1)N = 0,$$

$$(r_1-r_2)N = 0,$$

$$(r_2+r_0)N = 0;$$

also, weil bekanntlich N nicht verschwindet:

$$r_0+r_1 = 0,\qquad r_1-r_2 = 0,\qquad r_2+r_0 = 0;$$

folglich:

$$r_0 = -r_1 = -r_2,$$

was offenbar nur dann möglich ist, wenn $r_0 = r_1 = r_2 = 0$ ist, die drei Punkte A_0, A_1, A_2 also sämmtlich mit dem Punkte S zusammenfallen, ein Fall, den wir natürlich ausschliessen müssen, unter welcher Voraussetzung folglich die Grössen P und Q nicht zugleich verschwinden werden.

Aus 6) erhält man leicht:

Digitized by Google

$$\begin{aligned}P^2+Q^2 = \; & r_0^2\{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2\}\\ & +r_1^2\{(x_2-x_0)^2+(y_2-y_0)^2\}\\ & +r_2^2\{(x_0-x_1)^2+(y_0-y_1)^2\}\\ & -2r_0r_1\{(x_1-x_2)(x_2-x_0)+(y_1-y_2)(y_2-y_0)\}\\ & +2r_1r_2\{(x_2-x_0)(x_0-x_1)+(y_2-y_0)(y_0-y_1)\}\\ & -2r_2r_0\{(x_0-x_1)(x_1-x_2)+(y_0-y_1)(y_1-y_2)\},\end{aligned}$$

so dass also, wenn man, indem M eine positive Grösse bezeichnet:

11) . . . $$\begin{aligned}M^2 = \; & r_0^2r_{12}^2+r_1^2r_{20}^2+r_2^2r_{01}^2\\ & -2r_0r_1\{(x_1-x_2)(x_2-x_0)+(y_1-y_2)(y_2-y_0)\}\\ & +2r_1r_2\{(x_2-x_0)(x_0-x_1)+(y_2-y_0)(y_0-y_1)\}\\ & -2r_2r_0\{(x_0-x_1)(x_1-x_2)+(y_0-y_1)(y_1-y_2)\}\end{aligned}$$

setzt, nach 10):

12) . . . . $n=\pm\frac{M}{N}$

ist, indem man das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem die Grösse N positiv oder negativ ist.

Wir haben nun, indem wir bemerken, dass wir auf den Fall, wenn

$$Af+Bg+C=0$$

ist, nachher besonders zurückkommen werden, die folgenden Fälle zu unterscheiden:

Wenn

$$N \begin{matrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{matrix}$$

und beziehungsweise

$$Af+Bg+C \begin{matrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{matrix}$$

ist; so ist, weil

$$n(Ax_1+By_1+C)=\mp\sqrt{(A^2+B^2)\{(x_1-f)^2+(y_1-g)^2\}},$$

$$n(Ax_2+By_2+C)=\mp\sqrt{(A^2+B^2)\{(x_2-f)^2+(y_2-g)^2\}}$$

ist, nach dem in der Anmerkung am Schluss dieser Abhandlung bewiesenen Satze $n>1$, und nach N. T. d. K. S. 82. und S. 76. ist folglich der Kegelschnitt eine Hyperbel, in deren erstem Zweige der

Punkt A_0 oder (x_0y_0) liegt, und in deren zweitem Zweige die Punkte A_1, A_2 oder (x_1y_1), (x_2y_2) liegen.

Wenn

$$N \begin{matrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{matrix}$$

und beziehungsweise

$$Af+Bg+C \begin{matrix}\text{negativ}\\ \text{positiv}\end{matrix}$$

ist; so ist, weil

$$n(Ax_0+By_0+C)=\pm\sqrt{(A^2+B^2)\{(x_0-f)^2+(y_0-g)^2\}}$$

ist, nach dem in der Anmerkung am Schluss dieser Abhandlung bewiesenen Satze $n>1$, und nach N. T. d. K. S. 82 und S. 76 ist folglich der Kegelschnitt eine Hyperbel, in deren zweitem Zweige der Punkt A_0 oder (x_0y_0) liegt, und in deren erstem Zweige die Punkte A_1, A_2 oder (x_1y_1), (x_2y_2) liegen.

Setzen wir jetzt:

$$13)\ \ldots\ \left\{\begin{array}{ll} x_0=f+r_0\cos\omega_0, & y_0=g+r_0\sin\omega_0;\\ x_1=f+r_1\cos\omega_1, & y_1=g+r_1\sin\omega_1;\\ x_2=f+r_2\cos\omega_2, & y_2=g+r_2\sin\omega_2; \end{array}\right.$$

wo keiner der Winkel oder Bogen ω_0, ω_1, ω_2 grösser als 2π ist; so ist ganz eben so, wie im vorhergehenden Paragraphen:

$$14)\quad N=-\{r_0r_1\sin(\omega_0-\omega_1)+r_1r_2\sin(\omega_1-\omega_2)+r_2r_0\sin(\omega_2-\omega_0)\}.$$

Ferner ist nach 6):

$$\begin{aligned} P= &\ \ r_0\{(y_1-g)-(y_2-g)\}\\ &-r_1\{(y_2-g)-(y_0-g)\}\\ &-r_2\{(y_0-g)-(y_1-g)\}\\ = &\ \ r_0(y_1-g)+r_1(y_0-g)\\ &-r_1(y_2-g)+r_2(y_1-g)\\ &-r_2(y_0-g)-r_0(y_2-g). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q = & \quad r_0\{(x_1-f)-(x_2-f)\}\\
& -r_1\{(x_2-f)-(x_0-f)\}\\
& -r_2\{(x_0-f)-(x_1-f)\}\\
= & \quad r_0(x_1-f)+r_1(x_0-f)\\
& -r_1(x_2-f)+r_2(x_1-f)\\
& -r_2(x_0-f)-r_0(x_2-f),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R = & \quad r_0\{(f+(x_1-f))(g+(y_2-g))-(g+(y_1-g))(f+(x_2-f))\}\\
& -r_1\{(f+(x_2-f))(g+(y_0-g))-(g+(y_2-g))(f+(x_0-f))\}\\
& -r_2\{(f+(x_0-f))(g+(y_1-g))-(g+(y_0-g))(f+(x_1-f))\}\\
= & -f\{r_0(y_1-y_2)-r_1(y_2-y_0)-r_2(y_0-y_1)\}\\
& +g\{r_0(x_1-x_2)-r_1(x_2-x_0)-r_2(x_0-x_1)\}\\
& +r_0\{(x_1-f)(y_2-g)-(y_1-g)(x_2-f)\}\\
& -r_1\{(x_2-f)(y_0-g)-(y_2-g)(x_0-f)\}\\
& -r_2\{(x_0-f)(y_1-g)-(y_0-g)(x_1-f)\}\\
= & -fP+gQ+r_0\{(x_1-f)(y_2-g)-(y_1-g)(x_2-f)\}\\
& \qquad -r_1\{(x_2-f)(y_0-g)-(y_2-g)(x_0-f)\}\\
& \qquad -r_2\{(x_0-f)(y_1-g)-(y_0-g)(x_1-f)\},
\end{aligned}$$

so, wie leicht erhellet:

15)

$$\begin{aligned}
P = & \quad 2r_0r_1\cos\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)\sin\tfrac{1}{2}(\omega_0+\omega_1)\\
& +2r_1r_2\sin\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)\cos\tfrac{1}{2}(\omega_1+\omega_2)\\
& -2r_2r_0\cos\tfrac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)\sin\tfrac{1}{2}(\omega_2+\omega_0),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q = & \quad 2r_0r_1\cos\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)\cos\tfrac{1}{2}(\omega_0+\omega_1)\\
& -2r_1r_2\sin\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)\sin\tfrac{1}{2}(\omega_1+\omega_2)\\
& -2r_2r_0\cos\tfrac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)\cos\tfrac{1}{2}(\omega_2+\omega_0),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R = & -fP+gQ\\
& +r_0r_1r_2\{\sin(\omega_0-\omega_1)-\sin(\omega_1-\omega_2)+\sin(\omega_2-\omega_0)\}\\
= & -fP+gQ-4r_0r_1r_2\cos\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)\sin\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)\cos\tfrac{1}{2}(\omega_2-\omega_0).
\end{aligned}$$

Nach 9) ist:

$$Af+Bg+C=Pf-Qg+R,$$

lso nach 15):

$$\begin{aligned}
Af+Bg+C = & \quad Pf-Qg-Pf+Qg\\
& -4r_0r_1r_2\cos\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)\sin\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)\cos\tfrac{1}{2}(\omega_2-\omega_0),
\end{aligned}$$

Digitized by Google

folglich:

16)

$$Af + Bg + C = -4r_0r_1r_2\cos\tfrac{1}{2}(\omega_0 - \omega_1)\sin\tfrac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)\cos\tfrac{1}{2}(\omega_2 - \omega_0)$$

Insofern nun, wie wir hier natürlich annehmen müssen, kein der Grössen r_0, r_1, r_2 verschwindet, d. h. keiner der drei gegebene Punkte A_0, A_1, A_2 mit dem gegebenen Brennpunkte S zusammenfäll wird nur dann

$$Af + Bg + C = 0$$

sein können, wenn wenigstens einer der drei Factoren:

$$\cos\tfrac{1}{2}(\omega_0 - \omega_1), \quad \sin\tfrac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2). \quad \cos\tfrac{1}{2}(\omega_2 - \omega_0)$$

verschwindet.

Wäre nun

$$\cos\tfrac{1}{2}(\omega_0 - \omega_1) = 0,$$

so wäre, wenn λ eine ganze Zahl bezeichnet:

$$\tfrac{1}{2}(\omega_0 - \omega_1) = (2\lambda + 1)\frac{\pi}{2}, \quad \text{also} \quad \omega_0 - \omega_1 = (2\lambda + 1)\pi;$$

wo, weil bekanntlich der absolute Werth von $\omega_0 - \omega_1$ die Grösse 2π jedenfalls nicht übersteigt, λ nur die Werthe -1, 0 haben kann. Jenachdem nun

$$\lambda = -1, \quad \lambda = 0$$

ist, ist beziehungsweise:

$$\omega_0 - \omega_1 = -\pi, \quad \omega_0 - \omega_1 = +\pi;$$

also:

$$\omega_1 = \omega_0 + \pi, \quad \omega_0 = \omega_1 + \pi.$$

In beiden Fällen liegen die Punkte A_0, A_1 in zwei von dem Brennpunkte S nach direct entgegengesetzten Richtungen hin ausgehenden Geraden, was offenbar unzulässig ist, wenn sich, wie die Aufgabe verlangt, durch die Punkte A_0, A_1, A_2 eine Hyperbel so beschreiben lassen soll, dass die Punkte A_0 und A_1 in verschiedenen Zweigen dieser Hyperbel liegen.

Zu einer ganz ähnlichen Folgerung würde die Gleichung

$$\cos\tfrac{1}{2}(\omega_2 - \omega_0) = 0$$

führen.

Digitized by Google

Wenn endlich

$$\sin\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)=0$$

wäre, so würden, nach ganz ähnlichen Schlüssen wie im vorhergehenden Paragraphen, die in demselben Zweige der durch die Punkte A_0, A_1, A_2 zu beschreibenden Hyperbel liegen sollenden Punkte A_1 und A_2 in derselben von dem Brennpunkte S ausgehenden Geraden liegen, was offenbar unzulässig ist, wenn die Aufgabe in der verlangten Weise lösbar sein soll.

Wir sind also anzunehmen genöthigt, dass weder die Punkte A_0 und A_1, noch die Punkte A_0 und A_2, in zwei von dem Brennpunkte S nach direct entgegengesetzten Richtungen ausgehenden Geraden liegen, und dass die Punkte A_1 und A_2 nicht in derselben von dem Brennpunkte S ausgehenden Geraden liegen. Wenn wir diese nothwendigen Voraussetzungen machen, kann nicht

$$Af+Bg+C=0$$

sein.

Aus den Ausdrücken von P und Q in 15) erhält man leicht:

$$\begin{aligned}P^2+Q^2 = \;& 4r_0{}^2r_1{}^2\cos\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)^2\\ &+4r_1{}^2r_2{}^2\sin\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)^2\\ &+4r_2{}^2r_0{}^2\cos\tfrac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)^2\\ &-8r_0{}^2r_1r_2\cos\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)\cos\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)\cos\tfrac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)\\ &-8r_0r_1{}^2r_2\cos\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)\sin\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)\sin\tfrac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)\\ &-8r_0r_1r_2{}^2\sin\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)\sin\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)\cos\tfrac{1}{2}(\omega_2-\omega_0),\end{aligned}$$

also nach 11):

17)

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{4}M^2 = \;& r_0{}^2r_1{}^2\cos\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)^2\\ &+r_1{}^2r_2{}^2\sin\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)^2\\ &+r_2{}^2r_0{}^2\cos\tfrac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)^2\\ &-2r_0{}^2r_1r_2\cos\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)\cos\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)\cos\tfrac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)\\ &-2r_0r_1{}^2r_2\cos\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)\sin\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)\sin\tfrac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)\\ &-2r_0r_1r_2{}^2\sin\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)\sin\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)\cos\tfrac{1}{2}(\omega_2-\omega_0).\end{aligned}$$

Bezeichnen wir den Parameter der Hyperbel durch p, so ist nach N. T. d. K. S. 107. Nr. 2) allgemein:

$$p=\pm\frac{2n(Af+Bg+C)}{\sqrt{A^2+B^2}},$$

wenn man nur das Zeichen so nimmt, dass p positiv ausfällt. Nun ist aber nach 16):

$$Af+Bg+C=-4r_0r_1r_2\cos\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)\sin\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)\cos\tfrac{1}{2}(\omega_2-\omega_0),$$

und nach 9) und 11):

$$\sqrt{A^2+B^2}=\sqrt{P^2+Q^2}=M;$$

ferner nach 12):

$$n=\pm\frac{M}{N};$$

also:

$$\frac{n}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{n}{M}=\pm\frac{1}{N},$$

daher nach 14):

$$\frac{n}{\sqrt{A^2+B^2}}=\mp\frac{1}{r_0r_1\sin(\omega_0-\omega_1)+r_1r_2\sin(\omega_1-\omega_2)+r_2r_0\sin(\omega_2-\omega_0)}.$$

Also ist nach dem Obigen:

18)

$$p=\pm\frac{8r_0r_1r_2\cos\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)\sin\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)\cos\tfrac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)}{r_0r_1\sin(\omega_0-\omega_1)+r_1r_2\sin(\omega_1-\omega_2)+r_2r_0\sin(\omega_2-\omega_0)},$$

oder:

$$19)\ \ldots\ p=\pm\frac{8\cos\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)\sin\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)\cos\tfrac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)}{\dfrac{\sin(\omega_1-\omega_2)}{r_0}+\dfrac{\sin(\omega_2-\omega_0)}{r_1}+\dfrac{\sin(\omega_0-\omega_1)}{r_2}},$$

wenn man nur das Zeichen so nimmt, dass p positiv ausfällt.

Ganz eben so wie im vorhergehenden Paragraphen mit Anwendung gleicher Bezeichnung erhält man:

$$20)\ \ldots\ldots\ \left\{\begin{array}{l} F=f-\dfrac{Pp^2}{4(n^2-1)(Af+Bg+C)},\\[2ex] G=g+\dfrac{Qp^2}{4(n^2-1)(Af+Bg+C)}; \end{array}\right.$$

ferner:

Digitized by Google

$$21) \quad \dots\dots\dots \quad \begin{cases} a = \dfrac{p}{2(n^2-1)}, \\ b = \dfrac{p}{2\sqrt{n^2-1}} = a\sqrt{n^2-1}, \\ e = \dfrac{np}{2(n^2-1)} = na; \end{cases}$$

so wie:

$$22) \quad \dots\dots\dots \quad \begin{cases} f' = f - \dfrac{Pp^2}{4n(n+1)(A+fBg+C)}, \\ g' = g + \dfrac{Qp^2}{4n(n+1)(Af+Bg+C)}; \end{cases}$$

und:

$$23) \quad \dots\dots \quad \begin{cases} f_1' = f - \dfrac{Pp^2}{4n(n-1)(Af+Bg+C)}, \\ g_1' = g + \dfrac{Qp^2}{4n(n-1)(Af+Bg+C)}. \end{cases}$$

Auch ist ganz eben so wie dort:

$$24) \quad \dots\dots\dots \quad \begin{cases} \cos\overline{\omega} = -\dfrac{Pp}{2n(Af+Bg+C)}, \\ \sin\overline{\omega} = \dfrac{Qp}{2n(Af+Bg+C)}; \end{cases}$$

also:

$$25) \quad \dots\dots\dots\dots \quad \operatorname{tang}\overline{\omega} = -\frac{Q}{P},$$

folglich nach 6):

$$26) \quad \dots \quad \operatorname{tang}\overline{\omega} = -\frac{r_0(x_1-x_2)-r_1(x_2-x_0)-r_2(x_0-x_1)}{r_0(y_1-y_2)-r_1(y_2-y_0)-r_2(y_0-y_1)},$$

und nach 15):

$$27) \quad \dots \quad \operatorname{tang}\overline{\omega} = -\frac{\left\{\begin{array}{l} r_0 r_1 \cos\frac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)\cos\frac{1}{2}(\omega_0+\omega_1) \\ -r_1 r_2 \sin\frac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)\sin\frac{1}{2}(\omega_1+\omega_2) \\ -r_2 r_0 \cos\frac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)\cos\frac{1}{2}(\omega_2+\omega_0) \end{array}\right\}}{\left\{\begin{array}{l} r_0 r_1 \cos\frac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)\sin\frac{1}{2}(\omega_0+\omega_1) \\ +r_1 r_2 \sin\frac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)\cos\frac{1}{2}(\omega_1+\omega_2) \\ -r_2 r_0 \cos\frac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)\sin\frac{1}{2}(\omega_2+\omega_0) \end{array}\right\}},$$

Digitized by Google

oder:

$$28) \quad \ldots \quad \operatorname{tang}\overline{\omega} = \frac{\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\sin\frac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)\sin\frac{1}{2}(\omega_1+\omega_2)}{r_0} \\ +\dfrac{\cos\frac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)\cos\frac{1}{2}(\omega_2+\omega_0)}{r_1} \\ -\dfrac{\cos\frac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)\cos\frac{1}{2}(\omega_0+\omega_1)}{r_2} \end{array}\right\}}{\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\sin\frac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)\cos\frac{1}{2}(\omega_1+\omega_2)}{r_0} \\ -\dfrac{\cos\frac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)\sin\frac{1}{2}(\omega_2+\omega_0)}{r_1} \\ +\dfrac{\cos\frac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)\sin\frac{1}{2}(\omega_0+\omega_1)}{r_2} \end{array}\right\}}.$$

Nach 24) ist:

$$\cos\{\tfrac{1}{2}(\omega_0+\omega_1)-\overline{\omega}\} = \cos\tfrac{1}{2}(\omega_0+\omega_1)\cos\overline{\omega}+\sin\tfrac{1}{2}(\omega_0+\omega_1)\sin\overline{\omega}$$
$$= -\frac{\{P\cos\frac{1}{2}(\omega_0+\omega_1)-Q\sin\frac{1}{2}(\omega_0+\omega_1)\}p}{2n(Af+Bg+C)},$$

$$\sin\{\tfrac{1}{2}(\omega_0+\omega_1)-\overline{\omega}\} = \sin\tfrac{1}{2}(\omega_0+\omega_1)\cos\overline{\omega}-\cos\tfrac{1}{2}(\omega_0+\omega_1)\sin\overline{\omega}$$
$$= -\frac{\{P\sin\frac{1}{2}(\omega_0+\omega_1)+Q\cos\frac{1}{2}(\omega_0+\omega_1)\}p}{2n(Af+Bg+C)};$$

nach 15) ist aber, wie man leicht findet:

$$P\cos\tfrac{1}{2}(\omega_0+\omega_1)-Q\sin\tfrac{1}{2}(\omega_0+\omega_1)$$
$$= 2r_2(r_0+r_1)\sin\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)\cos\tfrac{1}{2}(\omega_2-\omega_0),$$

$$P\sin\tfrac{1}{2}(\omega_0+\omega_1)+Q\cos\tfrac{1}{2}(\omega_0+\omega_1)$$
$$= \begin{array}{l} 2r_0r_1\cos\frac{1}{2}(\omega_0-\omega_1) \\ -2r_1r_2\sin\frac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)\sin\frac{1}{2}(\omega_2-\omega_0) \\ -2r_2r_0\cos\frac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)\cos\frac{1}{2}(\omega_2-\omega_0) \end{array}$$

und nach 16):

$$Af+Bg+C = -4r_0r_1r_2\cos\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)\sin\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)\cos\tfrac{1}{2}(\omega_2-\omega_0);$$

also:

Digitized by Google

29)

$$\cos\{\tfrac{1}{2}(\omega_0+\omega_1)-\overline{\omega}\}$$
$$=\frac{p}{4n}\cdot\frac{\frac{1}{r_0}+\frac{1}{r_1}}{\cos\frac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)},$$

$$\sin\{\tfrac{1}{2}(\omega_0+\omega_1)-\overline{\omega}\}$$
$$=-\frac{p}{4n}\left\{\frac{1}{r_0}\cdot\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)}{\cos\frac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)}+\frac{1}{r_1}\cdot\frac{\cot\frac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)}{\cos\frac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)}-\frac{1}{r_2}\cdot\frac{1}{\sin\frac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)\cos\frac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)}\right\}.$$

Weil nun aber:

$$\cot\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)-\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)=\frac{\cos\frac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)}{\sin\frac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)\cos\frac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)},$$

und folglich:

$$\frac{1}{r_2}\cdot\frac{1}{\sin\frac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)\cos\frac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)}=\frac{1}{r_2}\cdot\frac{\cot\frac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)}{\cos\frac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)}-\frac{1}{r_2}\cdot\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)}{\cos\frac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)}$$

ist, so kann man diese Formeln auch auf folgende Art darstellen:

30)

$$\cos\{\tfrac{1}{2}(\omega_0+\omega_1)-\overline{\omega}\}$$
$$=\frac{p}{4n}\cdot\frac{\frac{1}{r_0}+\frac{1}{r_1}}{\cos\frac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)},$$

$$\sin\{\tfrac{1}{2}(\omega_0+\omega_1)-\overline{\omega}\}$$
$$=-\frac{p}{4n}\left\{\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)\cdot\frac{\cot\frac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)}{\cos\frac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)}+\left(\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_0}\right)\cdot\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)}{\cos\frac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)}\right\}.$$

Auf ähnliche Art ist:

$$\cos\{\tfrac{1}{2}(\omega_1+\omega_2)-\overline{\omega}\}=\cos\tfrac{1}{2}(\omega_1+\omega_2)\cos\overline{\omega}+\sin\tfrac{1}{2}(\omega_1+\omega_2)\sin\overline{\omega}$$
$$=-\frac{\{P\cos\frac{1}{2}(\omega_1+\omega_2)-Q\sin\frac{1}{2}(\omega_1+\omega_2)\}p}{2n(Af+Bg+C)},$$

$$\sin\{\tfrac{1}{2}(\omega_1+\omega_2)-\overline{\omega}\}=\sin\tfrac{1}{2}(\omega_1+\omega_2)\cos\overline{\omega}-\cos\tfrac{1}{2}(\omega_1+\omega_2)\sin\overline{\omega}$$
$$=-\frac{\{P\sin\frac{1}{2}(\omega_1+\omega_2)+Q\cos\frac{1}{2}(\omega_1+\omega_2)\}p}{2n(Af+Bg+C)};$$

nach 15) ist aber, wie man leicht findet:

Digitized by Google

$$P\cos\tfrac{1}{2}(\omega_1+\omega_2)-Q\sin\tfrac{1}{2}(\omega_1+\omega_2)$$
$$=-2r_0r_1\cos\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)\sin\tfrac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)$$
$$+2r_1r_2\sin\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)$$
$$-2r_2r_0\sin\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)\cos\tfrac{1}{2}(\omega_2-\omega_0),$$

$$P\sin\tfrac{1}{2}(\omega_1+\omega_2)+Q\cos\tfrac{1}{2}(\omega_1+\omega_2)$$
$$=2r_0(r_1-r_2)\cos\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)\cos\tfrac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)$$

und nach 16):

$$Af+Bg+C=-4r_0r_1r_2\cos\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)\sin\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)\cos\tfrac{1}{2}(\omega_2-\omega_0);$$

also:

31)

$$\cos\{\tfrac{1}{2}(\omega_1+\omega_2)-\overline{\omega}\}$$
$$=\frac{p}{4n}\left\{\frac{1}{r_0}\cdot\frac{1}{\cos\frac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)\cos\frac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)}-\frac{1}{r_1}\cdot\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)}{\sin\frac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)}-\frac{1}{r_2}\cdot\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)}{\sin\frac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)}\right\},$$

$$\sin\{\tfrac{1}{2}(\omega_1+\omega_2)-\overline{\omega}\}$$
$$=-\frac{p}{4n}\cdot\frac{\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}}{\sin\frac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)}.$$

Weil nun aber:

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)+\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)=-\frac{\sin\frac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)}{\cos\frac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)\cos\frac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)},$$

und folglich:

$$\frac{1}{r_0}\cdot\frac{1}{\cos\frac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)\cos\frac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)}=-\frac{1}{r_0}\cdot\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)}{\sin\frac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)}-\frac{1}{r_0}\cdot\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)}{\sin\frac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)}$$

ist, so kann man diese Formeln auch auf folgende Art darstellen:

32)

$$\cos\{\tfrac{1}{2}(\omega_1+\omega_2)-\overline{\omega}\}$$
$$=-\frac{p}{4n}\left\{\left(\frac{1}{r_0}+\frac{1}{r_1}\right)\cdot\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)}{\sin\frac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)}+\left(\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_0}\right)\cdot\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)}{\sin\frac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)}\right\},$$

$$\sin\{\tfrac{1}{2}(\omega_1+\omega_2)-\overline{\omega}\}$$
$$=-\frac{p}{4n}\cdot\frac{\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}}{\sin\frac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)}.$$

Digitized by Google

Endlich ist:

$$\cos\{\tfrac{1}{2}(\omega_2+\omega_0)-\overline{\omega}\} = \cos\tfrac{1}{2}(\omega_2+\omega_0)\cos\overline{\omega}+\sin\tfrac{1}{2}(\omega_2+\omega_0)\sin\overline{\omega}$$
$$= -\frac{\{P\cos\tfrac{1}{2}(\omega_2+\omega_0)-Q\sin\tfrac{1}{2}(\omega_2+\omega_0)\}p}{2n(Af+Bg+C)},$$

$$\sin\{\tfrac{1}{2}(\omega_2+\omega_0)-\overline{\omega}\} = \sin\tfrac{1}{2}(\omega_2+\omega_0)\cos\overline{\omega}-\cos\tfrac{1}{2}(\omega_2+\omega_0)\sin\overline{\omega}$$
$$= -\frac{\{P\sin\tfrac{1}{2}(\omega_2+\omega_0)+Q\cos\tfrac{1}{2}(\omega_2+\omega_0)\}p}{2n(Af+Bg+C)};$$

nach 15) ist aber, wie man leicht findet:

$$P\cos\tfrac{1}{2}(\omega_2+\omega_0)-Q\sin\tfrac{1}{2}(\omega_2+\omega_0)$$
$$=2r_1(r_2+r_0)\cos\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)\sin\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2),$$

$$P\sin\tfrac{1}{2}(\omega_2+\omega_0)+Q\cos\tfrac{1}{2}(\omega_2+\omega_0)$$
$$= \quad 2r_0r_1\cos\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)\cos\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)$$
$$+2r_1r_2\sin\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)\sin\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)$$
$$-2r_2r_0\cos\tfrac{1}{2}(\omega_2-\omega_0),$$

und nach 16):

$$Af+Bg+C=-4r_0r_1r_2\cos\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)\sin\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)\cos\tfrac{1}{2}(\omega_2-\omega_0);$$

also:

33)

$$\cos\{\tfrac{1}{2}(\omega_2+\omega_0)-\overline{\omega}\}$$
$$=\frac{p}{4n}\cdot\frac{\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_0}}{\cos\tfrac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)},$$

$$\sin\{\tfrac{1}{2}(\omega_2+\omega_0)-\overline{\omega}\}$$
$$=\frac{p}{4n}\left\{\frac{1}{r_0}\cdot\frac{\tang\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)}{\cos\tfrac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)}-\frac{1}{r_1}\cdot\frac{1}{\cos\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)\sin\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)}+\frac{1}{r_2}\cdot\frac{\cot\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)}{\cos\tfrac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)}\right\}.$$

Weil nun aber:

$$\cot\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)-\tang\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)=\frac{\cos\tfrac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)}{\cos\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)\sin\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)},$$

und folglich:

$$\frac{1}{r_1}\cdot\frac{1}{\cos\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)\sin\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)}=\frac{1}{r_1}\cdot\frac{\cot\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)}{\cos\tfrac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)}-\frac{1}{r_1}\cdot\frac{\tang\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)}{\cos\tfrac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)}$$

Digitized by Google

$$P\cos\tfrac{1}{2}(\omega_1+\omega_2)-Q\sin\tfrac{1}{2}(\omega_1+\omega_2)$$
$$=-2r_0r_1\cos\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)\sin\tfrac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)$$
$$+2r_1r_2\sin\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)$$
$$-2r_2r_0\sin\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)\cos\tfrac{1}{2}(\omega_2-\omega_0),$$

$$P\sin\tfrac{1}{2}(\omega_1+\omega_2)+Q\cos\tfrac{1}{2}(\omega_1+\omega_2)$$
$$=2r_0(r_1-r_2)\cos\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)\cos\tfrac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)$$

und nach 16):

$$Af+Bg+C=-4r_0r_1r_2\cos\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)\sin\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)\cos\tfrac{1}{2}(\omega_2-\omega_0);$$

also:

31)

$$\cos\{\tfrac{1}{2}(\omega_1+\omega_2)-\overline{\omega}\}$$
$$=\frac{p}{4n}\left\{\frac{1}{r_0}\cdot\frac{1}{\cos\frac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)\cos\frac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)}-\frac{1}{r_1}\cdot\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)}{\sin\frac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)}-\frac{1}{r_2}\cdot\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)}{\sin\frac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)}\right\},$$

$$\sin\{\tfrac{1}{2}(\omega_1+\omega_2)-\overline{\omega}\}$$
$$=-\frac{p}{4n}\cdot\frac{\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}}{\sin\frac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)}.$$

Weil nun aber:

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)+\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)=-\frac{\sin\frac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)}{\cos\frac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)\cos\frac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)},$$

und folglich:

$$\frac{1}{r_0}\cdot\frac{1}{\cos\frac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)\cos\frac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)}=-\frac{1}{r_0}\cdot\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)}{\sin\frac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)}-\frac{1}{r_0}\cdot\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)}{\sin\frac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)}$$

ist, so kann man diese Formeln auch auf folgende Art darstellen:

32)

$$\cos\{\tfrac{1}{2}(\omega_1+\omega_2)-\overline{\omega}\}$$
$$=-\frac{p}{4n}\left\{\left(\frac{1}{r_0}+\frac{1}{r_1}\right)\cdot\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)}{\sin\frac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)}+\left(\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_0}\right)\cdot\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)}{\sin\frac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)}\right\},$$

$$\sin\{\tfrac{1}{2}(\omega_1+\omega_2)-\overline{\omega}\}$$
$$=-\frac{p}{4n}\cdot\frac{\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}}{\sin\frac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)}.$$

Digitized by Google

Endlich ist:

$$\cos\{\tfrac{1}{2}(\omega_2+\omega_0)-\overline{\omega}\} = \cos\tfrac{1}{2}(\omega_2+\omega_0)\cos\overline{\omega}+\sin\tfrac{1}{2}(\omega_2+\omega_0)\sin\overline{\omega}$$
$$= -\frac{\{P\cos\tfrac{1}{2}(\omega_2+\omega_0)-Q\sin\tfrac{1}{2}(\omega_2+\omega_0)\}p}{2n(Af+Bg+C)},$$

$$\sin\{\tfrac{1}{2}(\omega_2+\omega_0)-\overline{\omega}\} = \sin\tfrac{1}{2}(\omega_2+\omega_0)\cos\overline{\omega}-\cos\tfrac{1}{2}(\omega_2+\omega_0)\sin\overline{\omega}$$
$$= -\frac{\{P\sin\tfrac{1}{2}(\omega_2+\omega_0)+Q\cos\tfrac{1}{2}(\omega_2+\omega_0)\}p}{2n(Af+Bg+C)};$$

nach 15) ist aber, wie man leicht findet:

$$P\cos\tfrac{1}{2}(\omega_2+\omega_0)-Q\sin\tfrac{1}{2}(\omega_2+\omega_0)$$
$$= 2r_1(r_2+r_0)\cos\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)\sin\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2),$$

$$P\sin\tfrac{1}{2}(\omega_2+\omega_0)+Q\cos\tfrac{1}{2}(\omega_2+\omega_0)$$
$$= \quad 2r_0r_1\cos\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)\cos\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)$$
$$+2r_1r_2\sin\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)\sin\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)$$
$$-2r_2r_0\cos\tfrac{1}{2}(\omega_2-\omega_0),$$

und nach 16):

$$Af+Bg+C = -4r_0r_1r_2\cos\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)\sin\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)\cos\tfrac{1}{2}(\omega_2-\omega_0);$$

also:

33)

$$\cos\{\tfrac{1}{2}(\omega_2+\omega_0)-\overline{\omega}\}$$
$$= \frac{p}{4n}\cdot\frac{\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_0}}{\cos\tfrac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)},$$

$$\sin\{\tfrac{1}{2}(\omega_2+\omega_0)-\overline{\omega}\}$$
$$=\frac{p}{4n}\left\{\frac{1}{r_0}\cdot\frac{\tang\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)}{\cos\tfrac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)}-\frac{1}{r_1}\cdot\frac{1}{\cos\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)\sin\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)}+\frac{1}{r_2}\cdot\frac{\cot\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)}{\cos\tfrac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)}\right\}.$$

Weil nun aber:

$$\cot\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)-\tang\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_1) = \frac{\cos\tfrac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)}{\cos\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)\sin\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)},$$

und folglich:

$$\frac{1}{r_1}\cdot\frac{1}{\cos\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)\sin\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)} = \frac{1}{r_1}\cdot\frac{\cot\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)}{\cos\tfrac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)}-\frac{1}{r_1}\cdot\frac{\tang\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)}{\cos\tfrac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)}$$

Digitized by Google

ist; so kann man diese Formeln auch auf folgende Art darstellen:

34)

$$\cos\{\tfrac{1}{2}(\omega_2+\omega_0)-\overline{\omega}\} = \frac{p}{4n}\cdot\frac{\dfrac{1}{r_2}+\dfrac{1}{r_0}}{\cos\frac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)},$$

$$\sin\{\tfrac{1}{2}(\omega_2+\omega_0)-\overline{\omega}\} = \frac{p}{4n}\left\{\left(\frac{1}{r_0}+\frac{1}{r_1}\right)\cdot\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)}{\cos\frac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)}-\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)\cdot\frac{\cot\frac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)}{\cos\frac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)}\right\}.$$

Wir haben also nach dem Vorhergehenden die folgenden Formeln:

35)

$$\cos\{\tfrac{1}{2}(\omega_0+\omega_1)-\overline{\omega}\} = \frac{p}{4n}\,\frac{\dfrac{1}{r_0}+\dfrac{1}{r_1}}{\cos\frac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)},$$

$$\cos\{\tfrac{1}{2}(\omega_1+\omega_2)-\overline{\omega}\} = -\frac{p}{4n}\left\{\left(\frac{1}{r_0}+\frac{1}{r_1}\right)\cdot\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)}{\sin\frac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)}+\left(\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_0}\right)\cdot\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)}{\sin\frac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)}\right\},$$

$$\cos\{\tfrac{1}{2}(\omega_2+\omega_0)-\overline{\omega}\} = \frac{p}{4n}\cdot\frac{\dfrac{1}{r_2}+\dfrac{1}{r_0}}{\cos\frac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)};$$

und:

36)

$$\sin\{\tfrac{1}{2}(\omega_0+\omega_1)-\overline{\omega}\} = -\frac{p}{4n}\left\{\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)\cdot\frac{\cot\frac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)}{\cos\frac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)}+\left(\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_0}\right)\cdot\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)}{\cos\frac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)}\right\},$$

$$\sin\{\tfrac{1}{2}(\omega_1+\omega_2)-\overline{\omega}\} = -\frac{p}{4n}\cdot\frac{\dfrac{1}{r_1}-\dfrac{1}{r_2}}{\sin\frac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)},$$

$$\sin\{\tfrac{1}{2}(\omega_2+\omega_0)-\overline{\omega}\} = \frac{p}{4n}\left\{\left(\frac{1}{r_0}+\frac{1}{r_1}\right)\cdot\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)}{\cos\frac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)}-\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)\cdot\frac{\cot\frac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)}{\cos\frac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)}\right\};$$

Digitized by Google

also:

37)

$$\cot\{\tfrac{1}{2}(\omega_0+\omega_1)-\bar{\omega}\} = -\frac{\frac{1}{r_0}+\frac{1}{r_1}}{\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)\cot\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)+\left(\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_0}\right)\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)},$$

$$\operatorname{tang}\{\tfrac{1}{2}(\omega_1+\omega_2)-\bar{\omega}\} = \frac{\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}}{\left(\frac{1}{r_0}+\frac{1}{r_1}\right)\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)+\left(\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_0}\right)\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)},$$

$$\cot\{\tfrac{1}{2}(\omega_2+\omega_0)-\bar{\omega}\} = \frac{\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_0}}{\left(\frac{1}{r_0}+\frac{1}{r_1}\right)\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)-\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)\cot\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)};$$

oder:

38)

$$\cot\{\tfrac{1}{2}(\omega_0+\omega_1)-\bar{\omega}\} = \frac{\frac{r_2}{r_0}+\frac{r_2}{r_1}}{\left(1-\frac{r_2}{r_1}\right)\cot\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)-\left(1+\frac{r_2}{r_0}\right)\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)},$$

$$\operatorname{tang}\{\tfrac{1}{2}(\omega_1+\omega_2)-\bar{\omega}\} = \frac{\frac{r_0}{r_1}-\frac{r_0}{r_2}}{\left(1+\frac{r_0}{r_2}\right)\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)+\left(1+\frac{r_0}{r_1}\right)\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)},$$

$$\cot\{\tfrac{1}{2}(\omega_2+\omega_0)-\bar{\omega}\} = \frac{\frac{r_1}{r_2}+\frac{r_1}{r_0}}{\left(1+\frac{r_1}{r_0}\right)\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)-\left(1-\frac{r_1}{r_2}\right)\cot\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)}.$$

Digitized by Google

So wie wir im Vorhergehenden angenommen haben, dass der eine Zweig der zu beschreibenden Hyperbel durch den Punkt A_0 der andere Zweig durch die Punkte A_1, A_2 gehen soll, können wir natürlich auch annehmen, dass der eine Zweig der zu beschreibenden Hyperbel durch den Punkt A_1, der andere Zweig durch die Punkte A_2, A_0; oder auch, dass der eine Zweig durch den Punkt A_2, der andere Zweig durch die Punkte A_0, A_1 gehen soll.

Ueber den oben gefundenen Ausdruck 12) der Grösse n wollen wir nun noch das Folgende bemerken.

Nach diesem Ausdrucke ist

$$n^2=\frac{M^2}{N^2},\quad \text{also } 1-n^2=\frac{N^2-M^2}{N^2};$$

und nach 14) und 17) ist:

$$\begin{aligned}N^2-M^2= & \{r_0r_1\sin(\omega_0-\omega_1)+r_1r_2\sin(\omega_1-\omega_2)+r_2r_0\sin(\omega_2-\omega_0)\}^2\\ & -4r_0{}^2r_1{}^2\cos\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)^2\\ & -4r_1{}^2r_2{}^2\sin\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)^2\\ & -4r_2{}^2r_0{}^2\cos\tfrac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)^2\\ & +8r_0{}^2r_1r_2\cos\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)\cos\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)\cos\tfrac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)\\ & +8r_0r_1{}^2r_2\cos\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)\sin\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)\sin\tfrac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)\\ & +8r_0r_1r_2{}^2\sin\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)\sin\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)\cos\tfrac{1}{2}(\omega_2-\omega_0),\end{aligned}$$

also, wenn man

$$\sin(\omega_0-\omega_1)=2\sin\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)\cos\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_1),$$

$$\sin(\omega_1-\omega_2)=2\sin\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)\cos\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2),$$

$$\sin(\omega_2-\omega_0)=2\sin\tfrac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)\cos\tfrac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)$$

etzt:

$$\begin{aligned}N^2-M^2= & -4r_0{}^2r_1{}^2\cos\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)^4\\ & -4r_1{}^2r_2{}^2\sin\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)^4\\ & -4r_2{}^2r_0{}^2\cos\tfrac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)^4\\ & +8r_0{}^2r_1r_2\cos\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)\cos\tfrac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)\\ & \qquad\times\{\cos\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)+\sin\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)\sin\tfrac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)\}\\ & +8r_0r_1{}^2r_2\sin\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)\cos\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)\\ & \qquad\times\{\sin\tfrac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)+\cos\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)\sin\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)\}\\ & +8r_0r_1r_2{}^2\cos\tfrac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)\sin\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)\\ & \qquad\times\{\sin\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)+\sin\tfrac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)\cos\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)\}.\end{aligned}$$

Digitized by Google

Nun ist aber, wie man mittelst einiger einfachen goniometrischen Transformationen leicht findet:

$$\cos\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)+\sin\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)\sin\tfrac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)$$
$$=\quad\cos\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)\cos\tfrac{1}{2}(\omega_2-\omega_0),$$

$$\sin\tfrac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)+\cos\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)\sin\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)$$
$$=-\sin\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)\cos\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_1),$$

$$\sin\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)+\sin\tfrac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)\cos\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)$$
$$=-\cos\tfrac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)\sin\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2);$$

also, wenn man diese Ausdrücke in den obigen Ausdruck von N^2-M^2 einführt:

$$\begin{aligned}N^2-M^2=&-4r_0{}^2r_1{}^2\cos\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)^4\\&-4r_1{}^2r_2{}^2\sin\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)^4\\&-4r_2{}^2r_0{}^2\cos\tfrac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)^4\\&+8r_0{}^2r_1r_2\cos\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)^2\cos\tfrac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)^2\\&-8r_0r_1{}^2r_2\sin\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)^2\cos\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)^2\\&-8r_0r_1r_2{}^2\cos\tfrac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)^2\sin\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)^2,\end{aligned}$$

folglich, wie man leicht übersieht:

$$\begin{aligned}&N^2-M^2\\=&-16r_0r_1r_2{}^2\cos\tfrac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)^2\sin\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)^2\\&-4\{r_0r_1\cos\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)^2+r_1r_2\sin\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)^2-r_2r_0\cos\tfrac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)^2\}^2,\end{aligned}$$

woraus sich ergiebt, dass

$$N^2-M^2<0,$$

also nach dem Obigen

$$1-n^2<0,\qquad n^2>1,\qquad n>1$$

ist, wie es nach dem Obigen in diesem Falle sein muss.

Auch ist:

$$\begin{aligned}&N^2-M^2\\=&-16r_0r_1{}^2r_2\sin\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)^2\cos\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)^2\\&-4\{r_0r_1\cos\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)^2-r_1r_2\sin\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)^2-r_2r_0\cos\tfrac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)^2\}^2,\end{aligned}$$

und:

Digitized by Google

$$N^2-M^2$$
$$= 16r_0{}^2r_1r_2\cos\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)^2\cos\tfrac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)^2$$
$$-4\{r_0r_1\cos\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)^2+r_1r_2\sin\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)^2+r_2r_0\cos\tfrac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)^2\}$$

Wegen dieser letzten Gleichung ist also immer:

$$\left.\begin{array}{l}4r_0{}^2r_1r_2\cos\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)^2\cos\tfrac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)^2\\ -\{r_0r_1\cos\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)^2+r_1r_2\sin\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)^2+r_2r_0\cos\tfrac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)^2\}^2\end{array}\right\}<0$$

oder:

$$4r_0{}^2r_1r_2\cos\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)^2\cos\tfrac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)^2$$
$$<\{r_0r_1\cos\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)^2+r_1r_2\sin\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)^2+r_2r_0\cos\tfrac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)^2\}^2.$$

§. 5.

Aus den vorhergehenden Untersuchungen ergiebt sich überhaupt das folgende Resultat:

Im Allgemeinen lassen sich mit oder aus einem gegebenen Brennpunkte durch drei gegebene Punkte immer vier Kegelschnitte beschreiben, von denen jederzeit wenigstens drei Hyperbeln sind, die aber auch alle vier Hyperbeln sein können. Drei Hyperbeln lassen sich nämlich jederzeit so beschreiben, dass in deren einem Zweige einer der drei gegebenen Punkte liegt, in dem anderen Zweige die beiden anderen gegebenen Punkte liegen; ausserdem lässt sich immer noch ein vierter Kegelschnitt durch die drei gegebenen Punkte beschreiben, welcher eine Parabel, eine Ellipse oder eine Hyperbel sein kann, so dass in dem letzten Falle, wo dieser vierte Kegelschnitt sich als eine Hyperbel ergiebt, alle drei gegebenen Punkte in einem und demselben Zweige dieser Hyperbel liegen (§. 3.).

Es würden sich über diese vier Kegelschnitte verschiedene Betrachtungen und Vergleichungen anstellen lassen, was wir aber jetzt nicht weiter ausführen wollen, indem wir uns mit der folgenden Bemerkung begnügen.

Bezeichnen wir die Parameter der drei Hyperbeln, die sich so beschreiben lassen werden, dass der eine Zweig durch den Punkt A_0 und der andere Zweig durch die Punkte A_1 und A_2, der eine Zweig durch den Punkt A_1 und der andere Zweig durch die Punkte A_2 und A_0, der eine Zweig durch den Punkt A_2 und der andere Zweig

durch die Punkte A_0 und A_1 geht, respective durch p_0, p_1, p_2; so ist nach §. 4. 18), wie man leicht übersieht:

$$p_0 = \pm \frac{8r_0r_1r_2\cos\frac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)\sin\frac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)\cos\frac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)}{r_0r_1\sin(\omega_0-\omega_1)+r_1r_2\sin(\omega_1-\omega_2)+r_2r_0\sin(\omega_2-\omega_0)},$$

$$p_1 = \pm \frac{8r_0r_1r_2\cos\frac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)\cos\frac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)\sin\frac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)}{r_0r_1\sin(\omega_0-\omega_1)+r_1r_2\sin(\omega_1-\omega_2)+r_2r_0\sin(\omega_2-\omega_0)},$$

$$p_2 = \pm \frac{8r_0r_1r_2\sin\frac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)\cos\frac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)\cos\frac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)}{r_0r_1\sin(\omega_0-\omega_1)+r_1r_2\sin(\omega_1-\omega_2)+r_2r_0\sin(\omega_2-\omega_0)};$$

wenn man nur die Zeichen so nimmt, dass p_0, p_1, p_2 positiv ausfallen. Bezeichnet aber p den Parameter des vierten Kegelschnitts, so ist nach §. 3. 20):

$$p = \pm \frac{8r_0r_1r_2\sin\frac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)\sin\frac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)\sin\frac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)}{r_0r_1\sin(\omega_0-\omega_1)+r_1r_2\sin(\omega_1-\omega_2)+r_2r_0\sin(\omega_2-\omega_0)},$$

wo man gleichfalls das Zeichen so nehmen muss, dass p positiv ausfällt. Nach diesen Formeln hat man also die folgenden Relationen:

$$\left(\frac{p_0}{p}\right)^2 = \cot\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)^2\cot\tfrac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)^2,$$

$$\left(\frac{p_1}{p}\right)^2 = \cot\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)^2\cot\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)^2,$$

$$\left(\frac{p_2}{p}\right)^2 = \cot\tfrac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)^2\cot\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)^2;$$

aus denen sich:

$$\frac{p_0p_1p_2}{p^3} = \cot\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)^2\cot\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)^2\cot\tfrac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)^2$$

oder:

$$p_0p_1p_2 = p^3\cot\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)^2\cot\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)^2\cot\tfrac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)^2$$

ergiebt.

Diese Vergleichungen weiter zu verfolgen, liegt, wie gesagt, für jetzt nicht in meiner Absicht.

Anmerkung.

In §. 3. und §. 4. ist auf den folgenden Satz verwiesen worden, den wir nun hier besonders beweisen wollen.

Digitized by Google

Satz.

Wenn für irgend welche Werthe von p, q die Gl(chung:

$$n(Ap+Bq+C)=\pm\sqrt{(A^2+B^2)\{(p-f)^2+(q-g)^2\}}$$

Statt findet, und mit Beziehung auf die Zeichen vor d(Wurzelzeichen in dieser Gleichung

$$Af+Bg+C \begin{matrix}\text{negativ}\\ \text{positiv}\end{matrix}$$

ist: so kann nur $n>1$ sein.

Beweis.

Weil in Folge der vorausgesetzten Gleichung beziehungsweise

$$Ap+Bq+C \begin{matrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{matrix}$$

ist, also

$$Ap+Bq+C \quad \text{und} \quad Af+Bg+C$$

entgegengesetzte Vorzeichen haben; so liegen nach einem bekannt(Satze (N. T. d. K. S. 79. §. 4.) die durch die Coordinaten p, q u(f, g bestimmten Punkte auf entgegengesetzten Seiten der dur(Gleichung

$$Ax+By+C=0$$

charakterisirten Geraden, woraus sich, wenn wir die Entfernung(des Punktes (pq) von dieser Geraden und von dem Punkte $(f$(respective durch P und R bezeichnen, durch eine einfache geom(trische Betrachtung auf der Stelle ergiebt, dass

$$P<R, \quad \text{also} \quad \frac{R}{P}>1$$

ist. Nun kann man aber die vorausgesetzte Gleichung offenbar a(folgende Art schreiben:

$$n^2\left(\frac{Ap+Bq+C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)^2=(p-f)^2+(q-g)^2,$$

und nach bekannten Formeln der analytischen Geometrie ist:

Digitized by Google

$$P^2 = \left(\frac{Ap+Bq+C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)^2, \quad R^2 = (p-f)^2+(q-g)^2;$$

folglich nach vorstehender Gleichung:

$$n^2P^2 = R^2, \quad \text{also} \quad n = \frac{R}{P};$$

daher nach dem Obigen:

$$n > 1,$$

wie bewiesen werden sollte.

Dass hierbei vorausgesetzt werden muss, dass A und B nicht zugleich verschwinden, liegt in der Natur der Sache.

§. 6.

Wir wollen nun untersuchen, welcher Bedingung vier Punkte

$$A_0, \quad A_1, \quad A_2, \quad A_3$$

genügen müssen, wenn dieselben in einem aus dem gegebenen Punkte S als Brennpunkt beschriebenen Kegelschnitte liegen sollen, und bemerken zu dem Ende zuerst Folgendes.

Wenn man aus den vier Gleichungen:

$$a_0x+b_0y+z = c_0,$$
$$a_1x+b_1y+z = c_1,$$
$$a_2x+b_2y+z = c_2,$$
$$a_3x+b_3y+z = c_3$$

die drei Grössen x, y, z vollständig eliminirt, so erhält man dadurch die Bedingungsgleichung, welche erfüllt sein muss, wenn die drei Grössen x, y, z sich sollen so bestimmen lassen, dass durch ihre Werthe den vier obigen Gleichungen vollständig genügt wird. Diese Bedingungsgleichung erhält man aber sehr leicht auf folgende Art.

Zuerst erhält man aus den vier obigen Gleichungen durch Subtraction die drei Gleichungen:

$$(a_0-a_1)x+(b_0-b_1)y = c_0-c_1,$$
$$(a_1-a_2)x+(b_1-b_2)y = c_1-c_2,$$
$$(a_2-a_3)x+(b_2-b_3)y = c_2-c_3;$$

Digitized by Google

und multiplicirt man nun diese drei Gleichungen nach der Reihe mit:

$$(a_1-a_2)(b_2-b_3)-(b_1-b_2)(a_2-a_3),$$
$$(a_2-a_3)(b_0-b_1)-(b_2-b_3)(a_0-a_1),$$
$$(a_0-a_1)(b_1-b_2)-(b_0-b_1)(a_1-a_2)$$

und addirt dieselben dann zu einander, so erhält man auf der Stelle für die gesuchte Bedingungsgleichung die Gleichung:

$$\left.\begin{aligned}&(c_0-c_1)\{(a_1-a_2)(b_2-b_3)-(b_1-b_2)(a_2-a_3)\}\\ +&(c_1-c_2)\{(a_2-a_3)(b_0-b_1)-(b_2-b_3)(a_0-a_1)\}\\ +&(c_2-c_3)\{(a_0-a_1)(b_1-b_2)-(b_0-b_1)(a_1-a_2)\}\end{aligned}\right\}=0,$$

oder:

$$\left.\begin{aligned}&(c_0-c_1)\ \{(a_1b_2-b_1a_2)+(a_2b_3-b_2a_3)+(a_3b_1-b_3a_1)\}\\ +&(c_1-c_2)\left\{\begin{aligned}&(a_2b_0-b_2a_0)+(a_3b_1-b_3a_1)+(a_0b_3-b_0a_3)\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad+(a_1b_2-b_1a_2)\end{aligned}\right\}\\ +&(c_2-c_3)\ \{(a_0b_1-b_0a_1)+(a_1b_2-b_1a_2)+(a_2b_0-b_2a_0)\}\end{aligned}\right\}=0,$$

oder:

$$\left.\begin{aligned}&c_0\{(a_1b_2-b_1a_2)+(a_2b_3-b_2a_3)+(a_3b_1-b_3a_1)\}\\ +&c_1\{(a_2b_0-b_2a_0)+(a_3b_2-b_3a_2)+(a_0b_3-b_0a_3)\}\\ +&c_2\{(a_3b_0-b_3a_0)+(a_0b_1-b_0a_1)+(a_1b_3-b_1a_3)\}\\ +&c_3\{(a_0b_2-b_0a_2)+(a_1b_0-b_1a_0)+(a_2b_1-b_2a_1)\}\end{aligned}\right\}=0,$$

oder:

$$\left.\begin{aligned}&c_0\{(a_1b_2-b_1a_2)+(a_2b_3-b_2a_3)+(a_3b_1-b_3a_1)\}\\ -&c_1\{(a_2b_3-b_2a_3)+(a_3b_0-b_3a_0)+(a_0b_2-b_0a_2)\}\\ +&c_2\{(a_3b_0-b_3a_0)+(a_0b_1-b_0a_1)+(a_1b_3-b_1a_3)\}\\ -&c_3\{(a_0b_1-b_0a_1)+(a_1b_2-b_1a_2)+(a_2b_0-b_2a_0)\}\end{aligned}\right\}=0.$$

Wir müssen nun aber die folgenden Fälle unterscheiden, wobei wir im Allgemeinen bemerken, dass wir in allen Fällen den Brennpunkt S als Anfang der Coordinaten annehmen, also im Obigen $f=0$, $g=0$ setzen, die Coordinaten der vier Punkte

$$A_0,\quad A_1,\quad A_2,\quad A_3$$

beziehungsweise durch

$$x_0,\ y_0;\quad x_1,\ y_1;\quad x_2,\ y_2,\quad x_3,\ y_3$$

bezeichnen, und

Digitized by Google

$$x_0 = r_0 \cos\omega_0, \qquad y_0 = r_0 \sin\omega_0;$$

$$x_1 = r_1 \cos\omega_1, \qquad y_1 = r_1 \sin\omega_1;$$

$$x_2 = r_2 \cos\omega_2, \qquad y_2 = r_2 \sin\omega_2;$$

$$x_3 = r_3 \cos\omega_3, \qquad y_3 = r_3 \sin\omega_3$$

setzen.

Erster Fall.

Die vier Punkte

$$A_0, \quad A_1, \quad A_2, \quad A_3$$

sollen sämmtlich in einer Parabel, oder sämmtlich in einer **Ellipse**, oder sämmtlich in dem ersten Zweige einer Hyperbel, oder sämmtlich in dem zweiten Zweige einer **Hyperbel** liegen.

Setzen wir der Kürze wegen mit Beziehung der oberen und unteren Zeichen auf einander:

$$A' = \pm \frac{nA}{\sqrt{A^2+B^2}}, \quad B' = \pm \frac{nB}{\sqrt{A^2+B^2}}, \quad C' = \pm \frac{nC}{\sqrt{A^2+B^2}};$$

so haben wir nach §. 3. in diesem Falle die folgenden Gleichungen:

$$A'x_0 + B'y_0 + C' = r_0,$$

$$A'x_1 + B'y_1 + C' = r_1,$$

$$A'x_2 + B'y_2 + C' = r_2,$$

$$A'x_3 + B'y_3 + C' = r_3;$$

also nach dem Obigen die Gleichungen:

$$A'.r_0 \cos\omega_0 + B'.r_0 \sin\omega_0 + C' = r_0,$$

$$A'.r_1 \cos\omega_1 + B'.r_1 \sin\omega_1 + C' = r_1,$$

$$A'.r_2 \cos\omega_2 + B'.r_2 \sin\omega_2 + C' = r_2,$$

$$A'.r_3 \cos\omega_3 + B'.r_3 \sin\omega_3 + C' = r_3;$$

und durch Elimination von A', B', C' erhalten wir also nach dem Vorhergehenden die folgende Bedingungsgleichung:

Digitized by Google

1)

$$\left.\begin{array}{l} r_0\{r_1r_2\sin(\omega_1-\omega_2)+r_2r_3\sin(\omega_2-\omega_3)+r_3r_1\sin(\omega_3-\omega_1)\} \\ -r_1\{r_2r_3\sin(\omega_2-\omega_3)+r_3r_0\sin(\omega_3-\omega_0)+r_0r_2\sin(\omega_0-\omega_2)\} \\ +r_2\{r_3r_0\sin(\omega_3-\omega_0)+r_0r_1\sin(\omega_0-\omega_1)+r_1r_3\sin(\omega_1-\omega_3)\} \\ -r_3\{r_0r_1\sin(\omega_0-\omega_1)+r_1r_2\sin(\omega_1-\omega_2)+r_2r_0\sin(\omega_2-\omega_0)\} \end{array}\right\}=0,$$

oder:

2)

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\sin(\omega_1-\omega_2)}{r_3}+\frac{\sin(\omega_2-\omega_3)}{r_1}+\frac{\sin(\omega_3-\omega_1)}{r_2} \\ -\frac{\sin(\omega_2-\omega_3)}{r_0}-\frac{\sin(\omega_3-\omega_0)}{r_2}-\frac{\sin(\omega_0-\omega_2)}{r_3} \\ +\frac{\sin(\omega_3-\omega_0)}{r_1}+\frac{\sin(\omega_0-\omega_1)}{r_3}+\frac{\sin(\omega_1-\omega_3)}{r_0} \\ -\frac{\sin(\omega_0-\omega_1)}{r_2}-\frac{\sin(\omega_1-\omega_2)}{r_0}-\frac{\sin(\omega_2-\omega_0)}{r_1} \end{array}\right\}=0,$$

oder:

3)

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{r_0}\{\sin(\omega_1-\omega_2)+\sin(\omega_2-\omega_3)+\sin(\omega_3-\omega_1)\} \\ -\frac{1}{r_1}\{\sin(\omega_2-\omega_3)+\sin(\omega_3-\omega_0)+\sin(\omega_0-\omega_2)\} \\ +\frac{1}{r_2}\{\sin(\omega_3-\omega_0)+\sin(\omega_0-\omega_1)+\sin(\omega_1-\omega_3)\} \\ -\frac{1}{r_3}\{\sin(\omega_0-\omega_1)+\sin(\omega_1-\omega_2)+\sin(\omega_2-\omega_0)\} \end{array}\right\}=0,$$

und folglich, weil, wie man leicht findet:

$$\begin{array}{l} \sin(\alpha-\beta)+\sin(\beta-\gamma)+\sin(\gamma-\alpha) \\ =-4\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\sin\tfrac{1}{2}(\beta-\gamma)\sin\tfrac{1}{2}(\gamma-\alpha) \end{array}$$

ist:

4)

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{r_0}\sin\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)\sin\tfrac{1}{2}(\omega_2-\omega_3)\sin\tfrac{1}{2}(\omega_3-\omega_1) \\ -\frac{1}{r_1}\sin\tfrac{1}{2}(\omega_2-\omega_3)\sin\tfrac{1}{2}(\omega_3-\omega_0)\sin\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_2) \\ +\frac{1}{r_2}\sin\tfrac{1}{2}(\omega_3-\omega_0)\sin\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)\sin\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_3) \\ -\frac{1}{r_3}\sin\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)\sin\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)\sin\tfrac{1}{2}(\omega_2-\omega_0) \end{array}\right\}=0.$$

Digitized by Google

Auch ist:

5)

$$\left.\begin{array}{r}\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_3}\right)\sin(\omega_0-\omega_1)\\ +\left(\frac{1}{r_3}-\frac{1}{r_1}\right)\sin(\omega_0-\omega_2)\\ +\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)\sin(\omega_0-\omega_3)\\ +\left(\frac{1}{r_0}-\frac{1}{r_3}\right)\sin(\omega_1-\omega_2)\\ +\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_0}\right)\sin(\omega_1-\omega_3)\\ +\left(\frac{1}{r_0}-\frac{1}{r_1}\right)\sin(\omega_2-\omega_3)\end{array}\right\}=0.$$

Indem wir nun zur Betrachtung der anderen hier zur Sprache ommenden Fälle übergehen, bemerken wir zuvörderst im Allgeeinen, dass für eine Gleichung von der Form:

$$-A'.r\cos\omega-B'.r\sin\omega-C'=r$$

ach und nach die Gleichungen:

$$A'.(-r)\cos\omega+B'.(-r)\sin\omega-C'=r,$$

$$-A'.(-r)\cos\omega-B'.(-r)\sin\omega+C'=(-r),$$

$$A'.(-r)(-\cos\omega)+B'.(-r)(-\sin\omega)+C'=(-r),$$

$$A'.(-r)\cos(\omega+180^0)+B'.(-r)\sin(\omega+180^0)+C'=(-r)$$

gesetzt werden können.

Zweiter Fall.

Von den vier Punkten

$$A_0,\quad A_1,\quad A_2,\quad A_3$$

soll einer (A_0) in dem einen Zweige einer Hyperbel und die drei anderen (A_1, A_2, A_3) sollen in dem anderen Zweige dieser Hyperbel liegen.

Digitized by Google

In diesem Falle hat man nach §. 4. die folgenden Gleichungen:

$$A'x_0+B'y_0+C'=r_0,$$
$$-A'x_1-B'y_1-C'=r_1,$$
$$-A'x_2-B'y_2-C'=r_2,$$
$$-A'x_3-B'y_3-C'=r_3;$$

also:

$$A'.r_0\cos\omega_0+B'.r_0\sin\omega_0+C'=r_0,$$
$$-A'.r_1\cos\omega_1-B'.r_1\sin\omega_1-C'=r_1,$$
$$-A'.r_2\cos\omega_2-B'.r_2\sin\omega_2-C'=r_2,$$
$$-A'.r_3\cos\omega_3-B'.r_3\sin\omega_3-C'=r_3;$$

und um nun von den Gleichungen des ersten Falls zu den Gleichungen dieses zweiten Falles überzugehen, muss man nach dem Obigen in jenen setzen: für

$$r_0,\quad r_1,\quad r_2,\quad r_3$$

beziehungsweise

$$r_0,\quad -r_1,\quad -r_2,\quad -r_3;$$

und für

$$\omega_0,\quad \omega_1,\quad \omega_2,\quad \omega_3$$

beziehungsweise:

$$\omega_0,\quad \omega_1+180^0,\quad \omega_2+180^0,\quad \omega_3+180^0;$$

also für:

$$\sin(\omega_0-\omega_1),$$
$$\sin(\omega_0-\omega_2),$$
$$\sin(\omega_0-\omega_3),$$
$$\sin(\omega_1-\omega_2),$$
$$\sin(\omega_1-\omega_3),$$
$$\sin(\omega_2-\omega_3)$$

beziehungsweise:

$$\sin(\omega_0-\omega_1-180^0)=-\sin(\omega_0-\omega_1),$$
$$\sin(\omega_0-\omega_2-180^0)=-\sin(\omega_0-\omega_2),$$
$$\sin(\omega_0-\omega_3-180^0)=-\sin(\omega_0-\omega_3),$$
$$\sin(\omega_1-\omega_2)=\sin(\omega_1-\omega_2),$$
$$\sin(\omega_1-\omega_3)=\sin(\omega_1-\omega_3),$$
$$\sin(\omega_2-\omega_3)=\sin(\omega_2-\omega_3).$$

Digitized by Google

Dadurch erhalten wir die folgenden diesem zweiten Falle entsprechenden Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{r_0}\{\sin(\omega_1-\omega_2)+\sin(\omega_2-\omega_3)+\sin(\omega_3-\omega_1)\} \\ +&\frac{1}{r_1}\{\sin(\omega_2-\omega_3)-\sin(\omega_3-\omega_0)-\sin(\omega_0-\omega_2)\} \\ +&\frac{1}{r_2}\{\sin(\omega_3-\omega_0)+\sin(\omega_0-\omega_1)-\sin(\omega_1-\omega_3)\} \\ -&\frac{1}{r_3}\{\sin(\omega_0-\omega_1)-\sin(\omega_1-\omega_2)+\sin(\omega_2-\omega_0)\} \end{aligned}\right\}=0$$

und:

$$\left.\begin{aligned} &\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_3}\right)\sin(\omega_0-\omega_1) \\ +&\left(\frac{1}{r_3}-\frac{1}{r_1}\right)\sin(\omega_0-\omega_2) \\ +&\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)\sin(\omega_0-\omega_3) \\ +&\left(\frac{1}{r_0}+\frac{1}{r_3}\right)\sin(\omega_1-\omega_2) \\ -&\left(\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_0}\right)\sin(\omega_1-\omega_3) \\ +&\left(\frac{1}{r_0}+\frac{1}{r_1}\right)\sin(\omega_2-\omega_3) \end{aligned}\right\}=0.$$

Ferner muss man in den dem ersten Falle entsprechenden Gleichungen für:

$$\sin\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_1),$$
$$\sin\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_2),$$
$$\sin\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_3),$$
$$\sin\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2),$$
$$\sin\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_3),$$
$$\sin\tfrac{1}{2}(\omega_2-\omega_3)$$

beziehungsweise setzen:

Digitized by Google

$$\sin\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_1-180^0)=\sin\{\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)-90^0\}=-\cos\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_1),$$
$$\sin\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_2-180^0)=\sin\{\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_2)-90^0\}=-\cos\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_2),$$
$$\sin\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_3-180^0)=\sin\{\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_3)-90^0\}=-\cos\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_3),$$
$$\sin\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)=\sin\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2),$$
$$\sin\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_3)=\sin\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_3),$$
$$\sin\tfrac{1}{2}(\omega_2-\omega_3)=\sin\tfrac{1}{2}(\omega_2-\omega_3);$$

wodurch man die folgende Gleichung erhält:

$$\left.\begin{array}{l}
\frac{1}{r_0}\sin\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)\sin\tfrac{1}{2}(\omega_2-\omega_3)\sin\tfrac{1}{2}(\omega_3-\omega_1)\\
-\frac{1}{r_1}\sin\tfrac{1}{2}(\omega_2-\omega_3)\cos\tfrac{1}{2}(\omega_3-\omega_0)\cos\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_2)\\
+\frac{1}{r_2}\cos\tfrac{1}{2}(\omega_3-\omega_0)\cos\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)\sin\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_3)\\
-\frac{1}{r_3}\cos\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)\sin\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)\cos\tfrac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)
\end{array}\right\}=0.$$

Dritter Fall.

Von den vier Punkten

$$A_0,\quad A_1,\quad A_2,\quad A_3$$

sollen zwei (A_0, A_1) in dem einen, die beiden anderen (A_2, A_3) in dem anderen Zweige einer Hyperbel liegen.

In diesem Falle hat man nach §. 4. die folgenden Gleichungen:

$$A'x_0+B'y_0+C'=r_0,$$
$$A'x_1+B'y_1+C'=r_1,$$
$$-A'x_2-B'y_2-C'=r_2,$$
$$-A'x_3-B'y_3-C'=r_3;$$

also:

$$A'.r_0\cos\omega_0+B'.r_0\sin\omega_0+C'=r_0,$$
$$A'.r_1\cos\omega_1+B'.r_1\sin\omega_1+C'=r_1,$$
$$-A'.r_2\cos\omega_2-B'.r_2\sin\omega_2-C'=r_2,$$
$$-A'.r_3\cos\omega_3-B'.r_3\sin\omega_3-C'=r_3;$$

Digitized by Google

und um nun von den Gleichungen des ersten Falls zu den Gleichungen dieses dritten Falles überzugehen, muss man nach dem Obigen in jenen setzen: für

$$r_0,\quad r_1,\quad r_2,\quad r_3$$

beziehungsweise

$$r_0,\quad r_1,\quad -r_2,\quad -r_3;$$

und für

$$\omega_0,\quad \omega_1,\quad \omega_2,\quad \omega_3$$

beziehungsweise:

$$\omega_0,\quad \omega_1,\quad \omega_2+180^0,\quad \omega_3+180^0;$$

also für:

$$\begin{array}{l}\sin(\omega_0-\omega_1),\\ \sin(\omega_0-\omega_2),\\ \sin(\omega_0-\omega_3),\\ \sin(\omega_1-\omega_2),\\ \sin(\omega_1-\omega_3),\\ \sin(\omega_2-\omega_3)\end{array}$$

beziehungsweise:

$$\begin{aligned}\sin(\omega_0-\omega_1) &= \sin(\omega_0-\omega_1),\\ \sin(\omega_0-\omega_2-180^0) &= -\sin(\omega_0-\omega_2),\\ \sin(\omega_0-\omega_3-180^0) &= -\sin(\omega_0-\omega_3),\\ \sin(\omega_1-\omega_2-180^0) &= -\sin(\omega_1-\omega_2),\\ \sin(\omega_1-\omega_3-180^0) &= -\sin(\omega_1-\omega_3),\\ \sin(\omega_2-\omega_3) &= \sin(\omega_2-\omega_3).\end{aligned}$$

Dadurch erhalten wir die folgenden diesem dritten Falle entsprechenden Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{1}{r_0}\{\sin(\omega_1-\omega_2)-\sin(\omega_2-\omega_3)+\sin(\omega_3-\omega_1)\}\\ +\dfrac{1}{r_1}\{\sin(\omega_2-\omega_3)-\sin(\omega_3-\omega_0)-\sin(\omega_0-\omega_2)\}\\ -\dfrac{1}{r_2}\{\sin(\omega_3-\omega_0)-\sin(\omega_0-\omega_1)+\sin(\omega_1-\omega_3)\}\\ -\dfrac{1}{r_3}\{\sin(\omega_0-\omega_1)-\sin(\omega_1-\omega_2)-\sin(\omega_2-\omega_0)\}\end{array}\right\}=0$$

und:

Digitized by Google

$$\left.\begin{array}{r}\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_3}\right)\sin(\omega_0-\omega_1)\\-\left(\frac{1}{r_3}+\frac{1}{r_1}\right)\sin(\omega_0-\omega_2)\\+\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)\sin(\omega_0-\omega_3)\\+\left(\frac{1}{r_0}+\frac{1}{r_3}\right)\sin(\omega_1-\omega_2)\\-\left(\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_0}\right)\sin(\omega_1-\omega_3)\\-\left(\frac{1}{r_0}-\frac{1}{r_1}\right)\sin(\omega_2-\omega_3)\end{array}\right\}=0.$$

Ferner muss man in den dem ersten Falle entsprechenden Gleichungen für:

$$\sin\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_1),$$
$$\sin\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_2),$$
$$\sin\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_3),$$
$$\sin\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2),$$
$$\sin\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_3),$$
$$\sin\tfrac{1}{2}(\omega_2-\omega_3)$$

beziehungsweise setzen:

$$\begin{array}{lll}\sin\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_1) & = & \sin\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_1),\\ \sin\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_2-180^0)=\sin\{\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_2)-90^0\} & = & -\cos\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_2),\\ \sin\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_3-180^0)=\sin\{\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_3)-90^0\} & = & -\cos\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_3),\\ \sin\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2-180^0)=\sin\{\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)-90^0\} & = & -\cos\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2),\\ \sin\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_3-180^0)=\sin\{\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_3)-90^0\} & = & -\cos\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_3),\\ \sin\tfrac{1}{2}(\omega_2-\omega_3) & = & \sin\tfrac{1}{2}(\omega_2-\omega_3);\end{array}$$

wodurch man die folgende Gleichung:

Digitized by Google

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{r_0}\cos\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)\sin\tfrac{1}{2}(\omega_2-\omega_3)\cos\tfrac{1}{2}(\omega_3-\omega_1)\\
-&\frac{1}{r_1}\sin\tfrac{1}{2}(\omega_2-\omega_3)\cos\tfrac{1}{2}(\omega_3-\omega_0)\cos\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_2)\\
-&\frac{1}{r_2}\cos\tfrac{1}{2}(\omega_3-\omega_0)\sin\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)\cos\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_3)\\
+&\frac{1}{r_3}\sin\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)\cos\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)\cos\tfrac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)
\end{aligned}\right\}=0$$

hält.

Anmerkung.

Zur weiteren Bestimmung des Kegelschnitts, wenn eine der drei orstehenden Gleichungen erfüllt ist, dienen die in §. 3. und §. 4. elösten Aufgaben.

Digitized by Google

VII.

Kleinere mathematische Mittheilungen *).

Von

Herrn Professor *F. Hoza*,
Lehrer an der Oberrealschule in Königgrätz.

I.

Differentialgleichung der Intensitätslinien bei centraler Beleuchtung.

Der leuchtende Punkt o sei Anfangspunkt orthogonaler Parallel-Coordinaten x, y, z und

(1) . . . . $F(x, y, z) = 0$

sei die Gleichung der beleuchteten Fläche.

Der veränderliche Punkt m der Fläche habe die Coordinaten x, y, z; sein Radius vector om heisse ϱ.

Der Punkt m sei der Berührungspunkt einer an die Fläche gelegten Berührungsebene T, welche mit dem Radius vector den Winkel α einschliesst.

---

*) Der verehrte Herr Einsender dieser Mittheilungen schreibt mir dabei: „Sämmtliche Sätze sind, wenn dieselben auch nicht alle absolut neu sein sollten, meine eigene Composition, was die Beweise anlangt“. Solche Mittheilungen entsprechen ja, wie von mir schon oft bemerkt worden ist, auch ganz den Zwecken des Archivs. G.

Digitized by Google

Soll der Punkt m eine Intensitätslinie beschreiben, so muss

$$(2) \qquad \frac{\sin\alpha}{\varrho^2} = k^2,$$

wobei k^2 die constante Intensitätszahl dieser Linie bedeutet, sein.

Bekanntlich sind

$$(3) \qquad \varrho^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

und

$$(4) \qquad \sin^2\alpha = \frac{t^2}{\varrho^2}\left(x\frac{\partial F}{\partial x} + y\frac{\partial F}{\partial y} + z\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2,$$

wobei

$$(5) \qquad t^2 = \frac{1}{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}.$$

Setzt man die Werte von $\sin\alpha$ aus (4) und ϱ aus (3) in die Gleichung (2) ein, so wird

$$(6) \qquad \frac{\left(x\frac{\partial F}{\partial x} + y\frac{\partial F}{\partial y} + z\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}{(x^2+y^2+z^2)^3\left[\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2\right]} = k^4$$

die Gleichung der verlangten Intensitätslinie sein.

Wäre ein anderes Coordinatensystem gegeben, so hat man dasselbe entsprechend zu transformiren.

II.

Differentialgleichung der Intensitätslinien bei Parallelbeleuchtung.

Die Gleichung einer Fläche sei in orthogonalen Parallelcoordinaten gegeben durch

$$(1) \qquad F(x, y, z) = 0.$$

Ein veränderlicher Punkt m derselben habe die Coordinaten x, y, z.

Die Richtung der parallelen Lichtstrahlen schliesse mit den Coordinatenaxen die Winkel φ, ψ, ω ein.

Digitized by Google

Die im Punkte m an die gegebene Fläche gelegte Berührungsebene bilde mit der Richtung der Lichtstrahlen den Neigungswinkel

Soll der Punkt m eine Intensitätslinie beschreiben, so muss

$$(2) \qquad \sin\alpha = k$$

sein, wobei k die constante Intensitätszahl dieser Linie bedeutet.

Bekanntlich ist

$$(3) \qquad \sin\alpha = t\left(\frac{\partial F}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial F}{\partial y}\cos\psi + \frac{\partial F}{\partial z}\cos\omega\right),$$

wobei

$$(4) \qquad t^2 = \frac{1}{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}.$$

Die Gleichung einer Intensitätslinie lautet somit:

$$(5) \qquad \frac{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial F}{\partial y}\cos\psi + \frac{\partial F}{\partial z}\cos\omega\right)^2}{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2} = k^2.$$

Setzt man

$$k = 0,$$

so erhält man die Gleichung der Schattengränze:

$$(6) \qquad \frac{\partial F}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial F}{\partial y}\cos\psi + \frac{\partial F}{\partial z}\cos\omega = 0,$$

da der Nenner in der Gleichung (5) niemals unendlich sein darf.

Den am stärksten beleuchteten Punkt der Fläche erhält man, wenn k ein Maximum wird, d. h. wenn

$$(7) \qquad \frac{\partial k}{\partial x} = \frac{\partial k}{\partial y} = 0$$

und wenn zugleich $\frac{\partial^2 k}{\partial x^2}$ dasselbe Vorzeichen besitzt, wie $\frac{\partial k}{\partial y}$.

Die Gleichungen (5) und (7) genügen, um die Coordinaten dieses Punktes zu ermitteln.

Wenn der am stärksten beleuchtete Punkt zugleich die absolut grösste Intensität

$$k = 1$$

Digitized by Google

besitzt, so werden seine Coordinaten mittelst der Gleichung

(8)

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\cos\varphi+\frac{\partial F}{\partial y}\cos\psi+\frac{\partial F}{\partial z}\cos\omega\right)^2=\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2$$

gefunden.

III.

Intensitätslinien eines hyperbolischen Paraboloides bei Parallelbeleuchtung.

1. Bezieht man das hyperbolische Paraboloid auf rechtwinklige Coordinatenaxen, deren Anfangspunkt o der Scheitelpunkt ist, so dass die Ebene der Axen X, Y eine Berührungsebene ist und die übrigen Coordinatenebenen Hauptebenen des Paraboloids sind, so lautet seine Gleichung

(1) . . . . $$F=\frac{x^2}{a}-\frac{y^2}{b}-2z=0.$$

Heissen m, n, p die Cosinuse der Neigungswinkel paralleler Lichtstrahlen mit den Coordinatenaxen X, Y, Z, so ist die allgemeine Gleichung der Intensitätslinien

(2) . . . . $$\frac{\left(m\frac{\partial F}{\partial x}+n\frac{\partial F}{\partial y}+p\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}=k^2.$$

Durch partielle Differentiation von (1) erhält man:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{2x}{a},$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=-\frac{2y}{b},$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}=-2;$$

welche Werte nach (2) substituirt

(3) . . . . $$\frac{\left(\frac{mx}{a}-\frac{ny}{b}-p\right)^2}{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+1}=k^2$$

Digitized by Google

Sie ist somit eine Gerade, deren Parameter sind

$$\frac{ap}{m}, \qquad -\frac{bp}{n}.$$

Da nun m, n, p proportional sind den Projectionen l_1, l_2, l_3 einer bestimmten Strecke l des Lichtstrahls auf die Axen X, Y, Z, so sind die Werte dieser Parameter

$$\frac{al_3}{l_1}, \qquad -\frac{bl_3}{l_2},$$

woraus sie einfach construirt werden können.

5. Für die Mittelpunkte der Projectionen der Intensitätslinien auf die Ebene XY findet man die Coordinaten nach den allgemeinen Formeln:

$$\xi = \frac{CD - BE}{B^2 - AC},$$

$$\eta = \frac{AE - BD}{B^2 - AC}$$

und erhält auf diese Art

$$(7) \quad \xi = \frac{amp}{m^2 + n^2 - k^2},$$

$$(8) \quad \eta = \frac{-bnp}{m^2 + n^2 - k^2},$$

$$(9) \quad \frac{\eta}{\xi} = -\frac{bn}{am}.$$

Aus der Formel (9) ist ersichtlich, dass die Mittelpunkte der Projectionen sämmtlicher Intensitätslinien in einer Geraden liegen, welche durch den Anfangspunkt der Coordinaten geht und deren Construction aus (9) keiner Schwierigkeit unterliegt.

Durch Einführung der Grössen l, l_1, l_2, l_3 übergehen (7) (8) (9) in folgende:

$$(10) \quad \xi = a\frac{l_1 l_3}{l_1^2 + l_2^2 - k^2 l^2},$$

$$(11) \quad \eta = -b\frac{l_2 l_3}{l_1^2 + l_2^2 - k^2 l^2},$$

$$(12) \quad \frac{\eta}{\xi} = -\frac{bl_2}{al_1}.$$

Digitized by Google

6. Die Projectionen des hellsten Punktes, für welchen

$$k = 1,$$

ist die Coordinaten

$$\xi = -a\frac{l_1}{l_3},$$

$$\eta = \quad b\frac{l_2}{l_3}.$$

IV.

Lehrsatz. Wenn eine Hyperbelschaar dieselben Asymptoten besitzt, so wird sie von jeder Geraden ihrer Ebene in einer symmetrischen Involution von Punkten geschnitten, zu der auch die Schnittpunkte mit beiden Asymptoten entsprechend gehören.

Beweis.

Wir setzen den folgenden Satz als bewiesen voraus:

Ein durch vier Punkte gehender Kegelschnittbüschel wird von jeder Geraden seiner Ebene in einer Involution von Punkten geschnitten, zu der auch die Schnittpunkte mit den Gegenseiten des durch die gegebenen Punkte bestimmten vollständigen Viereckes entsprechend gehören.

Die Asymptoten A, B, welche allen Hyperbeln der gegebenen Schaar gemein sind, kann man als Gegenseiten eines Viereckes 1 2 3 4 ansehen, wobei die Punkte 1, 2 auf der Asymptote A und 3, 4 auf B in unendlicher Ferne liegen, so zwar, dass jede dieser Geraden, da sie die Hyperbel im Fluchtpunkte berührt, als Verbindungslinie zweier unendlich nahen Punkte 1, 2 respective 3, 4 angesehen werden kann.

Heissen wir a, b die Schnittpunkte einer Geraden G mit den Asymptoten A, B und ferner m, m_1 die Schnittpunkte dieser Geraden mit einer Hyperbel H von der gegebenen Schaar.

Da diese Hyperbelschaar als ein Kegelschnittbüschel, welcher durch die Punkte 1, 2, 3, 4 geht, angesehen werden kann, so muss unter Anwendung des oben ausgesprochenen Satzes

$$(aa_1m\infty) = (a_1am_1\infty)$$

sein, wobei ∞ den Schnittpunkt von G mit den unendlich fernen Gegenseiten 1 3 und 2 4 bezeichnet.

Digitized by Google

Aus dieser Doppelverhältnissgleichung folgt, dass

$$\frac{am}{a_1m} = \frac{a_1m_1}{am_1},$$

$$\overline{am}.\overline{am_1} = \overline{a_1m_1}.\overline{a_1m}.$$

Setzt man

$$am_1 = aa_1 + a_1m_1,$$
$$a_1m = a_1a + am,$$

so wird

$$am(aa_1 + a_1m_1) = a_1m_1(a_1a + am).$$

Aus dieser Gleichung folgt nach gehöriger Reduction

$$am = -a_1m_1,$$

das heisst, sämmtliche entsprechende Schnittpunkte m, m_1 sind in Bezug auf die Fixpunkte a, a_1 symmetrisch.

V.

Lehrsatz. Das Dreieck, welches eine Hyperbeltangente mit den beiden Asymptoten einschliesst, hat constanten Flächeninhalt.

Beweis.

Dieser Lehrsatz folgt aus folgenden allgemeinen Sätzen, die wir als bewiesen annehmen wollen:

Wenn sich eine Gerade so bewegt, dass sie stets einen Kegelschnitt berührt, so erzeugt sie auf zwei fixen Tangenten desselben entsprechende Punkte zweier projectivischen Punktreihen. Der Schnittpunkt der beiden fixen Tangenten entspricht den beiden Berührungspunkten derselben.

Sind zwei Punktreihen projectivisch, und entsprechen den Fluchtpunkten derselben die Gegenpunkte g, g', so ist für jedes Paar entsprechender Punkte m, m' das Produkt $\overline{gm}.\overline{g'm'}$ constant.

Betrachten wir die beiden Asymptoten A, B der Hyperbel H als fixe Tangenten, welche die Hyperbel in den Fluchtpunkten berühren, so entsprechen diese dem Schnittpunkte o der beiden Asymptoten, in welchem also die beiden Gegenpunkte g, g' der projectivischen Punktreihen A, B vereinigt sind.

Digitized by Google

Jede Tangente der Hyperbel schneidet die Asymptoten A, B in zwei entsprechenden Punkten m, m', für welche

$$\overline{gm}.\overline{g'm'} = \overline{om}.\overline{om'} = \text{constant}.$$

Daher hat das Dreieck omm' für alle Lagen der beweglichen Tangente den nämlichen Flächeninhalt.

VI.

Lehrsatz. Trägt man auf jede von zwei sich schneidenden Geraden beliebig grosse gleiche Theile auf, so hüllen die Geraden, welche die Theilpunkte der Reihe nach verbinden, eine Parabel ein.

Beweis.

Bekanntlich wird durch die Verbindungslinien entsprechender Punkte zweier projectivischen in derselben Ebene liegenden Punktereihen stets ein Kegelschnitt eingehüllt.

Dieser Kegelschnitt ist eine Parabel, wenn eine dieser Verbindungslinien mit der Fluchtlinie dieser Ebene zusammenfällt, das heisst, wenn die Fluchtpunkte der beiden gegebenen Punktreihen projectivisch entsprechende Punkte sind.

Trägt man auf eine Gerade A die Strecke ab beliebigemal auf, thut dasselbe auf der Geraden A' mit der Strecke $a'b'$ und verbindet die Theilpunkte a mit a', b mit b', c mit c' u. s. w., so ist

$$\frac{ab}{ac} = \frac{a'b'}{a'c'}.$$

Heisst man u, u' die Fluchtpunkte der beiden Geraden, so muss ebenfalls

$$\frac{\overline{ab}.\overline{uc}}{\overline{ac}.\overline{ub}} = \frac{\overline{a'b'}.\overline{u'c'}}{\overline{a'c'}.\overline{u'b'}}$$

sein. Daher gilt die Doppelverhältnissgleichung

$$(aubc) = (a'u'b'c').$$

Die beiden Punktreihen a, b, c, u und a', b', c', u' sind also der Art projectivisch, dass ihre Fluchtpunkte einander entsprechen.

Folglich hüllen die Geraden aa', bb', cc' u. s. w. eine Parabel ein.

(Diese Mittheilungen werden fortgesetzt.)

Digitized by Google

VIII.

Eine neue Beweisführung über die Lehmann'schen Sätze bei der Pothenot'schen Aufgabe und Ableitung einer neuen Formel für die Basislänge des Fehlerdreieckes etc.

Von

Herrn **Jos. Schlesinger,**
k. k. Professor an der Forstakademie zu Mariabrunn.

---

§ 1.

Es seien ABC drei Feldpunkte und abc die ihnen entsprechenden Punkte des Messtischblattes; D sei ein vierter Feldpunkt als Standpunkt des Tisches, dem d entspreche, so muss bekanntlich das Viereck $abcd$ dem Feldvierecke $ABCD$ ähnlich sein. Ist der Tisch in D orientirt, so sind die Rayons da, db, dc beziehungsweise nach ABC gerichtet. Ist aber der Tisch um einen Winkel w verschwenkt, dann bilden in dem Falle, wenn D nicht in der Peripherie des Dreieckskreises ABC liegt, die 3 Rayons aA, bB, cC ein Fehlerdreieck $\alpha\beta\gamma$. Wir wollen die geraden Linien da, db, dc die richtigen und jene 3 Rayons, welche das Fehlerdreieck bilden, die Fehler-Rayons kurzweg nennen; d sei der Orientirungspunkt.

Ueber den Orientirungspunkt d gilt zunächst folgender schon von Gerling erwähnter Satz:

Liegt von einem der 3 Punkte, z. B. von a aus gesehen, der Orientirungspunkt d rechts oder links von dem durch a gehenden Fehler-Rayon, so liegt von b und c aus ge-

Digitized by Google

ehen der Orientirungspunkt d abermals rechts oder inks von dem durch b beziehungsweise durch c gehenden Fehler-Rayon. . . . . (1)

Die Richtigkeit dieses Satzes ist augenfällig; denn wenn die tralen da, db und dc (Taf. V. Fig. 1) nach A, B und C gerichtet nd und man dreht das Dreieck abc um einen beliebigen Punkt o er Dreiecksebene derart, dass da rechts oder links an A vorübereht, so geht auch db rechts oder links an B und dc rechts oder nks an C vorüber, was a priori einleuchtet. Ist aber diess der 'all und man zieht jetzt durch abc die 3 Fehlerrayons, so leuchtet uch der Satz (1) a priori ein.

Dieser Satz (1) lehrt nun einen Lehmann'schen Satz: Befinet sich der Standpunkt D des Tisches innerhalb des 'elddreieckes ABC, so liegt der Orientirungspunkt d nnerhalb des Fehlerdreieckes $\alpha\beta\gamma$. . . . . (2)

Nehmen wir an, in Taf. V. Fig. 2 soll d von a aus gesehen rechts om Fehlerrayon ax liegen, dann muss d auch rechts von by, mithin m Raume $a\gamma y$ sich befinden. Da aber vermöge (1) d auch rechts on cz liegen muss, und d nicht gleichzeitig im Raume $a\gamma y$ und echts von cz liegen kann, so folgt, dass d nicht rechts, sondern links on diesen 3 Fehlerrayons seinen Ort haben muss, und da zeigt sich, lass d nur im Innern des Fehlerdreieckes liegen kann; also ist der eine Lehmann'sche Satz bewiesen.

Um die anderen Sätze zu erweisen, wenn der Standpunkt D ausserhalb des Felddreieckes ABC liegt, denken wir uns auf dem Felde durch einen Dreieckspunkt, z. B. durch C, eine das Dreieck ABC durchschneidende Ecktransversale CZ ausgesteckt, welche mit der Seite AC irgend einen Winkel u, mit der Seite BC den Winkel $C-u=v$ einschliessen wird, und setzen voraus, der Tisch werde nur in Punkten der Geraden CZ ausserhalb des Dreieckes ABC aufgestellt. . . . . (3)

Wird der Tisch um einen Winkel w verschwenkt, so sind bekanntlich, wenn w nicht viele Grade ausmacht, die Winkel w' w'' w''' (Taf. V. Fig. 1) dem Winkel w graphisch gleich. . . . . (4)

Nehmen wir nun an, es seien auf dem Tische die der Geraden CZ und dem Dreieckskreise ABC entsprechenden Linien cz und der Dreieckskreis abc (Taf. V. Fig. 3), ferner entspreche d dem Feldstandpunkte D und p dem Schnittpunkte P der Transversale CZ mit dem Kreise ABC. Ist der Tisch um einen Winkel w verschwenkt, und zieht man vorläufig nur den mittleren und einen äusseren Fehler-

Digitized by Google

Rayon, d. i. cz' und by', so werden beide Fehler-Rayons einen Schnit punkt α erzeugen, und liegt cz' rechts von d, so liegt nach (1) l rechts von bd.

Verbinden wir p und p' mit b, so ist $\angle pbp' = \angle w$, gleich de Schwenkungswinkel des Tisches, und $\angle cp'b = \angle cpb$ als Peripheri winkel über demselben Bogen bc. . . . . (

Denkt man sich den Standpunkt D in der Geraden CZ verände lich, so ändert sich in entsprechender Weise auch d in der Gerade cz, und denkt man sich bei jeder Stellung des Tisches den Tisch u denselben Drehungswinkel w in demselben Drehungssinne verschwenk so muss der mittlere Fehler-Rayon cz' immer derselbe blei ben, während sich der Rayon by' mit d verändert. . . (6

Stellen wir uns vor, die Geraden cz', by' und bp' seien unterein ander fest verbunden, und drehen wir diese geraden Linien um b, bis di Gerade bp' in die Richtung der Geraden bp fällt, so ist der Drehungs winkel $= w$, mithin muss auch die Gerade by' in die Richtung b fallen. Da aber nach (5) $\angle cp'b = \angle cpb$, und $bp' \gtrless bp$ ist, so muss nach der Drehung die Gerade pz' zur Geraden p parallel werden. . . . . (7)

Ist aber $p'z'$ zu pz parallel, so erscheinen p' und α als centrale Projectionen der Punkte p und d aus dem Centrum b auf die zu pz parallele Gerade $p'z'$, mithin ist bei jeder Lage des Punktes d das Verhältniss $p'\alpha : pd$ dasselbe, d. h. es ist stets

$$p'\alpha = K_1 . pd \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

worin K_1 eine gewisse Constante bedeutet.

Würde man sich noch den dritten Fehler-Rayon durch a ziehen, seinen Schnittpunkt β mit cz' bestimmen und denselben Vorgang bezüglich des Puaktes β einhalten, so würde man die Relation

$$p'\beta = K_2 . pd \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

erhalten, wobei K_2 eine andere Constante sein wird. Stellt man die Werthe von $p'\alpha$ und $p'\beta$ in ein Verhältniss, so erhält man die merkwürdige Relation:

$$p'\alpha = K . p'\beta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (10),$$

in welcher $p'\alpha$ und $p'\beta$ nur die absoluten Längenmasse bedeuten.

Digitized by Google

Kann man jetzt zeigen, dass für irgend eine Stellung des Punktes D $p'\alpha \gtrless p'\beta$ ist, so muss diese Eigenichaft vermöge (10) für alle gen des Punktes D gelten. Nehmen wir nun an cz' sei immer chts von d und der Punkt D sei in C, also d in c, so muss wegen l) der Stral $b\alpha'$ ausserhalb bc und $a\beta'$ innerhalb ac fallen, also ist $\alpha' > p'\beta'$, folglich ist auch für diesen Drehungswinkel w stets:

$$p'\alpha > p'\beta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11).$$

Die Relation (11) lässt nun sofort die Richtigkeit der übrigen ehmann'schen Sätze wie folgt erkennen:

Befindet sich der Punkt d in der Strecke pz, so muss, eil $p'\alpha_1 > p'\beta_1$, und weil α_1 mit b und β_1 mit a verbunden wird, das ehlerdreieck $\alpha_1\ \beta_1\ \gamma_1$ auf derselben Seite der Basis $\alpha_1\ \beta_1$ iegen, auf welcher sich d befindet. . . . . (12)

Liegt der Punkt d auf der Strecke ps, oder auf der trecke cz, so muss aus denselben Ursachen der Punkt d auf der entgegengesetzten Seite der mittleren Visur liegen, auf welcher sich der Punkt d befindet. . . . . (13)

Es sind somit die Lehmann'schen Sätze, welche sich auf die Lage des Orientirungspunktes d gegen das Fehlerdreieck beziehen, auf eine neue Art nachgewiesen. Der fehlende Satz der Perpendikel wird auf bekannte Art gerechtfertigt.

Die vorstehende Beweisführung verdankt ihre Entstehung der neueren Geometrie, welche lehrt: Reihe α project. der Reihe d, Reihe β project. der Reihe d; Punkt p entsprechend p' und Punkt ∞ entsprechend Punkt ∞, mithin sind die Reihen α, β und d proportional. Die geometrische Proportionalität lässt eine parallele Lage der Träger der Punktreihen und Perspectivität zu und hieraus die Beweisführung mit den Mitteln der älteren Geometrie.

§. 2.

Wie Herr Jos. Höltschl in seiner Monographie über das Pothenot'sche Problem, Weimar 1868, zeigt, ist die Grösse $\alpha\beta$ der Basis des Fehlerdreieckes ein Charakteristikum der Empfindlichkeit der Orientirung; je grösser bei einem und demselben Werthe des Verschwenkungswinkels w die Basis $\alpha\beta$ wird, desto sicherer lässt sich im Allgemeinen der Tisch orientiren. Für $\alpha\beta$ wurde jedoch keine Formel entwickelt, welche eine bequeme Discus-

sion ermöglicht hätte, da für die letztere immer noch zwei Hilfsg chungen angewendet wurden. Anders gestaltet sich die Sache h weil sich $\overline{\alpha\beta}$ als eine Function von einander unabhängig vari bler Grössen darstellen lässt.

Subtrahirt man die Relationen (8) und (9) von einander, ergibt sich:

$$p'\alpha - p'\beta = (K_1 - K_2)\, pd$$

oder

$$\overline{\alpha\beta} = K.\overline{dp} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1$$

wobei K eine neue Constante bezeichnet, insofern w, u und v unve ändert bleiben.

Diese so einfache Formel (14) lehrt:

Je weiter sich der Tischstandpunkt D von dem Durch schnittspunkte 0 der Transversalen CZ mit dem Dreiecks kreise ABC in der Transversalen CZ entfernt, desto grösser wird bei demselben Verschwenkungswinkel w die Basis $\overline{\alpha\beta}$ des Fehlerdreieckes, d. h. desto grösser wird die Empfindlichkeit der Orientirung des Tisches.

Mit Rücksicht auf den sicheren Durchschnitt der 3 Rayons ist es daher empfehlenswerth, den Tischstandpunkt im Dreieck ABC oder in einem Scheitelwinkel desselben zu wählen.

In Formel (14) und Taf. V. Fig. 4 haben $\overline{\alpha\beta}$ und $\overline{dp}$ entweder einerlei oder verschiedenen Sinn; wird $\overline{dp} = 0$, so wird $\overline{\alpha\beta} = 0$, d. h. liegt der Tischstandpunkt D im Dreieckskreise ABC, so ist für jeden Werth des Winkels w die Basis des Fehlerdreieckes gleich Null, wie allbekannt. Wird jedoch dp negativ, so wird auch $\overline{\alpha\beta}$ negativ; war daher bei positivem dp $p'\alpha \gtrless p'\beta$, so ist bei negativem dp der absoluten Grösse nach auch $p'\alpha \gtrless p'\beta$, womit die Relation (11) sich abermals bestätigt findet.

Um in Formel (14) den Werth der Konstanten K zu bestimmen, verlege man d nach c; hierdurch wird $\alpha'\beta' = K.cp$, also ist

$$K = \frac{\alpha'\beta'}{cp} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

Digitized by Google

Nun ist in Taf. V. Fig. 3: $\alpha' c = \frac{a' \sin w}{\sin v}$ und $c\beta' = \frac{b' \sin w}{\sin u}$, folglich ist:

$$\alpha'\beta' = \sin w \cdot \frac{a' \sin u + b' \sin v}{\sin u \,.\, \sin v} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (16)$$

Zur Bestimmung von cp denke man sich p mit a zu einem Kreisviereck $acbp$ verbunden, und in einem solchen ist jederzeit das Produkt der beiden Diagonalen gleich der Summe der Produkte aus je zwei gegenüberliegenden Seiten; also erhält man:

$$cp \,.\, ab = a' \,.\, ap + b' \,.\, bp \quad \ldots \ldots \ldots \quad (17)$$

Nun ist es eine bekannte Sache, dass man den Durchmesser des einem Dreiecke umschriebenen Kreises erhält, wenn man eine beliebige Dreiecksseite durch den Sinus ihres gegenüberliegenden Winkels dividirt; mithin erkennt man die Richtigkeit nachstehender Gleichungen:

$$ab = 2r \,.\, \sin(u+v), \quad ap = 2r \,.\, \sin u, \quad bp = 2r \,.\, \sin v.$$

Setzt man diese Werthe in (17) ein, so entsteht nach Abkürzung mit $2r$:

$$cp \,.\, \sin u + v) = a' \sin u + b' \sin v.$$

Durch Substitution in (16) erhält man:

$$\alpha'\beta' = \sin w \cdot \frac{cp \,.\, \sin(u+v)}{\sin u \,.\, \sin v},$$

und hieraus folgt vermöge (15):

$$K = \frac{\alpha'\beta'}{cp} = \sin w \,.\, (\operatorname{cotg} u + \operatorname{cotg} v) \quad \ldots \ldots \quad (18)$$

Es lautet demnach die neue Formel für $\overline{\alpha\beta}$ folgendermassen:

$$\overline{\alpha\beta} = \sin w \,.\, (\operatorname{cotg} u + \operatorname{cotg} v) \,.\, dp \quad \ldots \ldots \quad (19)$$

In dieser Formel sind w, u und dp von einander ganz unabhängig, während $v = c - u$ ist. Die Formel (14), welche nun in (19) übergegangen ist, lässt sich noch weiter discutiren.

Lassen wir dp und w konstant, so wird $\overline{\alpha\beta}$ mit $(\operatorname{cotg} u + \operatorname{cotg} v) = U$ gleichzeitig ein Maximum oder Minimum. Nun ist:

Digitized by Google

$$\frac{dU}{du} = -\frac{1}{\sin^2 u} - \frac{d(c-u)}{du.\sin^2(c-u)} = -\frac{1}{\sin^2 u} + \frac{1}{\sin^2(c-u)} = 0..(2$$

und hieraüs folgt $u = c - u$, also ist:

$$u = v = \tfrac{1}{2}\angle C \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . (2$$

Aus (20) folgt dann:

$$\frac{d^2U}{du^2} = \frac{2\cos u}{\sin^3 u} + \frac{2\cos(c-u)}{\sin^2(c-u)}.$$

Da der zweite Differential-Quotient für $u = \frac{1}{2} C = \frac{1}{2} c$ positiv wir so wird U für $u = v = \frac{1}{2}\angle C$ ein Minimum, und man kann sagen:

Bewegt sich der Tischstandpunkt D in einer Eck transversale CZ weiter, so ist für dieselbe Distanz DP un denselben Schwenkungswinkel w die Basis $\overline{\alpha\beta}$ am kürze sten, wenn die Ecktransversale den Dreieckswinkel hal birt. . . . . (21

Es ist deshalb unter sonst gleichen Umständen die Tischorien tirung um so empfindlicher, je mehr sich der Tischstandpunkt eine Dreiecksseite nähert.

Von den 3 Winkel halbirenden Transversalen gibt jene für $\alpha\beta$ das absolute Minimum, welche den grössten Dreieckswinkel halbirt.

Geben wir jetzt dem Tische in demselben Standpunkte D verschiedene Schwenkungen w und w_1 so wird, weil u, v und dp unveränderlich bleiben:

$$\sin w : \sin w_1 = \alpha_1\beta_1.$$

Diese Relation erklärt: Wenn man in einem beliebigen Punkte des Orientirungsstrahles auf die beiden mittleren Fehlerstrahlen Perpendikel fällt, so verhalten sich diese wie die Längen der in den Mittelstrahlen liegenden Grundlinien der Fehlerdreiecke. . . . . (22).

§. 3.

Der soeben ausgesprochene Lehrsatz wurde im 16. Bande des Archiv's für Mathematik und Physik von Grunert zuerst aufgestellt

Digitized by Google

und in anderer Art nachgewiesen; er kann jedoch für sich auf eine höchst elementare Art einleuchtend gemacht werden.

Verbindet man die Endpunkte der Basis $\alpha\beta$ eines Fehlerdreieckes mit dem Orientirungspunkte d (Taf. V. Fig. 5), so soll dies Dreieck $d\alpha\beta$ ein Nebendreieck genannt werden.

In diesem Nebendreieck ist

$$\angle d\alpha\beta + \angle d\alpha c = 180^0,$$

und im Kreisviereck $bcad$ ist

$$\angle d\alpha c + \angle N = 180^0,$$

mithin folgt hieraus:

$$\angle d\alpha\beta = \angle N. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (23)$$

In dem Kreisviereck $acd\beta$ ist

$$\angle d\beta\alpha = \angle M \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (24)$$

weil die Schenkel beider Winkel durch dieselben Bogenpunkte cd gehen und die Scheitel in dem Bogen $d\beta ac$ liegen. Da nun die Winkel M und N für denselben Tischstandpunkt D unveränderlich bleiben und von w unabhängig sind, so folgt aus (23) und (24):

Für denselben Tischstandpunkt sind alle Nebendreiecke einander (graphisch) ähnlich. . . . . (25)

In ähnlichen Dreiecken verhalten verhalten sich die gleichnamigen Höhen wie die homologen Dreiecksseiten, also verhalten sich auch die Abstände des Punktes d von den Grundlinien der Fehlerdreiecke wie die Grundlinien selbst, und hieraus erkennt man ohneweiters die Richtigkeit des Grunert'schen Satzes.

Zieht man durch einen Basispunkt z. B. durch β (Taf. V. Fig. 6) dem Augenmasse nach eine Gerade βg, welche gegen $c\beta$ und cg gleich geneigt ist, so kann man in βg sehr leicht einen Punkt i derart finden, dass $i\beta : ig = \alpha\beta : \alpha_1\beta_1$ wird; denn macht man $\alpha\alpha'' = \alpha_1\beta_1$ und zieht durch α eine Parallele zu $\alpha''g$, so ist i gefunden.

Da die Perpendikel von i auf $c\beta$ und cg in Folge entstehender rechtwinkliger ähnlicher Dreiecke sich wie $i\beta : ig$, also auch wie $\alpha\beta : \alpha_1\beta_1$ verhalten müssen, so geht der Orientirungsstrahl cd durch den Punkt i. Man darf demnach das Diopterlineal nur an ci anlegen, die Visur auf C einstellen und der Messtisch ist orientirt.

Digitized by Google

Die Lage des Punktes i wird folgenderart beurtheilt. Man s leicht ein: Liegen die beiden Fehlerdreiecke auf verschiedenen Se der mittleren Rayons $\alpha\beta$, $\alpha_1\beta_1$, so liegt d, also auch i, zwischen beiden mittleren Fehlerstralen; liegen ader die beiden Fehlerdreie auf einerlei Seite der mittleren Rayons, so liegt d und auch i in je stumpfen Winkel der beiden mittleren Rayons, welcher dem kleine Fehler-Dreieck entweder anliegt oder es enthält. Es ist sonach zweifelhaft, wo i in der Geraden βg liegen wird. Fällt i in stumpfen Winkel, so ist die Richtung $\alpha\alpha''$ jener von β nach α gegengesetzt anzunehmen.

Der hier beschriebene Vorgang, den Punkt i mittelst der Gera βg auszumitteln, scheint noch nicht bekannt zu sein, da man s i immer durch einen sehr schiefen Schnitt zweier Geraden bestimm die beziehungsweise in den Abständen $\alpha\beta$ und $\alpha_1\beta_1$ zu den mittle Rayons parallel gezogen wurden.

Schliesslich sei noch bemerkt, dass für denselben Standpunkt auch die Fehlerdreiecke unter einander graphisch äh lich sind.

IX.

Ueber einen merkwürdigen Satz von den Kegelschnitten *).

Von

dem Herausgeber.

(Fig. s. Taf. IV.)

I.

In der „Theoria motuum Planetarum et Cometarum. Auctore Leonhardo Eulero. Berolini. 4°. p. 150" (ohne Jahreszahl) — der berühmten Vorläuferin der noch berühmteren „Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium. Hamburgi. 1809. 4°." von Gauss — giebt Euler einen merkwürdigen Satz von den Kegelschnitten, den er mit Rücksicht auf Fig. 1. auf folgende Art ausspricht:

Si a tribus quibuscunque sectionis conicae punctis F, G, H ad ejus alterum focum S ducantur rectae FS, GS et HS, atque duo eorum G et H cum tertio F jungantur rectis GF et HF, ac denique ex G ducatur recta GJK parallela ipsi FS secans rectas HF, HS si opus est productas in J et K; erit GJ ad $SK+KG-SG$ uti SF ad semissem lateris recti.

Der Beweis, welchen Euler für diesen Satz giebt, ist keineswegs allgemein genug, und schliesst sich — wie es die Methoden der damaligen Zeit mit sich brachten — lediglich dem durch die Figur dargestellten besonderen Falle an. Dies ist dann aber auch die Veranlassung gewesen, dass der obige Ausdruck des Satzes durchaus

*) Auf der zu dieser Abhandlung gehörenden Taf. IV. muss es unten in der zweiten Hälfte der Tafel statt Nr. VII. heissen Nr. IX.

Digitized by Google

nicht alle Fälle, die bei demselben eintreten können, umfasst, wo[l] man jedoch zur Entschuldigung dieser allerdings sehr mangelhaft[e] Behandlungsweise nicht aus den Augen lassen darf, dass Eul[er] a. a. O. hauptsächlich die Anwendung des Satzes bei der Berechnu[ng] oder Bestimmung der Bahnen der Planeten und Kometen im Au[ge] hatte, wofür der obige Ausdruck im Ganzen wohl genügen mag.

Da ich den Satz auch als ein reines geometrisches Theorem f[ür] sehr interessant, merkwürdig und wichtig halte, so will ich denselb[en] in dieser Abhandlung einer eingehenden Behandlung unterwerf[en], wobei ich eine vollständige Kenntniss meiner früheren Abhandlu[ng] Nr. VI. voraussetze, auf welche ich mehrfach zurückzugehen Veranlassu[ng] finden werde, und deshalb mich auch hier durchgehends derselbe[n] Zeichen bedienen werde wie in der in Rede stehenden Abhandlung.

II.

Ein Brennpunkt eines Kegelschnitts *) sei S und

$$A_0, \quad A_1, \quad A_2$$

seien drei beliebige Punkte dieses Kegelschnitts, deren Coordinaten in Bezug auf ein beliebiges rechtwinkliges Coordinatensystem der xy wir beziehungsweise durch

$$x_0, y_0; \quad x_1, y_1; \quad x_2, y_2$$

bezeichnen wollen; die Coordinaten des Brennpunkts S in Bezug auf dasselbe Coordinatensystem seien f, g; und die den drei Punkten A_0, A_1, A_2 des Kegelschnitts entsprechenden Vectoren

$$SA_0, \quad SA_1, \quad SA_2$$

bezeichnen wir beziehungsweise durch

$$r_0, \quad r_1, \quad r_2.$$

Nehmen wir jetzt grösserer Einfachheit wegen den Brennpunkt S als Anfang der xy an, so ist $f=0$, $g=0$; folglich nach Nr. VI. §. 3. 15):

---

*) Zur Erläuterung dient Fig. 2.

Digitized by Google

$$1) \quad \begin{cases} x_0 = r_0 \cos\omega_0, & y_0 = r_0 \sin\omega_0; \\ x_1 = r_1 \cos\omega_1, & y_1 = r_1 \sin\omega_1; \\ x_2 = r_2 \cos\omega_2, & y_2 = r_2 \sin\omega_2. \end{cases}$$

Die Gleichung der Linie A_0A_2 ist:

$$y - y_0 = \frac{y_0 - y_2}{x_0 - x_2}(x - x_0),$$

also nach 1):

$$2) \quad y - r_0 \sin\omega_0 = \frac{r_0 \sin\omega_0 - r_2 \sin\omega_2}{r_0 \cos\omega_0 - r_2 \cos\omega_2}(x - r_0 \cos\omega_0).$$

Die Gleichung der Linie SA_2 ist:

$$3) \quad y = \frac{y_2}{x_2}x = \frac{\sin\omega_2}{\cos\omega_2}x = x \operatorname{tang}\omega_2.$$

Die Gleichung der Linie SA_0 ist:

$$4) \quad y = \frac{y_0}{x_0}x = \frac{\sin\omega_0}{\cos\omega_0}x = x \operatorname{tang}\omega_0;$$

und denken wir uns nun durch einen der drei Punkte A_0, A_1, A_2 — etwa durch A_1 — mit einer der drei Linien SA_0, SA_1, SA_2 — etwa mit SA_0 — eine Parallele gezogen; so ist die Gleichung dieser Parallelen:

$$y - y_1 = \frac{\sin\omega_0}{\cos\omega_0}(x - x_1) = (x - x_1)\operatorname{tang}\omega_0,$$

also nach 1):

$$5) \quad y - r_1 \sin\omega_1 = \frac{\sin\omega_0}{\cos\omega_0}(x - r_1 \cos\omega_1) = (x - r_1 \cos\omega_1)\operatorname{tang}\omega_0.$$

Bezeichnen wir nun die Coordinaten der Durchschnittspunkte der durch A_1 mit SA_0 gezogenen Parallelen mit den Geraden A_0A_2 und SA_2 beziehungsweise durch $\overset{1}{x}_{02}$, $\overset{1}{y}_{02}$ und $\overset{1}{x}_{s2}$, $\overset{1}{y}_{s2}$; so hat man zur Bestimmung der beiden ersteren nach 2) und 5) die Gleichungen:

$$\overset{1}{y}_{02} - r_0 \sin\omega_0 = \frac{r_0 \sin\omega_0 - r_2 \sin\omega_2}{r_0 \cos\omega_0 - r_2 \cos\omega_2}(\overset{1}{x}_{02} - r_0 \cos\omega_0),$$

$$\overset{1}{y}_{02} - r_1 \sin\omega_1 = \frac{\sin\omega_0}{\cos\omega_0}(\overset{1}{x}_{02} - r_1 \cos\omega_1);$$

Digitized by Google

welche wir unter der folgenden Form darstellen wollen:

$$\overset{1}{y}_{02}-y_1-(r_0\sin\omega_0-r_1\sin\omega_1)$$
$$=\frac{r_0\sin\omega_0-r_2\sin\omega_2}{r_0\cos\omega_0-r_2\cos\omega_2}\{(\overset{1}{x}_{02}-x_1)-(r_0\cos\omega_0-r_1\cos\omega_1)\},$$
$$\overset{1}{y}_{02}-y_1=\frac{\sin\omega_0}{\cos\omega_0}(\overset{1}{x}_{02}-x_1);$$

und bestimmen wir nun aus diesen beiden Gleichungen die Gröss $\overset{1}{x}_{02}-x_1$, $\overset{1}{y}_{02}-y_1$; so erhalten wir nach einigen leichten Verwar lungen:

$$6)\left\{\begin{array}{l}\overset{1}{x}_{02}-x_1=\cos\omega_0\dfrac{r_0r_1\sin(\omega_0-\omega_1)+r_1r_2\sin(\omega_1-\omega_2)+r_2r_0\sin(\omega_2-\omega_0)}{r_2\sin(\omega_2-\omega_0)}\\ \overset{1}{y}_{02}-y_1=\sin\omega_0\dfrac{r_0r_1\sin(\omega_0-\omega_1)+r_1r_2\sin(\omega_1-\omega_2)+r_2r_0\sin(\omega_2-\omega_0)}{r_2\sin(\omega_2-\omega_0)}\end{array}\right.$$

also, weil

$$(A_1\overset{1}{A}_{02})^2=(\overset{1}{x}_{02}-x_1)^2+(\overset{1}{y}_{02}-y_1)^2$$

ist:

$$7)\quad (A_1\overset{1}{A}_{02})^2=\left\{\frac{r_0r_1\sin(\omega_0-\omega_1)+r_1r_2\sin(\omega_1-\omega_2)+r_2r_0\sin(\omega_2-\omega_0)}{r_2\sin(\omega_2-\omega_0)}\right\}^2$$

Zur Bestimmung von $\overset{1}{x}_{s2}$, $\overset{1}{y}_{s2}$ hat man nach 3) und 5) di Gleichungen:

$$\overset{1}{y}_{s2}=\frac{\sin\omega_2}{\cos\omega_2}\overset{1}{x}_{s2},$$
$$\overset{1}{y}_{s2}-r_1\sin\omega_1=\frac{\sin\omega_0}{\cos\omega_0}(\overset{1}{x}_{s2}-r_1\cos\omega_1);$$

welche wir unter der folgenden Form darstellen wollen:

$$(\overset{1}{y}_{s2}-y_1)+r_1\sin\omega_1=\frac{\sin\omega_2}{\cos\omega_2}\{(\overset{1}{x}_{s2}-x_1)+r_1\cos\omega_1\},$$
$$\overset{1}{y}_{s2}-y_1=\frac{\sin\omega_0}{\cos\omega_0}(\overset{1}{x}_{s2}-x_1);$$

und bestimmen wir nun aus diesen Gleichungen die Grössen $\overset{1}{x}_{s2}-x_1$, $\overset{1}{y}_{s2}-y_1$; so erhalten wir nach einigen leichten Verwandlungen:

Digitized by Google

$$\ldots\ldots\ldots \left\{\begin{array}{l} \overset{1}{x}_{s2}-x_1=r_1\cos\omega_0\dfrac{\sin(\omega_1-\omega_2)}{\sin(\omega_2-\omega_0)},\\[2ex] \overset{1}{y}_{s2}-y_1=r_1\sin\omega_0\dfrac{\sin(\omega_1-\omega_2)}{\sin(\omega_2-\omega_0)}; \end{array}\right.$$

o, weil

$$(A_1\overset{1}{A}_{s2})^2=(\overset{1}{x}_{s2}-x_1)^2+(\overset{1}{y}_{s2}-y_1)^2$$

:

$$)\ldots\ldots\ldots (A_1\overset{1}{A}_{s2})^2=r_1{}^2\left\{\frac{\sin(\omega_1-\omega_2)}{\sin(\omega_2-\omega_0)}\right\}^2.$$

Aus den Gleichungen 8) erhält man:

$${}_{2}=x_1+r_1\cos\omega_0\frac{\sin(\omega_1-\omega_2)}{\sin(\omega_2-\omega_0)}=r_1\cos\omega_1+r_1\cos\omega_0\frac{\sin(\omega_1-\omega_2)}{\sin(\omega_2-\omega_0)},$$

$${}_{2}=y_1+r_1\sin\omega_0\frac{\sin(\omega_1-\omega_2)}{\sin(\omega_2-\omega_0)}=r_1\sin\omega_1+r_1\sin\omega_0\frac{\sin(\omega_1-\omega_2)}{\sin(\omega_2-\omega_0)};$$

so, wie man mittelst einiger leichten Verwandlungen findet:

$$0)\ldots\ldots\ldots \left\{\begin{array}{l} \overset{1}{x}_{s2}=-r_1\cos\omega_2\dfrac{\sin(\omega_0-\omega_1)}{\sin(\omega_2-\omega_0)},\\[2ex] \overset{1}{y}_{s2}=-r_1\sin\omega_2\dfrac{\sin(\omega_0-\omega_1)}{\sin(\omega_2-\omega_0)}; \end{array}\right.$$

folglich, weil

$$(S\overset{1}{A}_{s2})^2=(\overset{1}{x}_{s2})^2+(\overset{1}{y}_{s2})^2$$

st:

$$1)\ldots\ldots\ldots (S\overset{1}{A}_{s2})^2=r_1{}^2\left\{\frac{\sin(\omega_0-\omega_1)}{\sin(\omega_2-\omega_0)}\right\}^2.$$

Ohne alle Beziehung der Vorzeichen in den folgenden Formeln uf einander ist also nach dem Vorhergehenden:

Digitized by Google

12)

$$SA_0 = r_0,$$

$$SA_1 = r_1,$$

$$A_1\overset{1}{A}_{02} = \pm\frac{r_0 r_1 \sin(\omega_0-\omega_1)+r_1 r_2 \sin(\omega_1-\omega_2)+r_2 r_0 \sin(\omega_2-\omega_0)}{r_2 \sin(\omega_2-\omega_0)},$$

$$A_1\overset{1}{A}_{s2} = \pm r_1\frac{\sin(\omega_1-\omega_2)}{\sin(\omega_2-\omega_0)},$$

$$S\overset{1}{A}_{s2} = \pm r_1\frac{\sin(\omega_0-\omega_1)}{\sin(\omega_2-\omega_0)};$$

wo überall die Vorzeichen so genommen werden müssen, dass *die* Grössen auf der linken Seite der Gleichheitszeichen sämmtlich positiv ausfallen.

Wir unterscheiden nun die folgenden vier Fälle, die wir im Folgenden immer durch

(I), (II), (III), (IV)

bezeichnen werden:

Es haben:

(I)

$\sin(\omega_1-\omega_2)$, $\sin(\omega_2-\omega_0)$ gleiche
$\sin(\omega_0-\omega_1)$, $\sin(\omega_2-\omega_0)$ gleiche } Vorzeichen.

(II)

$\sin(\omega_1-\omega_2)$, $\sin(\omega_2-\omega_0)$ gleiche
$\sin(\omega_0-\omega_1)$, $\sin(\omega_2-\omega_0)$ ungleiche } Vorzeichen.

(III)

$\sin(\omega_1-\omega_2)$, $\sin(\omega_2-\omega_0)$ ungleiche
$\sin(\omega_0-\omega_1)$, $\sin(\omega_2-\omega_0)$ gleiche } Vorzeichen.

(IV)

$\sin(\omega_1-\omega_2)$, $\sin(\omega_2-\omega_0)$ ungleiche
$\sin(\omega_0-\omega_1)$, $\sin(\omega_2-\omega_0)$ ungleiche } Vorzeichen.

Rücksichtlich der drei Grössen:

$$\sin(\omega_0-\omega_1),\quad \sin(\omega_1-\omega_2),\quad \sin(\omega_2-\omega_0)$$

kann man diese vier Fälle auch auf folgende Art charakterisiren:

Digitized by Google

(I)

Diese drei Grössen haben sämmtlich gleiche Vorzeichen.

(II)

Die zwei ersten Grössen haben ungleiche, die erste und dritte haben ungleiche, die zweite und dritte haben gleiche Vorzeichen.

(III)

Die zwei ersten Grössen haben ungleiche, die erste und dritte haben gleiche, die zweite und dritte haben ungleiche Vorzeichen.

(IV)

Die zwei ersten Grössen haben gleiche, die erste und dritte haben ungleiche und auch die zweite und dritte haben ungleiche Vorzeichen.

In diesen vier Fällen hat man also nach dem Obigen zu setzen:

$$\text{(I)} \ldots\ldots \left\{\begin{aligned} SA_1 &= r_1, \\ A_1\overset{1}{A}_{s_2} &= r_1\frac{\sin(\omega_1-\omega_2)}{\sin(\omega_2-\omega_0)}, \\ S\overset{1}{A}_{s_2} &= r_1\frac{\sin(\omega_0-\omega_1)}{\sin(\omega_2-\omega_0)}. \end{aligned}\right.$$

$$\text{(II)} \ldots\ldots \left\{\begin{aligned} SA_1 &= r_1, \\ A_1\overset{1}{A}_{s_2} &= r_1\frac{\sin(\omega_1-\omega_2)}{\sin(\omega_2-\omega_0)}, \\ S\overset{1}{A}_{s_2} &= -r_1\frac{\sin(\omega_0-\omega_1)}{\sin(\omega_2-\omega_0)}. \end{aligned}\right.$$

$$\text{(III)} \ldots\ldots \left\{\begin{aligned} SA_1 &= r_1, \\ A_1\overset{1}{A}_{s_2} &= -r_1\frac{\sin(\omega_1-\omega_2)}{\sin(\omega_2-\omega_0)}, \\ S\overset{1}{A}_{s_2} &= r_1\frac{\sin(\omega_0-\omega_1)}{\sin(\omega_2-\omega_0)}. \end{aligned}\right.$$

$$\text{(IV)} \ldots\ldots \left\{\begin{aligned} SA_1 &= r_1, \\ A_1\overset{1}{A}_{s_2} &= -r_1\frac{\sin(\omega_1-\omega_2)}{\sin(\omega_2-\omega_0)}, \\ S\overset{1}{A}_{s_2} &= -r_1\frac{\sin(\omega_0-\omega_1)}{\sin(\omega_2-\omega_0)}. \end{aligned}\right.$$

Digitized by Google

oder:

$$(\mathrm{I}) \;\ldots\ldots\; \left\{\begin{aligned} SA_1 &= r_1, \\ A_1\overset{1}{A}_{s2} &= r_1\frac{\sin(\omega_1-\omega_2)}{\sin(\omega_2-\omega_0)}, \\ S\overset{1}{A}_{s2} &= r_1\frac{\sin(\omega_0-\omega_1)}{\sin(\omega_2-\omega_0)}. \end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{II}) \;\ldots\ldots\; \left\{\begin{aligned} SA_1 &= r_1, \\ A_1\overset{1}{A}_{s2} &= r_1\frac{\sin(\omega_1-\omega_2)}{\sin(\omega_2-\omega_0)}, \\ -\;S\overset{1}{A}_{s2} &= r_1\frac{\sin(\omega_0-\omega_1)}{\sin(\omega_2-\omega_0)}. \end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{III}) \;\ldots\ldots\; \left\{\begin{aligned} SA_1 &= r_1, \\ -A_1\overset{1}{A}_{s2} &= r_1\frac{\sin(\omega_1-\omega_2)}{\sin(\omega_2-\omega_0)}, \\ S\overset{1}{A}_{s2} &= r_1\frac{\sin(\omega_0-\omega_1)}{\sin(\omega_2-\omega_0)}. \end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{IV}) \;\ldots\ldots\; \left\{\begin{aligned} SA_1 &= r_1, \\ -A_1\overset{1}{A}_{s2} &= r_1\frac{\sin(\omega_1-\omega_2)}{\sin(\omega_2-\omega_0)}, \\ -\;S\overset{1}{A}_{s2} &= r_1\frac{\sin(\omega_1-\omega_2)}{\sin(\omega_2-\omega_0)}. \end{aligned}\right.$$

III.

Wir wollen nun annehmen, dass die drei Punkte A_0, A_1, A_2 sämmtlich in einer Parabel, oder in einer Ellipse, oder in dem ersten Zweige einer Hyperbel, oder in dem zweiten Zweige einer Hyperbel liegen; und setzen der Kürze wegen

$$\begin{aligned} \Omega &= \sin(\omega_0-\omega_1)+\sin(\omega_1-\omega_2)+\sin(\omega_2-\omega_0) \\ &= -4\sin\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)\sin\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)\sin\tfrac{1}{2}(\omega_2-\omega_0). \end{aligned}$$

Dann ist nach II. in den vorher unterschiedenen vier Fällen:

Digitized by Google

$$\text{(I)} \; \ldots\ldots \; SA_1 + A_1\overset{1}{A}_{s2} + S\overset{1}{A}_{s2} = \frac{r_1\Omega}{\sin(\omega_2-\omega_0)},$$

$$\text{(II)} \; \ldots\ldots \; SA_1 + A_1\overset{1}{A}_{s2} - S\overset{1}{A}_{s2} = \frac{r_1\Omega}{\sin(\omega_2-\omega_0)},$$

$$\text{(III)} \; \ldots\ldots \; SA_1 - A_1\overset{1}{A}_{s2} + S\overset{1}{A}_{s2} = \frac{r_1\Omega}{\sin(\omega_2-\omega_0)},$$

$$\text{(IV)} \; \ldots\ldots \; SA_1 - A_1\overset{1}{A}_{s2} - S\overset{1}{A}_{s2} = \frac{r_1\Omega}{\sin(\omega_2-\omega_0)};$$

wobei man zu bemerken hat, dass, weil

$$SA_1, \quad A_1\overset{1}{A}_{s2}, \quad S\overset{1}{A}_{s2}$$

die drei Seiten eines Dreiecks sind, nach einem bekannten geometrischen Elementarsatze die vier Grössen:

$$SA_1 + A_1\overset{1}{A}_{s2} + S\overset{1}{A}_{s2},$$

$$SA_1 + A_1\overset{1}{A}_{s2} - S\overset{1}{A}_{s2},$$

$$SA_1 - A_1\overset{1}{A}_{s2} + S\overset{1}{A}_{s2},$$

$$SA_1 - A_1\overset{1}{A}_{s2} - S\overset{1}{A}_{s2}$$

nach der Reihe

positiv, positiv, positiv, negativ

sind; so dass also nach dem Vorhergehenden:

$$\text{(I)} \; \ldots \; S\overset{1}{A}_{s2} + A_1\overset{1}{A}_{s2} + SA_1 = \frac{r_1 \,\text{val. abs.}\, \Omega}{\text{val. abs.} \sin(\omega_2-\omega_0)},$$

$$\text{(II)} \; \ldots \; -S\overset{1}{A}_{s2} + A_1\overset{1}{A}_{s2} + SA_1 = \frac{r_1 \,\text{val. abs.}\, \Omega}{\text{val. abs.} \sin(\omega_2-\omega_0)},$$

$$\text{(III)} \; \ldots \; S\overset{1}{A}_{s2} - A_1\overset{1}{A}_{s2} + SA_1 = \frac{r_1 \,\text{val. abs.}\, \Omega}{\text{val. abs.} \sin(\omega_2-\omega_0)},$$

$$\text{(IV)} \; \ldots \; S\overset{1}{A}_{s2} + A_1\overset{1}{A}_{s2} - SA_1 = \frac{r_1 \,\text{val. abs.}\, \Omega}{\text{val. abs.} \sin(\omega_2-\omega_0)}$$

ist.

Nach der Abhandlung Nr. VI.. §. 3. 20) ist nun

Digitized by Google

$$p=\frac{8r_0r_1r_2.\text{val. abs.}\{\sin\frac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)\sin\frac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)\sin\frac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)\}}{\text{val. abs.}\{r_0r_1\sin(\omega_0-\omega_1)+r_1r_2\sin(\omega_1-\omega_2)+r_2r_0\sin(\omega_2-\omega_0)\}}$$

also, weil nach dem Vorhergehenden:

$$\text{val. abs.}\{\sin\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)\sin\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)\sin\tfrac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)\}=\tfrac{1}{4}\text{val. abs. }\Omega$$

und nach II.

$$\text{val. abs.}\{r_0r_1\sin(\omega_0-\omega_1)+r_1r_2\sin(\omega_1-\omega_2)+r_2r_0\sin(\omega_2-\omega_0)\}$$
$$=r_2.A_1\overset{1}{A}_{02}.\text{val. abs.}\sin(\omega_2-\omega_0)$$

ist:

$$p=\frac{2r_0r_1.\text{val. abs. }\Omega}{A_1\overset{1}{A}_{02}.\text{val. abs.}\sin(\omega_2-\omega_0)},$$

also:

$$\frac{r_1\text{ val. abs. }\Omega}{\text{val. abs.}\sin(\omega_2-\omega_0)}=\tfrac{1}{2}p\cdot\frac{A_1\overset{1}{A}_{02}}{SA_0}.$$

Folglich ist nach dem Vorhergehenden:

$$\text{(I)} \quad \tfrac{1}{2}p.\frac{A_1\overset{1}{A}_{02}}{SA_0}=S\overset{1}{A}_{s2}+A_1\overset{1}{A}_{s2}+SA_1,$$

$$\text{(II)} \quad \tfrac{1}{2}p.\frac{A_1\overset{1}{A}_{02}}{SA_0}=-S\overset{1}{A}_{s2}+A_1\overset{1}{A}_{s2}+SA_1,$$

$$\text{(III)} \quad \tfrac{1}{2}p.\frac{A_1\overset{1}{A}_{02}}{SA_0}=S\overset{1}{A}_{s2}-A_1\overset{1}{A}_{s2}+SA_1,$$

$$\text{(IV)} \quad \tfrac{1}{2}p.\frac{A_1\overset{1}{A}_{02}}{SA_0}=S\overset{1}{A}_{s2}+A_1\overset{1}{A}_{s2}-SA_1;$$

woraus sich unmittelbar die folgenden Formeln:

$$\text{(I)} \quad \tfrac{1}{2}p=\frac{SA_0}{A_1\overset{1}{A}_{02}}.(S\overset{1}{A}_{s2}+A_1\overset{1}{A}_{s2}+SA_1),$$

$$\text{(II)} \quad \tfrac{1}{2}p=\frac{SA_0}{A_1\overset{1}{A}_{02}}.(-S\overset{1}{A}_{s2}+A_1\overset{1}{A}_{s2}+SA_1),$$

$$\text{(III)} \quad \tfrac{1}{2}p=\frac{SA_0}{A_1\overset{1}{A}_{02}}(S\overset{1}{A}_{s2}-A_1\overset{1}{A}_{s2}+SA_1),$$

$$\text{(IV)} \quad \tfrac{1}{2}p=\frac{SA_0}{A_1\overset{1}{A}_{02}}.(S\overset{1}{A}_{s2}+A_1\overset{1}{A}_{s2}-SA_1);$$

Digitized by Google

oder die Proportionen:

$$\text{(I)} \quad . \;.\; .\; .\; .\; A_1\overset{1}{A}_{02} : \quad S\overset{1}{A}_{s2} + A_1\overset{1}{A}_{s2} + SA_1 = SA_0 : \tfrac{1}{2}p,$$

$$\text{(II)} \quad . \;.\; .\; .\; .\; A_1\overset{1}{A}_{02} : -S\overset{1}{A}_{s2} + A_1\overset{1}{A}_{s2} + SA_1 = SA_0 : \tfrac{1}{2}p,$$

$$\text{(III)} \quad . \;.\; .\; .\; A_1\overset{1}{A}_{02} : \quad S\overset{1}{A}_{s2} - A_1\overset{1}{A}_{s2} + SA_1 = SA_0 : \tfrac{1}{2}p,$$

$$\text{(IV)} \quad . \;.\; .\; .\; A_1\overset{1}{A}_{02} : \quad S\overset{1}{A}_{s2} + A_1\overset{1}{A}_{s2} - SA_1 = SA_0 : \tfrac{1}{2}p$$

ergeben.

Die in den zweiten Gliedern dieser Proportionen zu nehmenden Vorzeichen der drei Theile eines jeden dieser Glieder kann man nach der folgenden Regel bestimmen.

Rücksichtlich der Vorzeichen der Grössen

$$\sin(\omega_0 - \omega_1), \quad \sin(\omega_1 - \omega_2), \quad \sin(\omega_2 - \omega_0)$$

können die folgenden Fälle eintreten:

$\sin(\omega_0 - \omega_1)$,	$\sin(\omega_1 - \omega_2)$,	$\sin(\omega_2 - \omega_0)$
$\pm$	$\pm$	$\pm$
$\pm$	$\mp$	$\mp$
$\pm$	$\mp$	$\pm$
$\pm$	$\pm$	$\mp$

In diesen vier Gruppen doppelter Zeichen nehme man nun die oberen oder unteren Zeichen in der Weise, dass in jeder der hierdurch sich ergebenden Gruppen einfacher Zeichen das Zeichen $+$ mindestens zweimal vorkommt.

Verfährt man nach dieser Regel, so erhält man:

$+$	$+$	$+$
$-$	$+$	$+$
$+$	$-$	$+$
$+$	$+$	$-$

welches nach den vorstehenden Proportionen die richtigen Zeichen sind.

Die von S ausgehende Axe, von welcher an die Winkel ω_0, ω_1, ω_2 gezählt werden, kann man in jeder beliebigen Weise, wie es gerade bequem ist, annehmen, und die in Rede stehenden Winkel

Digitized by Google

nach jeder beliebigen Richtung hin zählen; öfters wird es bequem sein, als Axe die Gerade SA_0 anzunehmen, und die Winkel ω_0, ω_1, ω_2 nach der Richtung $A_0A_1A_2$ zu zählen.

Mit Rücksicht hierauf ist in dem von **Euler** betrachteten besonderen Falle, welchem Fig. 1. und Fig. 2. entsprechen,

$$\sin\,(\omega_0-\omega_1) \text{ negativ},$$

$$\sin\,(\omega_1-\omega_2) \text{ negativ},$$

$$\sin\,(\omega_2-\omega_0) \text{ positiv};$$

so dass also

$$\sin(\omega_1-\omega_2),\quad \sin(\omega_2-\omega_0) \text{ ungleiche},$$

$$\sin(\omega_0-\omega_1),\quad \sin(\omega_2-\omega_0) \text{ ungleiche}$$

Vorzeichen haben, welches der Fall (IV) ist. Daher ist in diesem Falle mit Rücksicht auf Fig. 2.

$$A_1\overset{1}{A}_{02}:S\overset{1}{A}_{s2}+A_1\overset{1}{A}_{s2}-SA_1=SA_0:\tfrac{1}{2}p,$$

oder mit Rücksicht auf Fig. 1.

$$GJ:SK+KG-SG=SF:\tfrac{1}{2}p,$$

was ganz mit der in I. angegebenen Proportion übereinstimmt.

In dem in Fig. 3. dargestellten Falle, wenn wieder SA_0 als Axe angenommen wird, ist, welches zu erläutern die punktirten Linien in der Figur bestimmt sind, offenbar:

$$0 \leqq \omega_1-\omega_0 < 90^0,$$

$$90^0 < \omega_2-\omega_1 < 180^0,$$

$$180^0 < \omega_2-\omega_0 < 270^0;$$

und es ist also:

$$\sin(\omega_1-\omega_0) \text{ positiv},$$

$$\sin(\omega_2-\omega_1) \text{ positiv},$$

$$\sin(\omega_2-\omega_0) \text{ negativ};$$

folglich:

$$\sin(\omega_0-\omega_1) \text{ negativ},$$

$$\sin(\omega_1-\omega_2) \text{ negativ},$$

$$\sin(\omega_2-\omega_0) \text{ negativ};$$

Digitized by Google

welches der Fall (I) ist. Also ist nach dem Obigen:

$$A_1\overset{1}{A}_{02}:S\overset{1}{A}_{s2}+A_1\overset{1}{A}_{s2}+SA_1=SA_0:\tfrac{1}{2}p,$$

oder, wenn man die einzelnen Punkte

$$S,\quad A_0,\quad A_1,\quad A_2,\quad \overset{1}{A}_{02},\quad \overset{1}{A}_{s2}$$

wie in **Fig.** 1. beziehungsweise durch

$$S,\quad F,\quad G,\quad H,\quad J,\quad K$$

bezeichnet:

$$GJ:SK+KG+SG=SF:\tfrac{1}{2}p.$$

Man sieht hieraus, wie nothwendig es ist, die verschiedenen Fälle sorgfältig von einander zu unterscheiden, was nach den vorher gegebenen Regeln immer sehr leicht möglich ist.

IV.

Wir wollen nun annehmen, dass der Punkt A_0 in dem einen Zweige, die Punkte A_1, A_2 in dem anderen Zweige einer Hyperbel liegen, und setzen der Kürze wegen jetzt

$$\begin{aligned}\Omega = &\quad \sin(\omega_0-\omega_1)-\sin(\omega_1-\omega_2)+\sin(\omega_2-\omega_0)\\ &=-4\cos\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)\sin\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)\cos\tfrac{1}{2}(\omega_2-\omega_0).\end{aligned}$$

Dann ist nach II. in den im Obigen unterschiedenen vier Fällen:

$$\text{(I)}\ \ldots\ldots\ SA_1-A_1\overset{1}{A}_{s2}+S\overset{1}{A}_{s2}=\frac{r_1\Omega}{\sin(\omega_2-\omega_0)},$$

$$\text{(II)}\ \ldots\ldots\ SA_1-A_1\overset{1}{A}_{s2}-S\overset{1}{A}_{s2}=\frac{r_1\Omega}{\sin(\omega_2-\omega_0)},$$

$$\text{(III)}\ \ldots\ldots\ SA_1+A_1\overset{1}{A}_{s2}+S\overset{1}{A}_{s2}=\frac{r_1\Omega}{\sin(\omega_2-\omega_0)},$$

$$\text{(IV)}\ \ldots\ldots\ SA_1+A_1\overset{1}{A}_{s2}-S\overset{1}{A}_{s2}=\frac{r_1\Omega}{\sin(\omega_2-\omega_0)};$$

wobei man zu bemerken hat, dass die Grössen

Digitized by Google

$$SA_1 - A_1\overset{1}{A}_{s2} + S\overset{1}{A}_{s2},$$

$$SA_1 - A_1\overset{1}{A}_{s2} - S\overset{1}{A}_{s2},$$

$$SA_1 + A_1\overset{1}{A}_{\ 2} + S\overset{1}{A}_{s2},$$

$$SA_1 + A_1\overset{1}{A}_{s2} - S\overset{1}{A}_{s2}$$

nach der Reihe

positiv, negativ, positiv, positiv

sind; so dass also nach dem Vorhergehenden:

$$\text{(I)} \quad \ldots \quad S\overset{1}{A}_{s2} - A_1\overset{1}{A}_{s2} + SA_1 = \frac{r_1 \,\text{val. abs.}\, \Omega}{\text{val. abs.} \sin(\omega_2 - \omega_0)},$$

$$\text{(II)} \quad \ldots \quad S\overset{1}{A}_{s2} + A_1\overset{1}{A}_{s2} - SA_1 = \frac{r_1 \,\text{val. abs.}\, \Omega}{\text{val. abs.} \sin(\omega_2 - \omega_0)},$$

$$\text{(III)} \quad \ldots \quad S\overset{1}{A}_{\ 2} + A_1\overset{1}{A}_{s2} + SA_1 = \frac{r_1 \,\text{val. abs.}\, \Omega}{\text{val. abs.} \sin(\omega_2 - \omega_0)},$$

$$\text{(IV)} \quad \ldots \quad -S\overset{1}{A}_{s2} + A_1\overset{1}{A}_{s2} + SA_1 = \frac{r_1 \,\text{val. abs.}\, \Omega}{\text{val. abs.} \sin(\omega_2 - \omega_0)}$$

ist.

Nach der Abhandlung Nr. VI. §. 4. 18) ist nun

$$p = \frac{8r_0r_1r_2 . \text{val. abs.} \{\cos\tfrac{1}{2}(\omega_0 - \omega_1) \sin\tfrac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2) \cos\tfrac{1}{2}(\omega_2 - \omega_0)\}}{\text{val. abs.} \{r_0r_1 \sin(\omega_0 - \omega_1) + r_1r_2 \sin(\omega_1 - \omega_2) + r_2r_0 \sin(\omega_2 - \omega_0)\}}$$

also, weil nach dem Vorhergehenden:

$$\text{val. abs.} \{\cos\tfrac{1}{2}(\omega_0 - \omega_1) \sin\tfrac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2) \cos\tfrac{1}{2}(\omega_2 - \omega_0)\} = \tfrac{1}{4} \,\text{val. abs.}\, \Omega$$

und nach II.

$$\text{val. abs.} \{r_0r_1 \sin(\omega_0 - \omega_1) + r_1r_2 \sin(\omega_1 - \omega_2) + r_2r_0 \sin(\omega_2 - \omega_0)\}$$
$$= r_2 . A_1\overset{1}{A}_{02} . \text{val. abs.} \sin(\omega_2 - \omega_0)$$

ist:

$$p = \frac{2r_0r_1 . \text{val. abs.}\, \Omega}{A_1\overset{1}{A}_{02} . \text{val. abs.} \sin(\omega_2 - \omega_0)},$$

also:

Digitized by Google

$$\frac{r_1 \,\text{val. abs.}\, \Omega}{\text{val. abs.} \sin(\omega_2 - \omega_0)} = \tfrac{1}{2}p \cdot \frac{A_1\overset{1}{A}_{02}}{SA_0}.$$

Folglich ist nach dem Vorhergehenden:

$$\text{(I)} \ldots\ldots \tfrac{1}{2}p \cdot \frac{A_1\overset{1}{A}_{02}}{SA_0} = S\overset{1}{A}_{s2} - A_1\overset{1}{A}_{s2} + SA_1,$$

$$\text{(II)} \ldots\ldots \tfrac{1}{2}p \cdot \frac{A_1\overset{1}{A}_{02}}{SA_0} = S\overset{1}{A}_{s2} + A_1\overset{1}{A}_{s2} - SA_1,$$

$$\text{(III)} \ldots\ldots \tfrac{1}{2}p \cdot \frac{A_1\overset{1}{A}_{02}}{SA_0} = S\overset{1}{A}_{s2} + A_1\overset{1}{A}_{s2} + SA_1,$$

$$\text{(IV)} \ldots\ldots \tfrac{1}{2}p \cdot \frac{A_1\overset{1}{A}_{02}}{SA_0} = -S\overset{1}{A}_{s2} + A_1\overset{1}{A}_{s2} + SA_1;$$

woraus sich unmittelbar die folgenden Formeln ergeben:

$$\text{(I)} \ldots\ldots \tfrac{1}{2}p = \frac{SA_0}{A_1\overset{1}{A}_{02}} \cdot (S\overset{1}{A}_{s2} - A_1\overset{1}{A}_{s2} + SA_1),$$

$$\text{(II)} \ldots\ldots \tfrac{1}{2}p = \frac{SA_0}{A_1\overset{1}{A}_{02}} \cdot (S\overset{1}{A}_{s2} + A_1\overset{1}{A}_{s2} - SA_1),$$

$$\text{(III)} \ldots\ldots \tfrac{1}{2}p = \frac{SA_0}{A_1\overset{1}{A}_{02}} \cdot (S\overset{1}{A}_{s2} + A_1\overset{1}{A}_{s2} + SA_1),$$

$$\text{(IV)} \ldots\ldots \tfrac{1}{2}p = \frac{SA_0}{A_1\overset{1}{A}_{02}} \cdot (-S\overset{1}{A}_{s2} + A_1\overset{1}{A}_{s2} + SA_1);$$

oder die Proportionen:

$$\text{(I)} \ldots\ldots A_1\overset{1}{A}_{02} : S\overset{1}{A}_{s2} - A_1\overset{1}{A}_{s2} + SA_1 = SA_0 : \tfrac{1}{2}p,$$

$$\text{(II)} \ldots\ldots A_1\overset{1}{A}_{02} : S\overset{1}{A}_{s2} + A_1\overset{1}{A}_{s2} - SA_1 = SA_0 : \tfrac{1}{2}p,$$

$$\text{(III)} \ldots\ldots A_1\overset{1}{A}_{02} : S\overset{1}{A}_{s2} + A_1\overset{1}{A}_{s2} + SA_1 = SA_0 : \tfrac{1}{2}p,$$

$$\text{(IV)} \ldots\ldots A_1\overset{1}{A}_{02} : -S\overset{1}{A}_{s2} + A_1\overset{1}{A}_{s2} + SA_1 = SA_0 : \tfrac{1}{2}p.$$

Die in den zweiten Gliedern dieser Proportionen zu nehmenden Vorzeichen der drei Theile eines jeden dieser Glieder kann man nach der folgenden Regel bestimmen.

Digitized by Google

Rücksichtlich der Vorzeichen der Grössen

$$\sin(\omega_0-\omega_1),\quad \sin(\omega_1-\omega_2),\quad \sin(\omega_2-\omega_0)$$

können wieder die folgenden Fälle eintreten:

$\sin(\omega_0-\omega_1)$,	$\sin(\omega_1-\omega_2)$,	$\sin(\omega_2-\omega_0)$
$\pm$	$\pm$	$\pm$
$\pm$	$\mp$	$\mp$
$\pm$	$\mp$	$\pm$
$\pm$	$\pm$	$\mp$

In diesen vier Gruppen doppelter Zeichen denke man sich die zweiten Zeichen umgekehrt, und nehme dann die oberen oder unteren Zeichen in der Weise, dass in jeder der hierdurch sich ergebenden Gruppen einfacher Zeichen das Zeichen + mindestens zweimal vorkommt.

Verfährt man nach dieser Regel, so erhält man:

+	−	+
+	+	−
+	+	+
−	+	+

welches nach den vorstehenden Proportionen die richtigen Zeichen sind.

V.

Wir wollen nun annehmen, dass der Punkt A_1 in dem einen Zweige, die Punkte A_0, A_2 in dem anderen Zweige einer Hyperbel liegen, und setzen der Kürze wegen jetzt *):

$$\begin{aligned}\Omega &= \sin(\omega_1-\omega_0)-\sin(\omega_0-\omega_2)+\sin(\omega_2-\omega_1)\\ &= -4\cos\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_0)\sin\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_2)\cos\tfrac{1}{2}(\omega_2-\omega_1)\end{aligned}$$

oder:

$$\begin{aligned}\Omega &= -\sin(\omega_0-\omega_1)-\sin(\omega_1-\omega_2)+\sin(\omega_2-\omega_0)\\ &= 4\cos\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)\cos\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)\sin\tfrac{1}{2}(\omega_2-\omega_0).\end{aligned}$$

*) Man hat zu bemerken, dass man für diesen Fall in den Formeln der Abhandlung Nr. VI. §. 4. für A_0, A_1, A_2 beziehungsweise A_1, A_0, A_2; für ω_0, ω_1, ω_2 also beziehungsweise ω_1, ω_0, ω_2 zu setzen hat.

Digitized by Google

Dann ist nach II. in den vorher unterschiedenen vier Fällen:

$$\text{I)} \ldots\ldots\ldots SA_1 - A_1\overset{1}{A}_{s2} - S\overset{1}{A}_{s2} = \frac{r_1\Omega}{\sin(\omega_2 - \omega_0)},$$

$$\text{II)} \ldots\ldots\ldots SA_1 - A_1\overset{1}{A}_{s2} + S\overset{1}{A}_{s2} = \frac{r_1\Omega}{\sin(\omega_2 - \omega_0)},$$

$$\text{III)} \ldots\ldots SA_1 + A_1\overset{1}{A}_{s2} - S\overset{1}{A}_{s2} = \frac{r_1\Omega}{\sin(\omega_2 - \omega_0)},$$

$$\text{IV)} \ldots\ldots\ldots SA_1 + A_1\overset{1}{A}_{s2} + S\overset{1}{A}_{s2} = \frac{r_1\Omega}{\sin(\omega_2 - \omega_0)};$$

wobei man zu bemerken hat, dass die Grössen

$$SA_1 - A_1\overset{1}{A}_{s2} - S\overset{1}{A}_{s2},$$

$$SA_1 - A_1\overset{1}{A}_{s2} + S\overset{1}{A}_{s2},$$

$$SA_1 + A_1\overset{1}{A}_{s2} - S\overset{1}{A}_{s2},$$

$$SA_1 + A_1\overset{1}{A}_{s2} + S\overset{1}{A}_{s2}$$

nach der Reihe

negativ, positiv, positiv, positiv

sind; so dass also nach dem Vorhergehenden:

$$\text{I)} \ldots\ldots S\overset{1}{A}_{s2} + A_1\overset{1}{A}_{s2} - SA_1 = \frac{r_1 \,\text{val.abs.}\, \Omega}{\text{val.abs.}\sin(\omega_2 - \omega_0)},$$

$$\text{II)} \ldots\ldots S\overset{1}{A}_{s2} - A_1\overset{1}{A}_{s2} + SA_1 = \frac{r_1 \,\text{val.abs.}\, \Omega}{\text{val.abs.}\sin(\omega_2 - \omega_0)},$$

$$\text{III)} \ldots - S\overset{1}{A}_{s2} + A_1\overset{1}{A}_{s2} + SA_1 = \frac{r_1 \,\text{val.abs.}\, \Omega}{\text{val.abs.}\sin(\omega_2 - \omega_0)},$$

$$\text{IV)} \ldots\ldots S\overset{1}{A}_{s2} + A_1\overset{1}{A}_{s2} + SA_1 = \frac{r_1 \,\text{val.abs.}\, \Omega}{\text{val.abs.}\sin(\omega_2 - \omega_0)}$$

ist.

Nach der Abhandlung Nr. VI. §. 4. 18) ist nun in diesem Falle

$$\Omega = \frac{8r_0r_1r_2\,.\,\text{val.abs.}\{\cos\tfrac{1}{2}(\omega_0 - \omega_1)\cos\tfrac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)\sin\tfrac{1}{2}(\omega_2 - \omega_0)\}}{\text{val.abs.}\{r_0r_1\sin(\omega_0 - \omega_1) + r_1r_2\sin(\omega_1 - \omega_2) + r_2r_0\sin(\omega_2 - \omega_0)\}},$$

also, weil nach dem Vorhergehenden

$$\text{val.abs.}\{\cos\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)\cos\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)\sin\tfrac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)\} = \tfrac{1}{4}\,\text{val.abs.}\,\Omega$$

und nach II.

$$\text{val.abs.}\{r_0r_1\sin(\omega_0-\omega_1)+r_1r_2\sin(\omega_1-\omega_2)+r_2r_0\sin(\omega_2-\omega_0)\}$$
$$= r_2\;A_1\overset{1}{A}_{02}\,.\,\text{val.abs.}\sin(\omega_2-\omega_0)$$

ist:

$$p=\frac{2r_0r_1\,.\,\text{val.abs.}\,\Omega}{A_1\overset{1}{A}_{02}\,.\,\text{val.abs.}\sin(\omega_2-\omega_0)},$$

also:

$$\frac{r_1\,\text{val.abs.}\,\Omega}{\text{val.abs.}\sin(\omega_2-\omega_0)}=\tfrac{1}{2}p\,.\,\frac{A_1\overset{1}{A}_{02}}{SA_0}.$$

Folglich ist nach dem Vorhergehenden:

$$\text{(I)}\;\ldots\ldots\;\tfrac{1}{2}p\,.\,\frac{A_1\overset{1}{A}_{02}}{SA_0}=\quad S\overset{1}{A}_{s2}+A_1\overset{1}{A}_{s2}-SA_1,$$

$$\text{(II)}\;\ldots\ldots\;\tfrac{1}{2}p\,.\,\frac{A_1\overset{1}{A}_{02}}{SA_0}=\quad S\overset{1}{A}_{s2}-A_1\overset{1}{A}_{s2}+SA_1,$$

$$\text{(III)}\;\ldots\ldots\;\tfrac{1}{2}p\,.\,\frac{A_1\overset{1}{A}_{02}}{SA_0}=-S\overset{1}{A}_{s2}+A_1\overset{1}{A}_{s2}+SA_1,$$

$$\text{(IV)}\;\ldots\ldots\;\tfrac{1}{2}p\,.\,\frac{A_1\overset{1}{A}_{02}}{SA_0}=\quad S\overset{1}{A}_{s2}+A_1\overset{1}{A}_{s2}+SA_1;$$

woraus sich unmittelbar die folgenden Formeln:

$$\text{(I)}\;\ldots\ldots\;\tfrac{1}{2}p=\frac{SA_0}{A_1\overset{1}{A}_{02}}\,.\,(\quad S\overset{1}{A}_{s2}+A_1\overset{1}{A}_{s2}-SA_1),$$

$$\text{(II)}\;\ldots\ldots\;\tfrac{1}{2}p=\frac{SA_0}{A_1\overset{1}{A}_{02}}\,.\,(\quad S\overset{1}{A}_{s2}-A_1\overset{1}{A}_{s2}+SA_1),$$

$$\text{(III)}\;\ldots\ldots\;\tfrac{1}{2}p=\frac{SA_0}{A_1\overset{1}{A}_{02}}\,.\,(-S\overset{1}{A}_{s2}+A_1\overset{1}{A}_{s2}+SA_1),$$

$$\text{(IV)}\;\ldots\ldots\;\tfrac{1}{2}p=\frac{SA_0}{A_1\overset{1}{A}_{02}}\,.\,(\quad S\overset{1}{A}_{s2}+A_1\overset{1}{A}_{s2}+SA_1);$$

Digitized by Google

oder die Proportionen:

$$\text{I)} \quad \ldots\ldots \mathrm{A}_1\overset{1}{\mathrm{A}}_{02}: \quad S\overset{1}{\mathrm{A}}_{s2}+\mathrm{A}_1\overset{1}{\mathrm{A}}_{s2}-S\mathrm{A}_1=S\mathrm{A}_0:\tfrac{1}{2}p,$$

$$\text{II)} \quad \ldots\ldots \mathrm{A}_1\overset{1}{\mathrm{A}}_{02}: \quad S\overset{1}{\mathrm{A}}_{s2}-\mathrm{A}_1\overset{1}{\mathrm{A}}_{s2}+S\mathrm{A}_1=S\mathrm{A}_0:\tfrac{1}{2}p,$$

$$\text{III)} \quad \ldots\ldots \mathrm{A}_1\overset{1}{\mathrm{A}}_{02}: -S\overset{1}{\mathrm{A}}_{s2}+\mathrm{A}_1\overset{1}{\mathrm{A}}_{s2}+S\mathrm{A}_1=S\mathrm{A}_0:\tfrac{1}{2}p,$$

$$\text{IV)} \quad \ldots\ldots \mathrm{A}_1\overset{1}{\mathrm{A}}_{02}: \quad S\overset{1}{\mathrm{A}}_{s2}+\mathrm{A}_1\overset{1}{\mathrm{A}}_{s2}+S\mathrm{A}_1=S\mathrm{A}_0:\tfrac{1}{2}p$$

ergeben.

Die in den zweiten Gliedern dieser Proportionen zu nehmenden Vorzeichen der drei Theile eines jeden dieser Glieder kann man nach der folgenden Regel bestimmen.

Rücksichtlich der Vorzeichen der Grössen

$$\sin(\omega_0-\omega_1), \quad \sin(\omega_1-\omega_2), \quad \sin(\omega_2-\omega_0)$$

können die folgenden Fälle eintreten:

$\sin(\omega_0-\omega_1)$,	$\sin(\omega_1-\omega_2)$,	$\sin(\omega_2-\omega_0)$
$\pm$	$\pm$	$\pm$
$\pm$	$\mp$	$\mp$
$\pm$	$\mp$	$\pm$
$\pm$	$\pm$	$\mp$

In diesen vier Gruppen doppelter Zeichen denke man sich die dritten Zeichen umgekehrt, und nehme dann die oberen oder unteren Zeichen in der Weise, dass in jeder der hierdurch sich ergebenden Gruppen einfacher Zeichen das Zeichen $+$ mindestens zweimal vorkommt.

Verfährt man nach dieser Regel, so erhält man:

$+$	$+$	$-$
$+$	$-$	$+$
$-$	$+$	$+$
$+$	$+$	$+$

welches nach den vorstehenden Proportionen die richtigen Zeichen sind.

Digitized by Google

VI.

Wir nehmen nun an, dass der Punkt A_2 in dem ein Zweige, die Punkte A_0, A_1 in dem anderen Zweige einer Hyperb liegen, und setzen der Kürze wegen jetzt *):

$$\begin{aligned}\Omega &= \sin(\omega_2-\omega_0)-\sin(\omega_0-\omega_1)+\sin(\omega_1-\omega_2)\\ &= -4\cos\tfrac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)\sin\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)\cos\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)\end{aligned}$$

oder:

$$\begin{aligned}\Omega &= -\sin(\omega_0-\omega_1)+\sin(\omega_1-\omega_2)+\sin(\omega_2-\omega_0)\\ &= -4\sin\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)\cos\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)\cos\tfrac{1}{2}(\omega_2-\omega_0).\end{aligned}$$

Dann ist nach II. in den vorher unterschiedenen vier Fällen:

$$\text{(I)} \quad \ldots\ldots \quad SA_1+A_1\overset{1}{A}_{s2}-S\overset{1}{A}_{s2}=\frac{r_1\Omega}{\sin(\omega_2-\omega_0)},$$

$$\text{(II)} \quad \ldots\ldots \quad SA_1+A_1\overset{1}{A}_{s2}+S\overset{1}{A}_{s2}=\frac{r_1\Omega}{\sin(\omega_2-\omega_0)},$$

$$\text{(III)} \quad \ldots\ldots \quad SA_1-A_1\overset{1}{A}_{s2}-S\overset{1}{A}_{s2}=\frac{r_1\Omega}{\sin(\omega_2-\omega_0)},$$

$$\text{(IV)} \quad \ldots\ldots \quad SA_1-A_1\overset{1}{A}_{s2}+S\overset{1}{A}_{s2}=\frac{r_1\Omega}{\sin(\omega_2-\omega_0)};$$

wobei man zu bemerken hat, dass die Grössen

$$SA_1+A_1\overset{1}{A}_{s2}-S\overset{1}{A}_{s2},$$

$$SA_1+A_1\overset{1}{A}_{s2}+S\overset{1}{A}_{s2},$$

$$SA_1-A_1\overset{1}{A}_{s2}-S\overset{1}{A}_{s2},$$

$$SA_1-A_1\overset{1}{A}_{s2}+S\overset{1}{A}_{s2}$$

nach der Reihe

positiv, positiv, negativ, positiv

sind; so dass also nach dem Vorhergehenden:

---

*) Man hat zu bemerken, dass man für diesen Fall in den Formeln de Abhandlung Nr. VI. §. 4. für A_0, A_1, A_2 beziehungsweise A_2, A_0, A_1; fü ω_0, ω_1, ω_2 also beziehungsweise ω_2, ω_0, ω_1 zu setzen hat.

Digitized by Google

$$\text{I)} \quad \ldots\ldots -S\overset{1}{A}_{s2}+A_1\overset{1}{A}_{s2}+SA_1=\frac{r_1\,\text{val. abs. }\Omega}{\text{val. abs. }\sin(\omega_2-\omega_0)},$$

$$\text{II)} \quad \ldots\ldots S\overset{1}{A}_{s2}+A_1\overset{1}{A}_{s2}+SA_1=\frac{r_1\,\text{val. abs. }\Omega}{\text{val. abs. }\sin(\omega_2-\omega_0)},$$

$$\text{III)} \quad \ldots S\overset{1}{A}_{s2}+A_1\overset{1}{A}_{s2}-SA_1=\frac{r_1\,\text{val. abs. }\Omega}{\text{val. abs. }\sin(\omega_2-\omega_0)},$$

$$\text{IV)} \quad \ldots S\overset{1}{A}_{s2}-A_1\overset{1}{A}_{s2}+SA_1=\frac{r_1\,\text{val. abs. }\Omega}{\text{val. abs. }\sin(\omega_2-\omega_0)}$$

ist.

Nach der Abhandlung Nr. VI. §. 4. 18) ist nun in diesem Falle

$$p=\frac{8r_0r_1r_2\,.\,\text{val. abs.}\{\sin\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)\cos\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)\cos\tfrac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)\}}{\text{val. abs.}\{r_0r_1\sin(\omega_0-\omega_1)+r_1r_2\sin(\omega_1-\omega_2)+r_2r_0\sin(\omega_2-\omega_0)\}},$$

also, weil nach dem Vorhergehenden

$$\text{val. abs.}\{\sin\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)\cos\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)\cos\tfrac{1}{2}(\omega_2-\omega_0)\}=\tfrac{1}{4}\,\text{val. abs. }\Omega$$

und nach II.

$$\text{val. abs.}\{r_0r_1\sin(\omega_0-\omega_1)+r_1r_2\sin(\omega_1-\omega_2)+r_2r_0\sin(\omega_2-\omega_0)\}$$
$$=r_2\ A_1\overset{1}{A}_{02}\,.\,\text{val. abs. }\sin(\omega_2-\omega_0)$$

ist:

$$p=\frac{2r_0r_1\,.\,\text{val. abs. }\Omega}{A_1\overset{1}{A}_{02}\,.\,\text{val. abs. }\sin(\omega_2-\omega_0)},$$

also:

$$\frac{r_1\,\text{val. abs. }\Omega}{\text{val. abs. }\sin(\omega_2-\omega_0)}=\tfrac{1}{2}p\,.\,\frac{A_1\overset{1}{A}_{02}}{SA_0}.$$

Folglich ist nach dem Vorhergehenden:

$$\text{(I)} \quad \ldots\ldots \tfrac{1}{2}p\,.\,\frac{A_1\overset{1}{A}_{02}}{SA_0}=-S\overset{1}{A}_{s2}+A_1\overset{1}{A}_{s2}+SA_1,$$

$$\text{(II)} \quad \ldots\ldots \tfrac{1}{2}p\,.\,\frac{A_1\overset{1}{A}_{02}}{SA_0}=S\overset{1}{A}_{s2}+A_1\overset{1}{A}_{s2}+SA_1,$$

$$\text{(III)} \quad \ldots\ldots \tfrac{1}{2}p\,.\,\frac{A_1\overset{1}{A}_{02}}{SA_0}=S\overset{1}{A}_{s2}+A_1\overset{1}{A}_{s2}-SA_1,$$

$$\text{(IV)} \quad \ldots\ldots \tfrac{1}{2}p\,.\,\frac{A_1\overset{1}{A}_{02}}{SA_0}=S\overset{1}{A}_{s2}-A_1\overset{1}{A}_{s2}+SA_1;$$

Digitized by Google

woraus sich unmittelbar die folgenden Formeln:

$$\text{(I)} \;\ldots\ldots\; \tfrac{1}{2}p = \frac{SA_0}{A_1\overset{1}{A}_{02}} \cdot (-S\overset{1}{A}_{s2} + A_1\overset{1}{A}_{s2} + SA_1),$$

$$\text{(II)} \;\ldots\ldots\; \tfrac{1}{2}p = \frac{SA_0}{A_1\overset{1}{A}_{02}} \cdot (\quad S\overset{1}{A}_{s2} + A_1\overset{1}{A}_{s2} + SA_1),$$

$$\text{(III)} \;\ldots\ldots\; \tfrac{1}{2}p = \frac{SA_0}{A_1\overset{1}{A}_{02}} \cdot (\quad S\overset{1}{A}_{s2} + A_1\overset{1}{A}_{s2} - SA_1),$$

$$\text{(IV)} \;\ldots\ldots\; \tfrac{1}{2}p = \frac{SA_0}{A_1\overset{1}{A}_{02}} \cdot (\quad S\overset{1}{A}_{s2} - A_1\overset{1}{A}_{s2} + SA_1);$$

oder die Proportionen:

$$\text{(I)} \;\ldots\ldots\; A_1\overset{1}{A}_{02} : -S\overset{1}{A}_{s2} + A_1\overset{1}{A}_{s2} + SA_1 = SA_0 : \tfrac{1}{2}p,$$

$$\text{(II)} \;\ldots\ldots\; A_1\overset{1}{A}_{02} : \quad S\overset{1}{A}_{s2} + A_1\overset{1}{A}_{s2} + SA_1 = SA_0 : \tfrac{1}{2}p,$$

$$\text{(III)} \;\ldots\ldots\; A_1\overset{1}{A}_{02} : \quad S\overset{1}{A}_{s2} + A_1\overset{1}{A}_{s2} - SA_1 = SA_0 : \tfrac{1}{2}p,$$

$$\text{(IV)} \;\ldots\ldots\; A_1\overset{1}{A}_{02} : \quad S\overset{1}{A}_{s2} - A_1\overset{1}{A}_{s2} + SA_1 = SA_0 : \tfrac{1}{2}p$$

ergeben.

Die in den zweiten Gliedern dieser Proportionen zu nehmenden Vorzeichen der drei Theile eines jeden dieser Glieder kann man nach der folgenden Regel bestimmen.

Rücksichtlich der Vorzeichen der Grössen

$$\sin(\omega_0 - \omega_1), \quad \sin(\omega_1 - \omega_2), \quad \sin(\omega_2 - \omega_0)$$

können die folgenden Fälle eintreten:

$\sin(\omega_0 - \omega_1)$,	$\sin(\omega_1 - \omega_2)$,	$\sin(\omega_2 - \omega_0)$
$\pm$	$\pm$	$\pm$
$\pm$	$\mp$	$\mp$
$\pm$	$\mp$	$\pm$
$\pm$	$\pm$	$\mp$

In diesen vier Gruppen doppelter Zeichen denke man sich die ersten Zeichen umgekehrt, und nehme dann die oberen oder unteren Zeichen in der Weise, dass in jeder der hierdurch sich ergebenden Gruppen einfacher Zeichen das Zeichen $+$ mindestens zweimal vorkommt.

Digitized by Google

Verfährt man nach dieser Regel, so erhält man:

−	+	+
+	+	+
+	+	−
+	−	+

welches nach den vorstehenden Proportionen die richtigen Zeichen sind.

Anmerkung.

Man hat zu beachten, dass im Vorhergehenden immer durch den Punkt A_1 eine Parallele mit der Geraden SA_0 gezogen worden ist, wodurch es nöthig gemacht wurde, die vorigen vier Fälle von einander zu unterscheiden und jeden für sich sorgfältig zu betrachten.

Jedenfalls liefern die obigen Sätze eine merkwürdige Methode, für einen gegebenen Kegelschnitt, von dem man einen Brennpunkt kennt, den Parameter durch Construction zu finden, als vierte Proportionale zu drei leicht zu construirenden Geraden.

Digitized by Google

X.

Die Bestimmung des Einflusses des Rades der Fallmaschine.

Von

Herrn Dr. *Külp*,

Assistenten der Physik am grossherzogl. Polytechnikum in Darmstadt.

Für die Fallmaschine, bei der die Bewegung durch Ueberwucht eingeleitet, besteht die Gleichung:

$$\frac{w}{2Q+X+w}=\frac{\gamma}{g} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{I,}$$

in welcher w das kleine Uebergewicht, Q das auf beiden Seiten angehängte Gewicht, g die Acceleration beim freien Falle, γ die Beschleunigung der Maschine, welche durch das kleine Uebergewicht w erzeugt, und X endlich das Gewicht bedeutet, welches der Bewegung denselben Widerstand entgegensetzt, wie das Rad mit dem kleinen Gewichte des Fadens. Dieses Gewicht X hat dieselbe Bewegung wie die Massen Q und w, da es am Umfange des Rades angebracht ist. — Wird die Maschine t Secunden lang in Thätigkeit erhalten, so besteht zwischen dem Wege s, der Zeit t und der Beschleunigung γ der Maschine, die Formel:

$$s=\frac{\gamma t^2}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{II.}$$

Eliminirt man γ zwischen den Gleichungen I und II, so erhält man für X den Werth:

$$X=\frac{w.g.t^2-2s(2Q+w)}{2s}.$$

Digitized by Google

Bei einem Versuche hing an jedem Ende des über die Rolle ehenden feinen Fadens ein Gewicht von 629, 3 gr., auf der einen ite wurden alsdann noch 10, 9 gr. hinzugelegt, wovon 3, 1 gr. zur mhebung der Reibung dienten; hiernach wurde die eintretende Beegung durch ein Uebergewicht von 7, 8 gr. erzeugt. War die aschine 7 Sekunden im Gange, so legte das fallende Gewicht einen eg von 1, 2 Meter zurück, bei 5 Secunden aber nur 0, 612 Meter; nach bestehen für beide Fälle die Gleichungen:

$$X = \frac{7,8.9,81.49 - 2.1,2.1269,5}{2.1,2} = 292,7\,\text{gr.}$$

und:

$$X = \frac{7,8.9,81.25 - 2.0,612.1269,5}{2.0,612} = 293,3\,\text{gr.}$$

Die Beschleunigung der Maschine ist hier 200, 2 mal kleiner ls die des freien Falls, auch beträgt der Fallraum in der ersten ekunde nur 2, 45 cm.

XI.

Das Verhältniss der Wassermengen bei sinkendem und constantem Niveau.

Von

Herrn Dr. ***Külp***,

Assistenten der Physik am grossherzogl. Polytechnikum in Darmstadt.

Es ist zur Genüge bekannt, dass die Zeitdauer, während welcher sich der Behälter leert, doppelt so gross ist, als die Zeitdauer, in welcher die dem Inhalte des Behälters gleiche Wassermenge aus einem fortwährend voll erhaltenen Behälter ausfliessen würde. Stellt man diesen Versuch in der That an, so findet man eine vollständig genaue experimentelle Bestätigung dieses richtig theoretisch geschlossenen Satzes jedoch nicht. — Um dieser unvollständigen Uebereinstimmung beim Versuche aus dem Wege zu gehen, lasse ich den

Digitized by Google

Behälter nur zum Theil sich entleeren, und suche das Verhältniss d Wassermengen in einer und derselben Zeit bei sinkendem und co stantem Niveau.

In der Zeit:

$$t = \frac{2A}{ua\sqrt{2g}}\left[\sqrt{h} - \sqrt{h_1}\right]$$

sinkt das Wasser in dem Gefässe von dem Querschnitte A von d Druckhöhe h auf die Druckhöhe h_1, wo a den Querschnitt der Bod öffnung und u den Ausflusscöfficienten bezeichnen. Die in der Zei ausgeflossene Wassermenge bei veränderlichem Spiegel ist daher:

$$M_v = A(h - h_1) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Bei constantem Niveau hingegen auf der Druckhöhe h fliesst i derselben Zeit t die Wassermenge:

$$M_c = \frac{2A[\sqrt{h} - \sqrt{h_1}]}{u.a.\sqrt{2g}}.a.u.\sqrt{2gh}$$

oder die Quantität:

$$M_c = 2A(h - \sqrt{hh_1}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

aus.

Die Ausdrücke I und II liefern die Relation:

$$\frac{M_v}{M_c} = \frac{h - h_1}{2[h - \sqrt{hh_1}]}$$

oder:

$$\frac{M_v}{M_c} = \tfrac{1}{2}\left[1 + \sqrt{\frac{h_1}{h}}\right],$$

wenn die Division ausgeführt wird, und die weiteren Glieder ausse Acht bleiben. — Bei einem Versuche, welcher 35 Secunden andauerte und der Wasserspiegel von 50 cm. auf 45 cm. herabsank, erhielt i das folgende Resultat:

$$\frac{1356}{1396} = \tfrac{1}{2}\left[1 + \sqrt{\frac{45}{50}}\right]$$

oder:

$$0{,}971 = 0{,}974.$$

Bei der Ausführung dieses Versuchs ist der Apparat zu den Ver suchen über den Ausfluss der Flüssigkeiten zu gebrauchen, und di erhaltenen Wassermengen in Grammen abzuwiegen.

Digitized by Google

XII.

Etude sur les méthodes d'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre d'une fonction de deux variables indépendantes.

Par

V. G. Imschenetsky,
professeur à l'Université impériale de Kazan.

Traduit du russe par J. Hoüel.

Avertissement.

La théorie des équations differentielles présente un ensemble si bien enchaîné, si rigoureusement logique, que la possibilité de résoudre chaque nouveau problème que l'on rencontre en s'élevant dans cette théorie tient à la manière plus ou moins complète dont on a résolu les problèmes d'ordre inférieur qui se sont posés précédemment. Cette liaison si étroite entre toutes les parties de la doctrine est un inconvénient, lorsque, dans une certaine catégorie de questions, il se présente des difficultés capables de résister longtemps aux efforts de l'Analyse mathématique; car un arrêt dans le développement d'une seule partie se fait ressentir dans tout le système, dont les diverses portions forment un ensemble organique. Mais cet inconvénient se change en avantage, chaque fois qu'un succès notable est obtenu sur un point quelconque de la théorie; un triomphe remporté sur un obstacle considérable entraîne quelquefois avec lui la chute d'autres obstacles, et imprime une impulsion sensible au développement de la théorie tout entière. C'est ainsi que les récents perfectionnements

Digitized by Google

des méthodes générales d'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre ont, d'une part, aidé à la constitution et à l'achèvement de la théorie des équations simultanées de forme canonique, tandis que, d'autre part, ils ont puissamment contribué aux progrès de la théorie des équations aux dérivées partielles du second ordre.

Une fois la théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre définitivement établie, est arrivé naturellement le tour des équations aux dérivées partielles des ordres supérieurs, et c'est vers la solution de ce dernier problème que doivent tendre maintenant les efforts des géomètres. Par suite de la liaison organique qui existe entre toutes les parties de la théorie des équations différentielles, ainsi qu'entre les subdivisions de chaque partie, il se manifeste une analogie et une unité remarquables dans les méthodes de solution des questions qu'elle embrasse, quelle que soit la diversité de leur nature. Il s'ensuit de là que, lorsque l'analyste rencontre une question dont la solution, poussée déjà jusqu' à un certain point, se trouve arrêtée à cette période de son développement, il doit, avant tout, chercher à se rendre compte du chemin qu'on a suivi pour parvenir jusque là, surtout quand ce chemin a été frayé par des hommes tels que d'Alembert, Euler, Laplace, Lagrange, Monge, Ampère.

En effet, l'étude attentive de ce qui a été déjà fait peut montrer quelquefois que le succès ultérieur dépend bien moins de l'invention de nouvelles méthodes, que d'une application plus complète et plus générale des méthodes anciennes.

La théorie de l'intégration des équations aux dérivées partielles des ordres supérieurs se divise en deux parties. Dans la première, on considère les équations de formes compliquées, et l'on cherche soit à déterminer leurs intégrales générales sous forme finie, soit à réduire les équations proposées aux formes les plus simples parmi celles dont les intégrales ne sont pas susceptibles d'expressions finies. Dans la seconde, on s'occupe de ces équations simplifiées et des méthodes pour les intégrer, à l'aide soit des séries, soit des intégrales définies.

Dans le présent Mémoire, je traite les questions relatives à chacune des deux parties de la théorie, dans le cas des équations aux dérivées partielles du second ordre d'une fonction de deux variables indépendantes. En donnant le résumé succinct, mais aussi complet que possible, des principales méthodes de résolution des problèmes de cette catégorie, je pense avoir comblé une lacune qui existe

Digitized by Google

dans les Traités systématiques de calcul intégral. La plupart des auteurs se bornent, en effet, à exposer la méthode de Monge; quelquefois les Ouvrages plus complets contiennent aussi les méthodes d'Euler et de Laplace. Mais aucun, à ma connaissance, ne fait mention des travaux d'Ampère sur ce sujet, publiés dans les Cahiers XVII et XVIII du Journal de l'Ecole Polytechnique. Les recherches d'Ampère, qui comprennent la théorie des intégrales et les méthodes d'intégration pour des cas qui échappent à la méthode de Monge, devraient occuper une place considérable dans tout cours sérieux de Calcul intégral, tandis qu'ordinairement, comme je viens de le dire, on expose la méthode de Monge, quelquefois avec des changements de forme plus ou moins heureux. L'oubli dans lequel on laisse le beau travail d'Ampère est dû sans doute en partie au mode de rédaction de ses deux volumineux Mémoires, qui ne se prêtent pas aisément à une exposition succincte; j'ai fait cependant tous mes efforts pour atteindre ce but. J'ai trouvé moyen, dans le courant de mon exposition, d'intercaler les résultats de mes propres recherches à la place indiquée par l'ordre des questions.

Parmi ces résultats, je me permettrai de signaler un essai de généralisation de la méthode de Laplace (Chap. II, § 9), et une forme nouvelle que j'ai donnée à l'exposition de la méthode de la variation des constantes arbitraires (Chap. IV). Le lecteur familier avec ce sujet ne pourra manquer de reconnaître facilement les passages, moins importants, où je m'écarte de mes auteurs, que j'ai partout cités avec soin dans les Notes au bas des pages.

Digitized by Google

Chapitre Ier.

Théorie des intégrales des équations aux dérivées partielles.

§ 1.

1. Les procédés d'intégration de chaque classe d'équations différentielles sont fondés sur la manière dont nous nous représentons d'une part, la forme et la composition de leurs intégrales, et d'autre part, la marche et les diverses circonstances caractéristiques de la formation des équations différentielles considérées au moyen de leurs intégrales. En effet, la méthode pour intégrer une équation différentielle doit consister en général à parcourir en sens inverse le chemin qui, d'après la supposition qu'on a faite sur la forme de l'intégrale, a dû conduire à cette équation différentielle. Quoique cette marche inverse soit généralement beaucoup plus difficile que la marche directe, elle est cependant facilitée par la connaissance des particularités de celle-ci et de son but final. En nous guidant sur cette analogie, nous commencerons, avant d'exposer les méthodes d'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre, par donner la théorie de leurs intégrales.

2. Malgré notre désir d'éviter l'introduction de notations qui ne seraient pas consacrées par l'usage ordinaire, nous serons contraints quelquefois de nous départir de cette règle, et dès maintenant nous établirons une convention, qui n'offrira d'ailleurs aucune difficulté. Si nous représentons, par exemple, par la lettre u une fonction, explicite ou implicite, des deux variables x, y, nous désignerons par $u_k^{(i)}$ la dérivée partielle de cette fonction, obtenue en la différentiant, dans un ordre quelconque, i fois par rapport à x, et k fois par rapport à y; en sorte que les indices de différentiations par rapport à x et à y seront toujours écrits à droite de la lettre u, le premier en haut, le second en bas. Quand, à la place des variables x, y, il nous arrivera d'introduire, en vertu d'une relation quelconque entre x, y et α, les nouvelles variables indépendantes x, α, ou encore, d'introduire, en vertu de deux relations distinctes entre x, y, α, β, les nouvelles variables indépendantes α, β; nous emploierons alors, dans ces deux cas, pour désigner les dérivées partielles de la fonction u, les notations habituelles

$$\frac{\partial^{i+k}u}{\partial x^i\,\partial\alpha^k},\quad \frac{\partial^{i+k}u}{\partial\alpha^i\,\partial\beta^k}.$$

Digitized by Google

Il est à peine besoin d'ajouter que, dans ces hypothèses différentes, relatives aux variables indépendantes, on ne devra pas considérer comme égales des dérivées partielles telles que

$$u^{(i)} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^i u}{\partial x^i}, \qquad \frac{\partial^k u^{(i)}}{\partial \alpha^k} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^{i+k} u}{\partial x^i \partial \alpha^k}, \quad \text{etc.} \dots$$

3. En appliquant la convention précédente, et désignant par z une fonction des deux variables indépendantes x et y, et par F une expression composée d'une manière connue au moyen des quantités qui entrent sous ce signe, nous pourrons représenter les équations aux dérivées partielles, du second ordre sous la forme générale

$$\text{(1)} \qquad F(x, y, z, z', z_{,}, z'', z_{,}', z_{,,}) = 0;$$

et pareillement, l'équation générale aux dérivées partielles de l'ordre m sera représentée par

$$\text{(2)} \qquad F(x, y, z, z', z_{,}, z'', z_{,}', z_{,,}, \dots, z^{(m)}, z_{,}^{(m-1)}, \dots, z'_{m-1}, z_m) = 0.$$

Pour obtenir des résultats aussi généraux que possible et indépendants de l'ordre de l'équation, étudions les propriétés caractéristiques des intégrales de l'équation (2) d'ordre quelconque m.

L'équation (2) peut être considérée comme une condition donnée pour la détermination de la fonction inconnue z; et comme, en dehors de cette condition, nous ne connaissons aucune autre condition complémentaire, la fonction z sera déterminée par cette condition de la manière la plus générale, si elle satisfait à cette condition et à toutes les conséquences qui en découlent immédiatement. Les conséquences de l'équation (2) sont en nombre infini, et s'obtiennent en différentiant cette équation autant de fois qu'on voudra par rapport à x et à y. D'ailleurs, la variable z doit être déterminée en fonction de x et de y; par conséquent, la solution cherchée devra se présenter sous la forme d'une équation entre x, y, z, ou d'un système d'équations entre ces quantités, et d'autres variables, équations qui finalement se réduisent à une seule équation entre x, y, z. En partant de ces considérations, on pourra définir comme il suit la solution ou l'intégrale la plus générale de l'équation (2).

4. On appelle intégrale générale d'une équation aux dérivées partielles de l'ordre m une équation ou un système d'équations entre les variables du problème x, y, z, jouissant de la propriété suivante: que si, d'une part, on prend les équations intégrales et toutes leurs dérivées par rapport à x et à y, jusqu'à l'ordre n inclusivement, n étant un nombre arbitraire, non moindre que m; et si, d'autre part, on prend l'équation donnée (2) et toutes ses dérivées

Digitized by Google

par rapport à x et à y, jusqu'à l'ordre $n-m$ inclusivement; le pr
mier système devra établir, entre les variables x, y, la fonction z d
ces variables, et les dérivées de cette fonction jusqu'à l'ordre n, l
mêmes relations, et celles-là seulement, qui sont exprimées par
second système d'équations.

Si, tout en remplissant les conditions dont nous venons de parl
le premier système d'équations donne, outre cela, entre les variabl
x, y, z et les dérivées de z, des relations non renfermées dans l
second système d'équations, alors l'integrale sera ou particuliè
ou singulière. Une intégrale particulière se tire, comme cas pa
ticulier, de l'intégrale générale, et par une généralisation convenab
on peut en déduire l'intégrale générale. Une intégrale singulière n
jouit pas de ces propriétés.

Les intégrales dont il s'agit sont supposées ne pas contenir d
dérivées de la fonction z; on peut, d'après cela, les appeler d
intégrales primitives. Si dans une intégrale il entre des dérivé
de z, on pourra toujours reconnaître si elle est générale, au moye
de la règle précédente, convenablement modifiée. Qu'une telle inté
grale soit, ou non, générale, on pourra, dans tous les cas, lui donne
le nom d'intégrale intermédiaire, puisqu'elle peut être considéré
comme une équation différentielle par l'intégration de laquelle on peu
obtenir l'intégrale primitive.

§ 2.

5. Eclaircissons par des exemples simples les définitions donnée
plus haut et les propriétés des équations aux dérivées partielles. Soit
l'équation du second ordre

(3) $$z_{,,}-mz''=0,$$

m étant une constante donnée. Son intégrale générale peut êtr
représentée par le système des équations

(4) $$z=\varphi(\alpha)+\psi(\beta),\quad \alpha=x+y\sqrt{m},\quad \beta=x-y\sqrt{m},$$

ou, en éliminant α et β, par l'équation unique

(5) $$z=\varphi(x+y\sqrt{m})+\psi(x-y\sqrt{m}),$$

φ et ψ désignant des fonctions entièrement arbitraires.

En effet, la valeur précédente de z satisfait à l'équation donnée
et à toutes les équations de la forme

Digitized by Google

$$z_{k+2}^{(i)} - m z_{k}^{(i+2)} = 0, \tag{6}$$

que l'on obtient en différentiant l'équation donnée i fois par rapport à x, et k fois par rapport à y. Et comme l'équation (5) ne fournit aucune autre relation entre les dérivées de z que celles qui sont exprimées par les équations (6), il s'ensuit de là qu'elle représente l'intégrale générale de l'équation (3).

6. Prenons maintenant cette autre expression

$$z = a + bx + cy + hx^2 + gxy + mhy^2, \tag{7}$$

a, b, c, h, g désignant des constantes arbitraires. Il est aisé de s'assurer qu'elle satisfait aussi à l'équation donnée (3) et à toutes ses conséquences (6); mais, outre cela, l'expression (7) donne encore d'autres relations entre les dérivées de z; et en effet, toutes ces dérivées, à partir du troisième ordre, sont égales entre elles, puisqu'elles se réduisent à zéro. Par conséquent, l'équation (7) ne représente qu'une intégrale particulière de l'équation (3). Cette intégrale particulière est remarquable en ce qu'elle renferme précisément autant de constantes arbitraires qu'il existe de dérivées de z depuis le premier ordre jusqu'à l'ordre de l'équation donnée, c'est-à-dire cinq. Par suite, si l'on prend l'équation intégrale et toutes ses dérivées jusqu'au second ordre inclusivement, on aura précisément autant d'équations qu'il en faut pour éliminer toutes les constantes. D'après cette propriété, une telle intégrale particulière a reçu de Lagrange le nom d'intégrale complète. Il est évident que l'intégrale complète d'une équation du $m^{\text{ième}}$ ordre doit contenir $\frac{1}{2}(m+1)(m+2)-1$ constantes arbitraires.

7. Une intégrale particulière, comme l'indique son nom, doit pouvoir se tirer, comme cas particulier, de l'intégrale générale. Pour le vérifier sur l'exemple précédent, introduisons, dans l'équation (7), α et β à la place de x et de y, au moyen des deux dernières équations du système (4). Il viendra

$$z = a + \frac{b}{2}(\alpha+\beta) + \frac{c}{2\sqrt{m}}(\alpha-\beta) + \frac{h}{4}(\alpha+\beta)^2$$
$$+ \frac{g}{4\sqrt{m}}(\alpha^2-\beta^2) + \frac{h}{4}(\alpha-\beta)^2,$$

et cette équation se déduira de l'équation (5) en donnant aux fonctions arbitraires les valeurs particulières

Digitized by Google

$$\varphi(\alpha) = a + \tfrac{1}{2}\left(b + \frac{c}{\sqrt{m}}\right)\alpha + \tfrac{1}{2}\left(h + \frac{g}{2\sqrt{m}}\right)\alpha^2,$$

$$\psi(\beta) = \quad \tfrac{1}{2}\left(b - \frac{c}{\sqrt{m}}\right)\beta + \tfrac{1}{2}\left(h - \frac{g}{2\sqrt{m}}\right)\beta^2.$$

8. Mais la relation reciproque entre les intégrales (3) et (7), en vertu de laquelle on peut, de l'intégrale particulière, dite complète, tirer par une généralisation convenable, l'intégrale générale, est encore plus importante. Lagrange (*) a fondé cette transformation sur la variation des constantes arbitraires. Sa méthode peut s'exposer sous une forme générale, de la manière suivante.

Soit

$$V = 0$$

une intégrale complète de l'équation (1), V renfermant x, y, z et cinq constantes arbitraires a, b, c, g, h. Tirons de là les équations

$$z' = P, \quad z_{,} = Q.$$

Ensuite, pour passer à l'intégrale générale, supposons que a, b, c, g, h représentent des fonctions de x, y, z, qui doivent être déterminées de manière que les différentielles totales des expressions V, P, Q conservent identiquement la même forme qu'elles avaient, lorsque a, b, c, g, h représentaient des grandeurs constantes. Pour cela, il suffira d'égaler à zéro les différentielles de V, P, Q, prises en faisant varier a, b, c, g, h, ce qui fournira trois équations linéaires et homogènes par rapport à da, db, dc, dg, dh. Entre ces équations éliminons deux quelconques des cinq différentielles, et, dans le résultat de l'élimination, égalons à zéro les coefficients des trois différentielles restantes; nous aurons ainsi trois équations pour déterminer les cinq quantités a, b, c, g, h. D'après cela, deux des cinq quantités considérées resteront indéterminées, et nous pourrons les représenter par des fonctions arbitraires des trois autres; toutefois, en cela, nous devrons procéder de telle sorte, que finalement les valeurs des cinq quantités a, b, c, g, h s'expriment toutes en fonction de x, y, z. Il suffira ensuite de combiner les expressions trouvées avec l'équation $V = 0$, pour avoir l'intégrale générale.

(*) Sur les intégrales particulières des équations différentielles. Nouveaux Mémoires de l'Académie de Berlin, 1774, p. 266. — Oeuvres, tome IV. p. 98.

Digitized by Google

9. Pour appliquer cette méthode à l'exemple considéré, remarquons que l'on a

$$V = -z + a + bx + cy + hx^2 + gxy + mhy^2,$$

$$z' = P = b + 2hx + gy,$$

$$z_i = Q = c + gx + 2mhy.$$

Par suite, en égalant à zéro les différentielles de V, P, Q relatives à la variation de a, b, c, g, h, on trouve, pour déterminer ces dernières quantités, les trois équations

$$da + xdb + ydc + x^2dh + xydg + my^2dh = 0,$$

$$db + 2xdh + ydg = 0,$$

$$dc + xdg + 2mydh = 0.$$

Les deux dernières équations peuvent être remplacées par deux autres, qui leur sont équivalentes. Pour cela, multiplions la première par un facteur indéterminé μ, et l'ajoutons ensuite à la seconde; il viendra

$$\mu db + dc + x(2\mu dh + dg) + \mu y\left(2\frac{m}{\mu}dh + dg\right) = 0.$$

On peut déterminer μ de manière que l'on ait $\mu = \frac{m}{\mu}$, d'où l'on tire les deux valeurs $\mu = \pm\sqrt{m}$. D'après cela, au lieu des deux dernières équations du système précédent, on pourra prendre ces deux-ci:

$$dc + \sqrt{m}.db + (x + \sqrt{m}.y)(dg + 2\sqrt{m}.dh) = 0,$$

$$dc - \sqrt{m}.db + (x - \sqrt{m}.y)(dg - 2\sqrt{m}.dh) = 0.$$

Dans la première de ces équations, il n'entre que les différentielles des variables

$$c + \sqrt{m}.b, \qquad g + 2\sqrt{m}.h,$$

et dans la seconde, il n'entre que les différentielles des variables

$$c - \sqrt{m}.b, \qquad g - 2\sqrt{m}.h;$$

et rien n'empêche de supposer la première de ces variables égale à une fonction arbitraire de la seconde, et la troisième égale à une fonction arbitraire de la quatrième. En désignant donc par ω et π

des fonctions arbitraires, et par ω', π' leurs dérivées par rapport à leurs arguments respectifs, on aura

$$c+\sqrt{m}.b = \omega(g+2\sqrt{m}.h),$$

$$c-\sqrt{m}.b = \pi(g-2\sqrt{m}.h),$$

d'où

$$dc+\sqrt{m}.db = \omega'(g+2\sqrt{m}.h).(dg+2\sqrt{m}.dh),$$

$$dc-\sqrt{m}.db = \pi'(g-2\sqrt{m}.h).(dg-2\sqrt{m}.dh).$$

Par suite, les équations précédentes prennent la forme

$$\omega'(g+2\sqrt{m}.h)+(x+\sqrt{m}.y) = 0,$$

$$\pi'(g-2\sqrt{m}.h)+(x-\sqrt{m}.y) = 0.$$

Comme ω', π' sont des fonctions arbitraires, si l'on désigne par Ω, Π deux autres fonctions arbitraires, on aura, d'après ces équations,

$$g+2\sqrt{m}.h = \Omega(x+\sqrt{m}.y),$$

$$g-2\sqrt{m}.h = \Pi(x-\sqrt{m}.y),$$

ou, en posant $x+\sqrt{m}.y = \alpha$, $x-\sqrt{m}.y = \beta$,

$$g+2\sqrt{m}.h = \Omega(\alpha),$$

$$g-2\sqrt{m}.h = \Pi(\beta),$$

et en même temps les équations différentielles précédentes prennent la forme

$$dc+\sqrt{m}.db = -\alpha.d\Omega(\alpha),$$

$$dc-\sqrt{m}.db = -\beta.d\Pi(\beta).$$

Au moyen des quatre dernières équations on trouvera les valeurs suivantes de quatre des quantités cherchées,

$$g = \frac{\Omega(\alpha)+\Pi(\beta)}{2}, \qquad h = \frac{\Omega(\alpha)-\Pi(\beta)}{4\sqrt{m}},$$

$$c = -\frac{\int\alpha.d\Omega(\alpha)+\int\beta.d\Pi(\beta)}{2}, \quad b = -\frac{\int\alpha.d\Omega(\alpha)-\int\beta.d\Pi(\beta)}{2\sqrt{m}}.$$

En substituant ces valeurs et les expressions

Digitized by Google

$$x = \frac{\alpha+\beta}{2}, \qquad y = \frac{\alpha-\beta}{2\sqrt{m}},$$

dans la première des équations de condition, il vient, toutes réductions faites,

$$da = \frac{\alpha^2.d\Omega(\alpha) - \beta^2.d\Pi(\beta)}{4\sqrt{m}},$$

et, en intégrant, on trouve, pour la valeur de la dernière inconnue,

$$a = \frac{\int\alpha^2.d\Omega(\alpha) - \int\beta^2.d\Pi(\beta)}{4\sqrt{m}}.$$

10. L'ensemble de l'équation (7) et de celles qui représentent les valeurs de a, b, c, g, h, x, y constitue déjà l'intégrale générale. Mais, si l'on veut représenter celle-ci par une seule équation, il faut alors substituer dans l'équation (7) les valeurs de a, b, c, g, h, x, y. On trouve de cette manière, après réduction,

$$z = \frac{\int\alpha^2.d\Omega(\alpha) - 2\alpha\int\alpha.d\Omega(\alpha) + \alpha^2\Omega(\alpha)}{4\sqrt{m}}$$
$$- \frac{\int\beta^2.d\Pi(\beta) - 2\beta\int\beta.d\Pi(\beta) + \beta^2\Pi(\beta)}{4\sqrt{m}}.$$

Mais cette expression de z se simplifie encore au moyen de l'intégration par parties, et prend la forme suivante,

$$z = \frac{\int d\alpha\int\Omega(\alpha)\,d\alpha - \int d\beta\int\Pi(\beta)\,d\beta}{2\sqrt{m}}.$$

Enfin, on peut, si l'on veut, en profitant de ce que les fonctions Ω, Π sont arbitraires, poser

$$\Omega(\alpha) = 2\sqrt{m}\,\frac{d^2\varphi(\alpha)}{d\alpha^2}, \qquad \Pi(\beta) = -\sqrt{m}\,\frac{d^2\psi(\beta)}{d\beta^2},$$

φ et ψ designant des fonctions arbitraires; par suite de cela, l'intégrale générale prendra la forme

$$z = \varphi(\alpha) + \psi(\beta), \qquad \alpha = x + \sqrt{m}.y, \qquad \beta = x - \sqrt{m}.y,$$

sous laquelle elle a été donnée plus haut.

11. La méthode de la variatiou des constantes arbitraires, pour la classe d'équations que nous considérons, n'a pas moins d'importance que pour les autres cas, où elle a servi à trouver des procédés généraux d'intégration. Mais son inventeur, **Lagrange**, n'ayant pas

Digitized by Google

découvert la forme la plus commode pour l'application de cette mé
thode dans le cas considéré, ne l'a pas appréciée à sa juste valeur (*
Ampère a fait de cette méthode une application beaucoup plu
heureuse, comme nous le ferons voir à la fin du présent Mémoir
où nous proposerons une généralisation encore plus grande de ce
procédés, et où nous donnerons des formules en vertu desquelles
méthode de la variation des constantes arbitraires se présentera comm
le plus général des moyens d'intégration pour la classe d'équatio
considérée.

12. Examinons maintenant comment la méthode de **Lagrang**
s'applique aux intégrales intermédiaires des équations aux dérivé
partielles. Représentons par

$$V = 0$$

une intégrale de l'équation aux dérivées partielles du $m^{\text{ième}}$ ordre

$$F = 0.$$

Si elle contient des dérivées de z de l'ordre $k < m$, nous l'appe
lerons une intégrale intermédiaire de l'ordre k. L'équation $V =$ (
avec toutes ses dérivées par rapport à x et à y, jusqu'à l'ordr
$m - k$, forme un système d'équations, dont le nombre est égal
$\frac{1}{2}(m-k)(m-k+1)$. Par suite, si l'intégrale $V = 0$ est particulièr
alors le plus grand nombre de constantes arbitraires qu'elle puiss
contenir, pour que, par leur élimination du système en question, o
obtienne l'équation donnée $F = 0$, sera $\frac{1}{2}(m-k)(m-k+1) - 1$
A cette condition, l'intégrale intermédiaire est dite **complète**.

13. D'après cela, les intégrales intermédiaires d'une équatio
aux dérivées partielles du second ordre ne peuvent être que d
premier ordre, et une intégrale complète $W = 0$ d'une telle équatio
doit renfermer deux constantes arbitraires, soit a et b. Pour pass
de cette intégrale complète à l'intégrale générale du premier ordre
il faut considerer a et b comme des fonctions de x, y, z, z', $z_{,}$, dé
terminées de façon que la differentielle complète de W conserv
encore, dans cette hypothèse, une forme identique à celle qu'ell
avait, lorsque a et b étaient des constantes. En égalant à zéro l

(*) „Au reste, on voit par cet exemple, qui est d'ailleurs un des plu
simples, que la méthode dont il s'agit, quoique directe et générale, est en
quelque façon plus curieuse qu'utile, à cause des difficultés qui peuvent se
rencontrer dans l'intégration des équations de condition." (**Lagrange**, Mé
moire cité plus haut, p. 269. — Oeuvres, tome IV, p. 101.).

Digitized by Google

différentielle de W, prise en ayant égard à la variation de a et de b, nous aurons pour unique équation de condition

$$\frac{\partial W}{\partial a} da + \frac{\partial W}{\partial b} db = 0,$$

équation qui doit servir à déterminer les fonctions a et b. Comme il n'y entre que les différentielles des deux seules variables a et b, on pourra prendre pour la seconde de ces quantités une fonction arbitraire de la première, en posant $b = \varphi(a)$. En conséquence, l'équation de condition précédente prendra la forme

$$\frac{\partial W}{\partial a} + \frac{\partial W}{\partial b} \varphi'(a) = 0,$$

et, jointe aux équations

$$b = \varphi(a), \quad W = 0,$$

elle représentera l'intégrale générale de l'équation donnée.

Ainsi, par exemple, l'intégrale complète du premier ordre de l'équation (3) est

$$z_{,} + \sqrt{m}.z' = a + b(x + \sqrt{m}.y).$$

En la généralisant, on posera

$$da + (x + \sqrt{m}.y)\,db = 0, \quad b = \varphi(a),$$

d'où

$$1 + (x + \sqrt{m}.y)\varphi'(a) = 0,$$

ou

$$\varphi'(a) = -\frac{1}{x + \sqrt{m}.y}.$$

Par suite, a est une fonction arbitraire de $x + \sqrt{m}.y$; mais b est une fonction arbitraire de a et aussi, par conséquent, de $x + \sqrt{m}.y$; donc $a + b(x + \sqrt{m}.y)$ est également une fonction arbitraire de $z + \sqrt{m}.y$. Ainsi l'intégrale générale du premier ordre de l'équation (1) sera

$$z_{,} + \sqrt{m}.z' = \omega(x + \sqrt{m}.y),$$

en désignant par ω une fonction arbitraire. Au moyen de cette intégrale, il est maintenant facile d'obtenir l'intégrale générale primitive.

14. On voit par là que l'application de la méthode de Lagrange aux intégrales complètes intermédiaires des équations du second ordre

Digitized by Google

est considérablement simplifiée par cette circonstance, que, pour la détermination des fonctions a et b, on n'a qu'une seule équation de condition. Il peut sembler, d'après cela, que, au lieu d'appliquer cette méthode immédiatement à l'intégrale complète primitive, il serait beaucoup plus simple de déduire de celle-ci une intégrale complète du premier ordre, et d'appliquer ensuite à cette dernière la méthode de la variation des constantes arbitraires. Cependant, en suivant cette voie, il se présente une difficulté: l'intégrale complète primitive renferme cinq constantes arbitraires, et, jointe à ses deux dérivées du premier ordre, donne en tout trois équations, entre lesquelles il est, en général, impossible d'éliminer trois constantes, pour obtenir une intégrale complète du premier ordre, laquelle ne doit contenir que deux constantes.

Ainsi il s'ensuit de là qu'une intégrale complète d'une équation aux dérivées partielles n'entraîne pas, à la façon d'une intégrale complète d'une équation différentielle ordinaire, comme conséquence algébrique nécessaire, l'existence des intégrales complètes intermédiaires. Une circonstance plus digne encore de remarque, c'est que, parmi les équations aux dérivées partielles, il s'en trouve qui n'admettent pas du tout d'intégrales intermédiaires. Pour confirmer cette remarque, il nous suffira de la vérifier sur un exemple simple.

15. Soit donnée l'équation

$$z_{,}' = z.$$

Supposons qu'à cette équation corresponde une intégrale du premier ordre que nous pourrons, sans restreindre la généralité, représenter sous la forme

$$z' = f(x, y, z, z_{,}).$$

D'après cela, l'équation donnée pourra être considérée comme une conséquence algébrique de la dernière équation et de ses deux équations dérivées

$$\text{(b)} \qquad z_{,}' = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} z_{,} + \frac{\partial f}{\partial z_{,}} z_{,,},$$

$$\text{(c)} \qquad z'' = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} z' + \frac{\partial f}{\partial z_{,}} z_{,}',$$

et par suite, dans ce système, on pourra remplacer l'une ou l'autre des équations (b), (c) par l'équation proposée. Mais, si l'on tirait des équations (b), (c) les valeurs de deux des quantités z'', $z_{,}'$, $z_{,,}$, et qu'on substituât de nouveau ces valeurs dans ces mêmes équations,

Digitized by Google

on obtiendrait évidemment des identités. Par suite, on obtiendra, absolument de la même manière, une identité comme résultat de la substitution de ces valeurs dans l'équation donnée.

En mettant, dans l'équation donnée, pour $z_{,}'$ sa valeur tirée de l'équation (b), il vient

$$\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} z_{,} + \frac{\partial f}{\partial z_{,}} z_{,,} = z. \tag{d}$$

En vertu de ce qui précède, cette équation doit être identique, du moment que l'équation donnée admet une intégrale du premier ordre. Dans l'identité supposée, le terme en $z_{,,}$ ne peut se réduire avec aucun autre; donc on a

$$\frac{\partial f}{\partial z_{,}} = 0,$$

c'est-à-dire que f ne renferme pas $z_{,}$. Dans ce cas, le terme en $z_{,}$ n'en a plus d'autre semblable à lui, et l'on doit avoir

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Donc f ne peut contenir que x et y. Mais alors l'égalité entre $\frac{\partial f}{\partial y}$ et z, à laquelle se réduit finalement la condition (d), ne peut subsister. Par conséquent, l'équation considérée ne saurait admettre une intégrale du premier ordre (*).

16. Le raisonnement précédent, quoique développé sur un exemple particulier, n'en a pas moins une généralité suffisante. En l'appliquant à certains cas, comme on l'a fait tout à l'heure, on se convainc de l'impossibilité de l'existence d'une intégrale intermédiaire; dans d'autres cas, on est conduit à plusieurs équations simultanées aux dérivées partielles de la fonction f, non contradictoires entre elles. Quelquefois, en effet, par cette voie, l'intégration d'une équation aux dérivées partielles du second ordre conduit à l'intégration d'un système d'équations simultanées aux dérivées partielles du premier ordre. Mais nous nous bornerons ici à cette indication, notre dessein étant de passer maintenant à l'exposition des principales propriétés des intégrales générales, sur lesquelles sont fondées d'autres méthodes plus générales pour l'intégration de la classe d'équations considérée.

(*) Raabe, Differenzial- und Integralrechnung. Bd. III. § 704.

Digitized by Google

§. 3.

17. Les propriétés fondamentales de l'intégrale générale d'une équation aux dérivées partielles découlent de sa détermination, donnée plus haut (§ 1). Nous avons vu que l'intégrale générale peut être représentée par un système de plusieurs équations, conduisant finalement à une seule équation entre les variables du problème x, y, z. Soit donc

$$V = 0$$

une équation entre x, y, z et certaines quantités arbitraires, dont le nombre et la nature sont encore inconnus, laquelle représente l'intégrale générale de l'équation (2) aux dérivées partielles de l'ordre m. Occupons nous de déterminer le caractère principal et le nombre de ces quantités arbitraires, et d'étudier les diverses circonstances qui peuvent se présenter dans le passage de l'intégrale générale à l'équation différentielle correspondante.

18. En désignant par n un nombre non moindre que m, et joignant à l'équation intégrale générale toutes ses dérivées par rapport à x et à y, jusqu'à l'ordre n inclusivement, on formera un système d'équations, que nous pourrons représenter comme il suit, d'après le système de notations que nous avons adopté,

$$(A) \quad \left\{ \begin{array}{lllll} V = 0, & & & & \\ V' = 0, & V_{,} = 0, & & & \\ V'' = 0, & V_{,}' = 0, & V_{,,} = 0, & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ V^{(n)} = 0, & V_{,}^{(n-1)} = 0, & \ldots, & V'_{n-1} = 0, & V_{n} = 0. \end{array} \right.$$

Pareillement, avec l'équation (2) et toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre $n-m$, on formera le système d'équations

$$(B) \quad \left\{ \begin{array}{lllll} F = 0, & & & & \\ F' = 0, & F_{,} = 0, & & & \\ F'' = 0, & F_{,}' = 0, & F_{,,} = 0, & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ F^{(n-m)} = 0, & F_{,}^{(n-m-1)} = 0, & \ldots, & F'_{n-m-1} = 0, & F_{n-m} = 0. \end{array} \right.$$

Les équations (A), d'après la définition de l'intégrale générale, ne doivent fournir, entre

$$x, \quad y, \quad z, \quad z', \quad z_{,}, \quad \ldots, \quad z^{(n)}, \quad \ldots, \quad z_{(n)},$$

que des relations identiques à celles qui se déduisent des équations (B).

Digitized by Google

Mais dans le système (A) on a $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ équations, tandis que, dans le système (B), il ne s'en trouve que $\frac{1}{2}(n-m+1)(n-m+2)$. Donc le premier de ces deux systèmes peut, et même doit renfermer des quantités arbitraires, qui n'entrent pas dans le second, et dont le nombre ne doit pas être moindre que la différence des deux nombres $(n+1)(n+2)$ et $\frac{1}{2}(n-m+1)(n-m+2)$, laquelle est

$$(C) \qquad (n+1)m-\tfrac{1}{2}m(m-1).$$

Dans ce cas seulement il est possible de rendre, par l'élimination des quantités arbitraires, les systèmes (A) et (B) complétement identiques entre eux. En considérant le nombre (C), qui indique la limite inférieure du nombre des quantités arbitraires dans les équations (A), on remarque qu'il n'est pas constant, mais qu'il croît, au contraire, en même temps que n. Donc, relativement à la nature des quantités arbitraires qui entrent dans l'intégrale générale, nous sommes en droit de poser cette conclusion:

Une intégrale finie d'une équation aux dérivées partielles doit, pour être générale, renfermer des quantités arbitraires dont le nombre croît par la différentiation répétée de l'intégrale.

19. L'analyse mathématique ne fournit que deux formes d'expressions des quantités arbitraires, qui satisfassent à la condition précédente.

A la première forme appartiennent les fonctions arbitraires d'arguments exprimés par des fonctions déterminées des variables principales, par rapport auxquelles se fait la différentiation. Ainsi, par exemple, pour l'équation

$$z_{,,}-mz''=0,$$

nous avons eu l'intégrale générale

$$z=\varphi(\alpha)+\psi(\beta),\quad \alpha=x+y\sqrt{m},\quad \beta=x-y\sqrt{m},$$

où φ et ψ sont des fonctions arbitraires des arguments respectifs α et β, donnés en fonctions explicites de x et de y.

Mais les arguments qui entrent sous les signes de fonctions arbitraires dans l'intégrale générale s'expriment aussi quelquefois par des fonctions implicites des variables principales, et cela, de telle sorte que ces expressions varient en même temps que la forme des fonctions arbitraires. On en trouve un exemple dans l'équation

$$(z''-z'z_{,,})^2=z_{,}^2z''z_{,,},$$

Digitized by Google

dont l'intégrale est

$$\begin{cases} z = \dfrac{x\alpha^4 - 2\alpha^2 y + 4\alpha^3\varphi(\alpha)}{3} - 4\int\alpha^2\varphi(\alpha)\,d\alpha + \psi(\beta), \\ y = \alpha^2\left(x + \dfrac{d\varphi(\alpha)}{d\alpha}\right), \\ \beta = \dfrac{y}{\alpha} + \alpha x + \varphi(\alpha), \end{cases}$$

comme on peut s'en assurer par la vérification. Il entre dans cette expression deux fonctions arbitraires φ et ψ, dont les arguments respectifs α et β sont donnés sous forme de fonctions **implicites** de x et de y, déterminées au moyen des deux dernières équations de l'intégrale, de telle sorte que leurs expressions varient avec la forme de la fonction φ.

20. Il y a encore une autre forme possible pour les expressions analytiques des quantités arbitraires de l'intégrale générale, qui satisfont également à la condition énoncée plus haut. Pour nous faire une idée de cette forme, concevons l'intégrale, définie ou indéfinie, d'une expression renfermant une fonction arbitraire, combinée avec certaines quantités variables, dont une seule — celle dont la différentielle multiplie cette expression — est considérée comme variable, tandis que les autres sont supposées constantes dans cette opération. L'exécution d'une telle intégration peut être appelée, d'après **Ampère**, par analogie avec la différentiation partielle, une **intégration partielle**, et son résultat sera désigné sous le nom d'**intégrale partielle** ou de **quadrature partielle**.

Comme, dans une intégrale partielle, toutes les quantités, autres que la variable d'intégration, sont considérées comme constantes, on obtiendra, en les différentiant par rapport à ces constantes, d'autres intégrales partielles, différentes en général de la première, et qui, par conséquent, se trouvant dans les équations (A), doivent être elles-mêmes éliminées individuellement.

Pour faire mieux comprendre ce que sont les expressions de cette forme, prenons des exemples particuliers. L'intégrale générale de l'équation

$$z'' = z_{\prime}$$

peut être représentée sous la forme

$$z = \int_{\alpha}^{+\infty} \varphi(x + 2u\sqrt{y})\,e^{-u}\,du.$$

Digitized by Google

Il y entre l'intégrale partielle définie d'une expression, dans laquelle φ désigne une fonction arbitraire, et u la variable d'intégration, tandis que les variables indépendantes x, y de l'équation donnée figurent dans cette intégrale comme des paramètres arbitraires.

L'équation

$$z'' - z_{,,} + \frac{4}{x+y} z' = 0$$

a pour intégrale générale

$$z = 2e^{-\frac{2x}{\alpha}} \left[\int \frac{e^{\frac{2x}{\alpha}}}{\alpha} \varphi(\alpha - 2x)\, dx + \psi(\alpha) \right],$$

$$\alpha = x + y,$$

e étant la base des logarithmes népériens, φ et ψ des signes de fonctions arbitraires, x la variable d'intégration dans l'intégrale partielle indéfinie, et la quantité $\alpha = x + y$ étant considérée, pendant l'intégration, comme un paramètre constant.

21. Les intégrales générales des équations aux dérivées partielles qui contiennent des fonctions arbitraires, mais dans la composition desquelles il n'entre point d'intégrales partielles, forment une classe comparativement plus simple, et qui présente des traits caractéristiques mieux déterminés. Leur simplicité relative consiste en ce que, quand on les différentie par rapport aux variables autres que les arguments α, β, ... des fonctions arbitraires, elles ne fournissent pas d'autres quantités arbitraires que celles qui sont déjà renfermées dans les équations de l'intégrale; ce qui, comme on l'a remarqué plus haut, peut ne pas avoir lieu relativement aux intégrales partielles. Leur trait caractéristique constant, comme nous le démontrerons plus bas, consiste en ce que le nombre des fonctions arbitraires indépendantes qu'elles contiennent est toujours égal à l'ordre des équations différentielles auxquelles appartiennent ces intégrales.

Ampère a formé avec ces intégrales une classe spéciale qu'il appelle la première classe. Cette dénomination n'est peut-être pas très-juste, parce qu'elle pourrait faire croire qu'après la première classe il en doit venir une seconde, tandis que la classification ne se poursuit pas plus loin. Il semble préférable, d'après cela, d'adopter pour ces intégrales la dénomination d'intégrales générales sans quadratures partielles.

22. Nous représenterons le type général d'une intégrale de cette classe, correspondante à une équation différentielle du $m^{\text{ième}}$ ordre,

Digitized by Google

sous la forme d'un système d'équations, en nombre $k+1$ provisoirement indéterminé, et renfermant:

1°. Outre les variables principales x, y, z, les k quantités variables

$$\alpha,\quad \beta,\quad \gamma, \ldots;$$

2°. Un nombre g, provisoirement indéterminé, de fonctions arbitraires, indépendantes entre elles,

$$\varphi(\alpha),\quad \psi(\beta),\quad \omega(\gamma), \ldots;$$

3°. Les dérivées de ces fonctions, jusqu'à des ordres déterminés,

$$\varphi'(\alpha),\ \varphi''(\alpha), \ldots;\quad \psi'(\beta),\ \psi''(\beta), \ldots;\quad \omega'(\gamma),\ \omega''(\gamma), \ldots;\ \text{etc.}\ldots,$$

obtenues par les différentiations relatives aux arguments respectifs α, β, γ, ...

4°. Des quantités obtenues par l'intégration relative à α d'expressions données quelconques, dépendantes de α, $\varphi(\alpha)$, $\varphi'(\alpha)$, ...; ou par l'intégration relative à β d'expressions données quelconques, dépendantes de β, $\psi(\beta)$, $\psi'(\beta)$, ...; etc.

§. 4.

23. Une intégrale générale sans quadratures partielles, du type que nous venons de décrire, renferme des quantités arbitraires, dont le nombre croît avec celui des différentiations des équations de l'intégrale. Examinons maintenant de quelle manière des quantités arbitraires, non renfermées dans les équations de l'intégrale, se produisent successivement dans les expressions des dérivées partielles de la fonction z. Pour cela, voyons d'abord comment on peut déduire des équations de l'intégrale les expressions de toutes les dérivées de z.

En différentiant successivement par rapport à x et à y les $k+1$ équations de l'intégrale, on obtient $2(k+1)$ équations du premier ordre, d'où l'on peut tirer les expressions des $2(k+1)$ dérivées du premier ordre

$$z',\quad z_{,},\quad \alpha',\quad \alpha_{,},\quad \beta',\quad \beta_{,},\quad \gamma',\quad \gamma_{,}, \ldots:$$

En passant, au moyen de nouvelles différentiations par rapport à x et à y, aux équations du second ordre, dont le nombre sera $3(k+1)$, et y substituant les expressions précédentes de z', $z_{,}$, α', $\alpha_{,}$, β', $\beta_{,}$, ..., on pourra en tirer les expressions des $3(k+1)$ dérivées du second ordre

Digitized by Google

$$z'', \quad z_{\prime}', \quad z_{\prime\prime}, \quad \alpha'', \quad \alpha_{\prime}', \quad \alpha_{\prime\prime}, \quad \beta'', \quad \beta_{\prime}', \quad \beta_{\prime\prime}, \ldots$$

En continuant de cette manière, jusqu' à ce que nous arrivions à un ordre arbitraire quelconque n, on pourra obtenir successivement des expressions de toutes les dérivées

$$z', \quad z_{\prime}, \quad z'', \quad z_{\prime}', \quad z_{\prime\prime}, \quad \ldots, \quad z^{(n)}, \quad \ldots, \quad z_{n},$$

dans lesquelles entrent les quantités contenues dans l'intégrale, et, de plus, les nouvelles quantités arbitraires qui s'obtiennent par la différentiation des quantités arbitraires de l'intégrale par rapport à leurs arguments respectifs.

24. Pour la résolution des différentes questions relatives à l'apparition de ces nouvelles quantités arbitraires dans les expressions des dérivées de z, changeons d'abord le système des variables indépendantes. En supposant que chacun des arguments α, β, $\gamma, \ldots$ des fonctions arbitraires dépende à la fois des deux variables x, y, introduisons, comme nouveau système de variables indépendantes, un quelconque de ces arguments, par exemple α, et l'une des anciennes variables indépendantes, par exemple x.

Supposons que l'on ait

$$\alpha = f(x, y);$$

en vertu de cette équation, y sera une fonction de x et de α, et toutes les quantités variables dépendantes de x et de y pourront maintenant être considérées comme des fonctions de x et de α.

A cela ajoutons encore une remarque, dont nous ferons bientôt usage, savoir, que les dérivées $\frac{\partial y}{\partial x}$ et $\frac{\partial y}{\partial \alpha}$ ne peuvent avoir pour valeurs 0 ou ∞. Car, en prenant, dans l'équation précédente, x et α pour variables indépendantes, et différentiant cette équation par rapport à x en considérant α comme constant, on a

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}, \quad \text{d'où} \quad \frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}.$$

Donc $\frac{\partial y}{\partial x}$ devient 0 ou ∞, lorsqu' on a respectivement $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ ou $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$; mais aucun de ces deux cas n'est possible, car f représente la valeur de α, laquelle dépend, par hypothèse, de x et de y.

Digitized by Google

De plus, y, d'après l'équation $\alpha = f(x, y)$, est évidement une fonction de α; par conséquent, $\frac{\partial y}{\partial \alpha}$ ne peut se reduire à zéro. En différentiant cette équation par rapport à α, x étant par suite considéré comme constant, il vient

$$1 = \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \alpha}, \quad \text{d'où} \quad \frac{\partial y}{\partial \alpha} = \frac{1}{\frac{\partial f}{\partial y}}.$$

Donc $\frac{\partial y}{\partial \alpha}$ sera $= \infty$, si $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$; mais ce cas n'est pas possible, car la fonction f, qui représente la valeur de α, contient y.

Ainsi, dans les $k+1$ équations de l'intégrale, on considérera x et α comme les variables indépendantes, les autres variables, au nombre de $k+1$, savoir, $y, z, \beta, \gamma, \ldots$ étant des fonctions de x et de α.

Pour désigner les dérivées partielles par rapport aux nouvelles variables indépendantes x et α, on se rappellera la convention établie ci-dessus (§ 1, art. 2).

25. Maintenant, concernant l'apparition, dans les dérivées de z déduites des équations de l'intégrale, de quantités arbitraires non renfermées dans ces équations, on peut démontrer la proposition suivante:

Si une nouvelle quantité arbitraire (quelque fonction arbitraire de α, non renfermée dans les équations de l'intégrale) apparaît pour la première fois dans l'expression de la dérivée partielle $z_k^{(i)}$, de l'ordre $n = i+k$, cette quantité doit nécessairement apparaître aussi dans toutes les dérivées partielles du $n^{\text{ième}}$ ordre de z

$$(n) \qquad z^{(n)},\quad z_{\prime}^{(n-1)},\quad \ldots,\quad z_{k-1}^{(i+1)},\quad z_k^{(i)},\quad z_{k+1}^{(i-1)},\quad \ldots,\quad z'_{n-1},\quad z_n.$$

Il suffit de démontrer cette proposition pour les dérivées $z_{k-1}^{(i+1)}$ et $z_{k+1}^{(i-1)}$, voisines de $z_k^{(i)}$ dans la suite (n) parce que, en appliquant la même démonstration aux dérivées situées à droite de $z_{k+1}^{(i-1)}$ et à gauche de $z_{k-1}^{(i+1)}$, on l'étendra à toute la suite (n).

Pour cela, prenons les dérivées partielles, du $(n-1)^{\text{ième}}$ ordre $z_k^{(i-1)}$ et $z_{k-1}^{(i)}$, d'où l'on déduit $z_k^{(i)}$ (x et y étant prises pour variables indépendantes), en différentiant la première par rapport à x, la seconde par rapport à y.

Digitized by Google

Si l'on prend maintenant pour variables indépendantes x et α, en différentiant ces deux mêmes fonctions par rapport à x, il vient

$$\frac{\partial z_k^{(i-1)}}{\partial x} = z_k^{(i)} + z_{k+1}^{(i-1)} \frac{\partial y}{\partial x}, \qquad \frac{\partial z_{k-1}^{(i)}}{\partial x} = z_{k-1}^{(i+1)} + z_k^{(i)} \frac{\partial y}{\partial x}.$$

d'où l'on tire

$$z_{k-1}^{(i+1)} = \frac{\partial z_{k-1}^{(i)}}{\partial x} - z_k^{(i)} \frac{\partial y}{\partial x}, \qquad z_{k+1}^{(i-1)} = \frac{\frac{\partial z_k^{(i-1)}}{\partial x} - z_k^{(i)}}{\frac{\partial y}{\partial x}}.$$

Mais, par hypothèse, il apparaît dans $z_k^{(i)}$, une nouvelle quantité arbitraire, qui n'entre ni dans les équations de l'intégrale, ni dans les expressions des dérivées de z jusqu' à l'ordre $n-1$ inclusivement; par suite, elle ne peut entrer non plus ni dans l'expression de y tirée des équations de l'intégrale, ni dans les expressions de $\frac{\partial z_{k-1}^{(i)}}{\partial x}$, $\frac{\partial z_k^{(i-1)}}{\partial x}$, obtenues en différentiant par rapport à x les dérivées du $(n-1)^{\text{ième}}$ ordre $z_{k-1}^{(i)}$, $z_k^{(i-1)}$, où l'on considère α comme constant. De plus, d'après ce qu'on a démontré plus haut, $\frac{\partial y}{\partial x}$ ne peut être ni 0 ni ∞. Ainsi les fonctions arbitraires considérées de α n'entrent dans les seconds membres des dernières égalités que par le multiplicateur $z_k^{(i)}$ des seconds termes; et comme ces termes ne peuvent s'annuler, il faut donc que les premiers membres de ces égalités, savoir, les expressions $z_{k-1}^{(i+1)}$ et $z_{k+1}^{(i-1)}$ renferment la même fonction arbitraire de α qui s'est introduite dans $z_k^{(i)}$. Ce qu'il fallait démontrer.

26. La proposition réciproque de la précédente doit avoir nécessairement lieu, savoir que, si l'expression de la dérivée $z_k^{(i)}$, de l'ordre $n = i + k$, ne contient pas d'autres fonctions arbitraires de α que celles qui entrent dans les dérivées des ordres inférieurs, toutes les dérivées de l'ordre n devront jouir de la même propriété.

27. Pour voir à quelle condition apparaît, dans les expressions des dérivées du $n^{\text{ième}}$ ordre, une nouvelle fonction arbitraire de α, qui ne se trouve pas dans les expressions des dérivées de l'ordre $n-1$, prenons une de ces dernières $z_{k-1}^{(i)}$, et différentions-la partiellement par rapport à α. On obtient l'égalité

Digitized by Google

$$\frac{\partial z^{(i)}_{k-1}}{\partial \alpha} = z^{(i)}_k \frac{\partial y}{\partial \alpha},$$

où $\frac{\partial y}{\partial \alpha}$ ne peut être ni 0 ni ∞; donc

$$z^{(i)}_k = \frac{\frac{\partial z^{(i)}_{k-1}}{\partial \alpha}}{\frac{\partial y}{\partial \alpha}}.$$

Dans le numérateur et dans le dénominateur de la fraction du second membre doit apparaître la nouvelle fonction arbitraire de α, qui n'entrait pas dans les expressions de $z^{(i)}_{k-1}$ et de y; cette fonction arbitraire, si toutefois elle n'entre pas exclusivement dans un facteur commun au numérateur et au dénominateur, se trouvera ainsi dans l'expression de la dérivée du $n^{\text{ième}}$ ordre $z^{(i)}_k$. Cette remarque, jointe à la proposition précédente, conduit aux conclusions suivantes:

1⁰. Les expressions des dérivées du $n^{\text{ième}}$ ordre $z^{(n)}, \ldots, z_n$ renfermeront une fonction arbitraire non contenue dans les expressions des dérivées du $(n-1)^{\text{ième}}$ ordre $z^{(n-1)}, \ldots, z_{n-1}$, pourvu que cette fonction n'entre pas exclusivement dans un facteur commun à $\frac{\partial y}{\partial \alpha}$ et à chacune des expressions $\frac{\partial z^{(n-1)}}{\partial \alpha}, \ldots, \frac{\partial z_{n-1}}{\partial \alpha}$. Ces dernières expressions doivent, toutes sans exception, contenir ou ne pas contenir le facteur en question, commun avec $\frac{\partial y}{\partial \alpha}$.

2⁰. Comme, dans la fonction qui représente la valeur de $z^{(i)}_k$, le nombre $n = i + k$ variant, le dénominateur reste toujours le même, tandis que le numérateur change continuellement; la nouvelle fonction de α qui y apparaît ne pourra être constamment la même, mais étant différente, et même toujours renfermée dans un facteur particulier, elle ne pourra constamment se réduire avec un facteur semblable du dénominateur; car, dans ce cas, ce dernier devrait être formé d'un nombre indéterminé de facteurs différents. Par conséquent, il existe toujours un ordre de dérivées dans lesquelles s'introduit une fonction arbitraire de α non contenue dans les expressions des dérivées inférieures; et

3⁰. Dès que cela a lieu pour un certain ordre de dérivées n, alors, dans chacun de sordres suivants $n+1$, $n+2$, ..., apparaîtront de nouvelles fonctions arbitraires de α. Il suffit de s'en assurer pour

Digitized by Google

l'ordre $n+1$. En différentiant $z_k^{(i)}$ partiellement par rapport à α, on trouve

$$\frac{\partial z_k^{(i)}}{\partial \alpha} = z_{k+1}^{(i)} \frac{\partial y}{\partial \alpha}, \qquad \text{d'où} \qquad z_{k+1}^{(i)} = \frac{\frac{\partial z_k^{(i)}}{\partial \alpha}}{\frac{\partial y}{\partial \alpha}}.$$

Le numérateur du second membre de la dernière égalité contient une fonction de α, qui est la dérivée de celle qui a paru pour la première fois dans $z_k^{(i)}$, et cette fonction ne peut entrer dans $\frac{\partial y}{\partial \alpha}$, puisque la fonction primitive correspondante n'entrait pas dans y.

28. A l'exemple d'Ampère nous appellerons les expressions des dérivées de z **homogènes à l'intégrale** par rapport à α, si elles ne renferment que les mêmes fonctions arbitraires de α qui entrent dans les équations de l'intégrale.

De cette définition il ne s'ensuit pas que les dérivées homogènes à l'intégrale doivent contenir immanquablement **toutes** les fonctions arbitraires de α qui entrent dans l'intégrale; il suffit qu'elles n'en contiennent aucune qui n'entre dans l'intégrale.

Les dérivées de z seront dites **hétérogènes à l'intégrale** par rapport à α, lorsqu'elles renfermeront des fonctions arbitraires de α qui ne se trouvent pas dans les équations de l'intégrale.

29. En faisant usage de ces dénominations, on peut exprimer comme il suit les résultats obtenus dans ce §:

1°. Si la dérivée z', et par suite aussi la dérivée $z_{,}$, sont hétérogènes à l'intégrale, toutes les autres dérivées seront hétérogènes à l'intégrale.

2°. Si la dérivée $z_k^{(i)}$, de l'ordre $n = i+k$, est homogène à l'intégrale, toutes les dérivées du même ordre et des ordres inférieurs seront homogènes à l'intégrale.

3°. Il existe toujours une dérivée de z, dans laquelle commence à paraître une fonction arbitraire de α qui ne se trouve pas dans les équations dont se compose l'intégrale; cette fonction commence à paraître à la fois dans toutes les dérivées du même ordre; et

4°. Alors, dans chacun des ordres de dérivées qui suivent, se produiront de nouvelles fonctions arbitraires de α, qui ne se trouvent ni dans les équations de l'intégrale, ni dans les dérivées des ordres précédents.

Digitized by Google

30. **Remarque.** Nous avons supposé ci-dessus [24] que les équations de l'intégrale générale, sans quadratures partielles, ne contiennent que des fonctions arbitraires dont les arguments α, β, $\gamma, \ldots$ sont des fonctions des deux variables x, y à la fois. Dans cette hypothèse, on a démontré que les expressions des dérivées de z d'un même ordre quelconque, déduites des équations de l'intégrale, doivent être, sans exception, ou toutes homogènes ou toutes hétérogènes à l'intégrale. Cette propriété des dérivées n'a plus lieu, si l'intégrale contient des fonctions arbitraires dont les arguments dépendent de la seule variable y.

Supposons, en effet, que l'intégrale contienne une fonction arbitraire de α, et que α soit fonction de y seulement; il s'ensuit que y sera, réciproquement, une fonction de α seulement, que nous désignerons par

$$y = f(\alpha).$$

On aura donc

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial y}{\partial \alpha} = f'(\alpha),$$

et, au lieu de l'équation démontrée au n⁰ 25

$$\frac{\partial z_{k-1}^{(i)}}{\partial x} = z_{k-1}^{(i+1)} + z_k^{(i)} \frac{\partial y}{\partial x},$$

on aura celle-ci

$$\frac{\partial z_{k-1}^{(i)}}{\partial x} = z_{k-1}^{(i+1)},$$

laquelle fait voir que, dans la dérivée $z_{k-1}^{(i+1)}$ de l'ordre n, il ne peut apparaître aucune fonction arbitraire de α qui n'existât dans la dérivée $z_{k-1}^{(i)}$ de l'ordre $n-1$; car la différentiation par rapport à x suppose α constant.

D'un autre côté, on a

$$\frac{\partial z_{k-1}^{(i)}}{\partial \alpha} = z_k^{(i)} \frac{\partial y}{\partial \alpha} = z_k^{(i)} f'(\alpha),$$

d'où

$$z_k^{(i)} = \frac{\frac{\partial z_{k-1}^{(i)}}{\partial \alpha}}{f'(\alpha)}.$$

Digitized by Google

Dans le numérateur du second membre de cette égalité, par suite de la différentiation de $z_{k-1}^{(i)}$ relativement à α, il doit se produire une fonction arbitraire de α qui n'existait pas auparavant dans $z_{k-1}^{(i)}$, et cette fonction ne peut disparaître par réduction avec le dénominateur, puisque ce dernier est une fonction déterminée $f'(\alpha)$ de α. Il faut donc que l'expression de $z_k^{(i)}$ contienne une fonction arbitraire qui n'existe pas dans l'expression de $z_{k-1}^{(i)}$.

Ainsi, des deux dérivées d'ordre n, $z_{k-1}^{(i+1)}$ et $z_k^{(i)}$, la première est homogène, la seconde hétérogène, par rapport à α, à la dérivée $z_{k-1}^{(i)}$ d'ordre $n-1$. Par suite, ces dérivées du $n^{\text{ième}}$ ordre sont hétérogènes entre elles, ce qu'il s'agissait de démontrer.

31. De plus, il est aisé de conclure, de ce qu'on a démontré plus haut, que les dérivées

$$z',\quad z'',\quad z''',\quad \ldots,\quad z^{(n)},\quad \ldots,$$

que l'on obtient en différentiant z par rapport à x seulement, ne contiendront pas d'autres fonctions arbitraires de α que celles qui entrent dans l'expression de z.

Au contraire, les dérivées

$$z_{,}=\frac{\frac{\partial z}{\partial\alpha}}{f'(\alpha)},\qquad z_{,}'=\frac{\frac{\partial z'}{\partial\alpha}}{f'(\alpha)},\qquad \ldots,\qquad z_{,}^{(n-1)}=\frac{\frac{\partial z^{(n-1)}}{\partial\alpha}}{f'(\alpha)},\quad \ldots\ldots,$$

pour la formation desquelles il faut un nombre variable de différentiations relatives à x, mais une seule différentiation par rapport à y, contiendront une seule et même fonction arbitraire de α, différente de celles qui entrent dans z.

De même, les dérivées

$$z_{,,}=\frac{\frac{\partial z_{,}}{\partial\alpha}}{f'(\alpha)},\qquad z_{,,}'=\frac{\frac{\partial z_{,}'}{\partial\alpha}}{f'(\alpha)},\qquad \ldots,\qquad z_{,,}^{(n-2)}=\frac{\frac{\partial z_{,}^{(n-2)}}{\partial\alpha}}{f'(\alpha)},\quad \ldots$$

contiendront deux mêmes fonctions arbitraires de α, autres que celles qui entrent dans z. Et ainsi de suite.

Donc les expressions des dérivées qui proviennent de différentiations faites seulement par rapport à x seront homogènes à l'inté-

grale; les autres dérivées seront hétérogènes à l'intégrale. Mais dérivées dans la formation desquelles il entre un même nombre différentiations par rapport à y seront homogènes entre elles. D tout ceci, nous entendons l'homogénéité ou l'hétérogénéité comme rapportant à l'argument α, dépendant de y seulement.

Il est clair qu'en échangeant, dans ce qui précède, la lettre avec la lettre x, on parviendra à des conclusions analogues.

§. 5.

32. Maintenant nous pouvons résoudre une question très-imp tante, relative aux intégrales sans quadratures partielles: la quest du nombre des fonctions arbitraires, indépendantes entre elles, sont renfermées dans une semblable intégrale, lorsqu'elle apparti à une équation aux dérivées partielles de l'ordre m.

On devra prendre pour base de cette recherche la définition l'intégrale générale (§ 1), et répéter les raisonnements du n⁰ 18, q nous ont conduits aux systèmes d'équations (A) et (B). Mais, dans dernier article, nous avons représenté l'intégrale générale sous forme d'une seule équation, tandis qu'ici nous la représenterons, co formément au type général indiqué à la fin du § 3, sous la form d'un système de $k+1$ équations. En prenant donc les équations l'intégrale et toutes leurs dérivées par rapport à x et à y, jusq l'ordre n inclusivement, nous obtiendrons maintenant

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2}(k+1)$$

équations. L'équation différentielle donnée aux dérivées partielles $m^{\text{ième}}$ ordre,

$$F = 0,$$

avec toutes ses dérivées par rapport à x et à y, jusqu'à l'ordre $n-$ inclusivement, fournit, d'après ce qui précède,

$$\frac{(n-m+1)(n-m+2)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} - m(n+1) + \frac{m(m-1)}{2}$$

équations.

En vertu de la définition de l'intégrale générale, le premier d ces deux systèmes d'équations, après l'élimination des quantités qu

ne se trouvent pas dans l'équation différentielle donnée, devra devenir complétement identique avec le second. La possibilité de remplir cette condition est déjà assurée par cela même, que le premier système contient plus d'équations que le second, la différence des nombres d'équations des deux systèmes étant

(D) $$\frac{(n+1)(n+2)}{2}k+m(n+1)-\frac{m(m-1)}{2}.$$

Il suffit, par conséquent, que le nombre des quantités à éliminer du premier système ne soit pas moindre que cette différence. Ce nombre doit être égal à (D), si chacune des quantités en question s'élimine séparément; il pourra être, au contraire, plus grand que (D), si quelques-unes de ces quantités s'éliminent simultanément par groupes.

33. Essayons maintenant de trouver l'expression du nombre total des quantités sujettes à l'élimination. Elles peuvent être divisées en deux catégories:

1⁰. Les k arguments α, β, γ, ..., avec toutes leurs dérivées jusqu'à l'ordre n inclusivement,

$$\alpha', \quad \alpha_{,}, \quad \alpha'', \quad \alpha_{,}', \quad \alpha_{,,}, \quad \ldots, \quad \alpha^{(n)}, \quad \ldots, \quad \alpha_{n},$$

$$\beta', \quad \beta_{,}, \quad \beta'', \quad \beta_{,}', \quad \beta_{,,}, \quad \ldots, \quad \beta^{(n)}, \quad \ldots, \quad \beta_{n},$$

etc. . . . .

Le nombre de ces quantités est évidemment égal à

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2}k.$$

2⁰. Les fonctions arbitraires et leurs dérivées par rapport à leurs arguments respectifs.

Pour exprimer de la manière la plus générale le nombre des quantités à éliminer de cette dernière catégorie, adoptons la notation suivante:

Soit g le nombre des fonctions arbitraires et indépendantes entre elles, telles que $\varphi(\alpha)$, $\psi(\beta)$, ..., qui entrent dans les équations de l'intégrale. Si tous les arguments α, β, ... sont différents entre eux, alors évidemment $g=k$; dans les cas contraire, on devra avoir $g>k$.

Soit g' le nombre des fonctions arbitraires formées au moyen des précédentes par la différentiation ou par l'intégration (ou par ces deux opérations à la fois) relativement à un même argument. Dans

ce nombre nous comprendrons les fonctions qui se trouvent effect
ment dans les équations de l'intégrale, ou même qui, ne s'y trou
pas, se rencontrent dans la suite des transformations qu'il faut op
pour passer d'une fonction à une autre fonction, entrant l'un
l'autre dans les équations de l'intégrale. Par exemple $\varphi'(\alpha)$
comprise dans le nombre g', si les équations de l'intégrale contien
$\varphi(\alpha)$ et $\varphi''(\alpha)$. De même, F désignant une fonction don
$\int F[\alpha, \varphi(\alpha)]\,d\alpha$ sera comprise dans le nombre g', si les équatio
l'intégrale contiennent $\int d\alpha \int F[\alpha, \varphi(\alpha)]\,d\alpha$ et $\varphi(\alpha)$.

Enfin soient $l+1$, $l'+1$, $l''+1$, ... les ordres des équation
duites des équations de l'intégrale, et qui sont les premières hét
gènes à cette intégrale par rapport à α, β, γ, ... respectiven
Les nombres l, l', l'', ... doivent avoir des valeurs finies et déte
nées, et peuvent aussi se réduire à zéro.

34. Mais on a démontré, dans le § précédent, que lorsque, d
les équations dérivées d'un ordre quelconque des équations de l'i
grale, apparaît pour la première fois une fonction arbitraire,
exemple une certaine dérivée de $\varphi(\alpha)$; alors, en passant aux éq
tions dérivées des ordres suivants, il se produira encore, à cha
fois, de nouvelles fonctions arbitraires, provenant également de φ
Lors donc qu'on arrivera à l'ordre n dans la différentiation des éq
tions de l'intégrale, on aura introduit des fonctions arbitraires qui
se trouvaient pas dans ces équations, et parmi lesquelles il y
aura $n-l$ provenant de $\varphi(\alpha)$, $n-l'$ provenant de $\psi(\beta)$, etc.
conséquent, le nombre total des fonctions arbitraires ainsi introdu
sera $ng-l-l'-l''-\ldots$. En y ajoutant les nombres détermi
ci-dessus g, g' et $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)k$, on obtiendra une expression gé
rale du nombre total des quantités sujettes à l'élimination, sous
forme suivante,

$$\tfrac{1}{2}(n+1)(n+2)k+g(n+1)+g'-l-l'-l''-\ldots.$$

Ce nombre, comme on l'a expliqué plus haut, ne doit être,
aucun cas, moindre que le nombre (D). Il faut donc nécessaireme
que l'on ait

$$\tfrac{1}{2}(n+1)(n+2)k+g(n+1)+g'-l-l'-l''-\ldots \geqq \tfrac{1}{2}(n+1)(n+2)k+m(n+1)-\tfrac{1}{2}m(m-$$

c'est-à-dire

$$(m-g)(n+1) \leqq \tfrac{1}{2}m(m-1)+g'-l-l'-l''-\ldots.$$

Digitized by Google

Mais le second nombre de cette dernière égalité ou inégalité est un nombre fini et déterminé, tandis que, dans le premier membre, entre comme facteur commun le nombre $n+1$, que peut prendre une grandeur arbitraire. Donc, pour que cette égalité ou inégalité ait lieu quel que soit n, il faut que l'on ait

$$g = m,$$

c'est-à-dire que l'intégrale générale finie sans quadratures partielles doit contenir un nombre de fonctions arbitraires et indépendantes entre elles égal à l'ordre de l'équation aux dérivées partielles à laquelle cette intégrale appartient.

§. 6.

35. Les propriétés générales, exposées ci-dessus, des équations aux dérivées partielles à deux variables indépendantes fournissent les indications qui nous conduiront à la détermination des intégrales correspondantes à des équations différentielles données de cette classe.

Avant tout, occupons-nous de rechercher comment, d'après la forme d'une équation donnée, on peut juger des propriétés des arguments des fonctions arbitraires de l'intégrale générale sans quadratures partielles, si une telle intégrale est possible.

Nous avons vu (§ 5) que, dans l'expression d'une telle intégrale, il doit nécessairement entrer des fonctions arbitraires, entièrement indépendantes entre elles, $\varphi(\alpha)$, $\psi(\beta)$, ..., dont le nombre est égal à l'ordre différentiel de l'équation à intégrer, et dont les arguments $\alpha, \beta, \ldots$ représentent généralement des fonctions, déterminées et différentes entre elles, des variables indépendantes x, y. Mais l'intégrale ne cesse pas d'être générale si les fonctions $\alpha, \beta, \ldots$ sont, en partie ou en totalité, identiques entre elles, ou dépendantes de la seule variable x ou de la seule variable y. Et comme ces circonstances ne doivent pas rester sans influence sur la marche même de l'intégration, il importe beaucoup d'être en état de reconnaître préalablement, d'après la seule forme de l'équation donnée, les propriétés des arguments des fonctions arbitraires de l'intégrale générale finie sans quadratures partielles, en supposant la possibilité d'une telle intégrale.

Digitized by Google

36. A cette fin, imaginons que l'équation

$$\alpha = f(x, y)$$

détermine un des arguments α des fonctions arbitraires de l'intégrale supposée. A l'aide de cette équation, nous pourrons introduire dans l'équation donnée, au lieu des variables indépendantes primitives x et y, les nouvelles variables x et α, ou y et α. En prenant successivement ces deux hypothèses, et différentiant partiellement l'équation précédente d'abord par rapport à x, puis par rapport à y, la seconde variable α étant, dans les deux cas, considérée comme constante, nous aurons

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}, \qquad 0 = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y},$$

d'où

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = -\frac{\alpha'}{\alpha_{,}}, \qquad \frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial x}} = -\frac{\alpha_{,}}{\alpha'},$$

et nous aurons en même temps

$$\frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial y} = 1.$$

Par conséquent, s'il est possible de déterminer différentes fonctions m, n, ... des variables x, y, représentant les valeurs de $\frac{\partial y}{\partial x}$, nous aurons en même temps les valeurs de $\frac{\partial x}{\partial y}$ sous la forme $\frac{1}{m}$, $\frac{1}{n}$, ..., et les valeurs correspondantes des arguments α, β, ... des fonctions arbitraires s'obtiendront par l'intégration d'équations linéaires aux dérivées partielles du premier ordre, de la forme

$$\alpha' + m\alpha_{,} = 0, \quad \beta' + n\beta_{,} = 0, \quad \ldots.$$

De cette manière, la recherche des arguments des fonctions arbitraires se ramène à la recherche des différentes valeurs de $\frac{\partial y}{\partial x}$ correspondantes à ces arguments, valeurs qu'il faut tâcher d'obtenir par le seul moyen de l'équation aux dérivées partielles donnée.

Digitized by Google

37. Supposons que l'équation donnée soit du second ordre, et de la forme générale

$$F(x, y, z, z', z_{,}, z'', z_{,}', z_{,,}) = 0.$$

En prenant x et α pour variables indépendantes, on tirera des équations de l'intégrale générale des expressions, au moyen de ces variables, des fonctions y, z, z', $z_{,}$, z'', ..., par la substitution desquelles on satisfera, non-seulement à l'équation donnée, mais encore à toutes ses dérivées par rapport à x et à y, jusqu'à un ordre quelconque. Si l'on différentie l'équation donnée $n-2$ fois par rapport à y, il veindra

$$\frac{\partial F}{\partial z_{,,}} z_n + \frac{\partial F}{\partial z_{,}'} z'_{n-1} + \frac{\partial F}{\partial z''} z''_{n-2} + R = 0.$$

Ici les dérivées de l'ordre n n'entrent que linéairement, leurs coefficients étant formés au moyen des seules quantités qui entrent dans l'équation donnée, et le terme R contenant outre cela les dérivées de z des ordres inférieurs à n.

38. Nous avons vu, au § 4, que, à partir d'un certain ordre, les dérivées partielles de z, déduites des équations de l'intégrale, doivent nécessairement être hétérogènes à celle-ci par rapport à α. Et comme le nombre n est arbitraire, rien n'empêche d'admettre que les dérivées d'orde n soient hétérogènes à l'intégrale par rapport à α. Cette hypothèse faite, voyons comment nous pourrons satisfaire à l'équation précédente.

Commençons par exprimer z'_{n-1} et z''_{n-2} au moyen de z_n. On a, pour cela, les équations

$$\frac{\partial z_{n-1}}{\partial x} = z'_{n-1} + z_n \frac{\partial y}{\partial x}, \qquad \frac{\partial z'_{n-2}}{\partial x} = z''_{n-2} + z'_{n-1} \frac{\partial y}{\partial x},$$

au moyen desquelles on trouve

$$z'_{n-1} = \frac{\partial z_{n-1}}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial x} z_n, \qquad z''_{n-2} = \frac{\partial z'_{n-2}}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial z_{n-1}}{\partial x} + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 z_n.$$

En substituant ces valeurs de z'_{n-1}, z''_{n-2} dans l'équation considérée, il vient

$$\left.\begin{matrix} \left[\frac{\partial F}{\partial z_{,,}} - \frac{\partial F}{\partial z_{,}'}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z''}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right] z_n \\ + R + \frac{\partial F}{\partial z_{,}'}\frac{\partial z_{n-1}}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z''}\left(\frac{\partial z'_{n-2}}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial z_{n-1}}{\partial x}\right) \end{matrix}\right\} = 0.$$

Digitized by Google

Enfin, en substituant encore ici les expressions que donnent les équations de l'intégrale pour les fonctions y, z, z', $z_{,}$, ... et leurs dérivées partielles par rapport à x, on devra obtenir une identité. Or l'expression de z_n, tirée de la formule

$$z_n = -\frac{\frac{\partial z_{n-1}}{\partial \alpha}}{\frac{\partial y}{\partial \alpha}}$$

est, d'après ce qui précède, hétérogène à l'intégrale, c'est-à-dire contient une fonction arbitraire de α, qui ne se trouve ni dans les équations de l'intégrale, ni dans les expressions des dérivées de z d'un ordre inférieur à n, et par suite ne se trouve pas non plus dans les dérivées partielles de ces dernières et de y par rapport à x; car la différentiation par rapport à x suppose α constant.

Donc, dans l'équation ci-dessus, le terme qui renferme le facteur z_n ne peut se réduire avec les autres termes, et l'équation ne peut se changer en identité que si l'on a

$$\frac{\partial F}{\partial z_{,,}} - \frac{\partial F}{\partial z_{,}'}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z''}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = 0.$$

39. Ainsi voilà l'équation à laquelle doit satisfaire le $\frac{\partial y}{\partial x}$ correspondant à l'argument α; mais comme α n'y entre pas explicitement, en cherchant alors la condition à laquelle devrait satisfaire la valeur de $\frac{\partial y}{\partial x}$ correspondante à l'argument β, on devrait retrouver l'équation précédente. Par conséquent, les racines de cette équation, que nous désignerons par m et n, donneront les deux valeurs de $\frac{\partial y}{\partial x}$, correspondantes aux deux arguments α et β des deux fonctions arbitraires de l'intégrale générale finie sans quadratures partielles de l'équation aux dérivées partielles du second ordre, si cette équation est susceptible d'une telle intégrale.

40. Le résultat que nous venons d'obtenir nous permet d'établir les conclusions suivantes relativement à la nature des arguments α, β, déduite de la forme de l'équation proposée.

1⁰. α et β doivent être généralement des fonctions déterminées de x et de y; car les valeurs correspondantes de $\frac{\partial y}{\partial x}$, représentées par les racines m et n de l'équation précédente, sont exprimées sous

Digitized by Google

forme déterminée au moyen de x, y, et des fonctions $z, z', z_{,,}, z'', z_{,}', z_{,,}$ dépendantes de x et de y.

2°. Si $\frac{\partial F}{\partial z''}$, $\frac{\partial F}{\partial z_{,}'}$, $\frac{\partial F}{\partial z_{,,}}$ s'expriment en fonction de x et de y soit immédiatement, soit après la division par un facteur commun, alors m et n seront des fonctions des mêmes quantités. Par conséquent, α et β pourront se déterminer en intégrant les équations

$$\alpha' + m\alpha_{,} = 0, \qquad \beta' + n\beta_{,} = 0.$$

3°. Si $m = n$, c'est-à-dire, si l'on a

$$\left(\frac{\partial F}{\partial z_{,}'}\right)^2 = 4\frac{\partial F}{\partial z''}\frac{\partial F}{\partial z_{,,}},$$

alors $\alpha = \beta$; par suite, l'intégrale générale cherchée devra contenir deux fonctions arbitraires différentes du même argument.

4°. Si $m = 0$, c'est-à-dire, si $\frac{\partial F}{\partial z_{,,}} = 0$, l'équation qui détermine α prendra la forme $\alpha' = 0$; donc $\alpha =$ une fonction arbitraire de y Par conséquent, lorsque l'équation à intégrer ne contient pas $z_{,,}$, alors, dans l'intégrale cherchée, une des fonctions arbitraires dépendra de la seule variable y.

5°. Si $m = \infty$, c'est-à-dire, si $\frac{\partial F}{\partial z''} = 0$, l'équation qui détermine α prendra la forme $\alpha_{,} = 0$; donc $\alpha =$ une fonction arbitraire de x. Par conséquent, lorsque l'équation à intégrer ne contient pas z'', alors, dans l'intégrale cherchée, une des fonctions arbitraires dépendra de la seule variable x.

6°. Si $m = 0$, $n = \infty$, c'est-à-dire, si $\frac{\partial F}{\partial z_{,,}} = 0$ et $\frac{\partial F}{\partial z''} = 0$, les équations qui déterminent α et β prendront la forme $\alpha' = 0$ et $\beta_{,} = 0$; donc $\alpha =$ une fonction arbitraire de y, et $\beta =$ une fonction arbitraire de x. Par conséquent, lorsque, dans l'équation à intégrer il n'entre pas d'autre dérivée du second ordre que $z_{,}'$, alors dans l'intégrale cherchée une des fonctions arbitraires dépendra de la seule variable x, l'autre de la seule variable y.

7°. Si $m = 0$, $n = 0$, c'est-à-dire, si $\frac{\partial F}{\partial z_{,,}} = 0$ et $\frac{\partial F}{\partial z_{,}'} = 0$, les équations qui déterminent α et β prendront la forme $\alpha' = 0$ et $\beta' = 0$; donc α et β seront des fonctions arbitraires de la seule variable y. Par conséquent, lorsque dans l'équation à intégrer il

Digitized by Google

n'entre pas d'autre dérivée du second ordre que z'', alors dans l'intégrale cherchée les deux fonctions arbitraires dépendront de la seule variable y.

8⁰. Si $m=\infty$, $n=\infty$, c'est-à-dire, si $\frac{\partial F}{\partial z''}=0$ et $\frac{\partial F}{\partial z_{\prime}'}=0$, les équations qui déterminent α et β prendront la forme $\alpha_{\prime}=0$ et $\beta_{\prime}=0$; donc α et β seront des fonctions arbitraires de la seule variable x. Par conséquent, lorsque dans l'équation à intégrer il n'entre pas d'autre dérivée du second ordre que $z_{\prime\prime}$, alors dans l'intégrale cherchée les deux fonctions arbitraires dépendront de la seule variable x.

41. **Remarque.** Il faut encore observer que l'intégrale générale finie sans quadratures partielles n'est possible, dans les deux derniers cas (7^0 et 8^0), qu'à la condition suivante: savoir, lorsque, l'équation donnée ne contenant pas d'autre dérivée du second ordre que z'', la dérivée du premier ordre $z_{\prime}$ n'y entre pas; ou lorsque, l'équation donnée ne contenant pas d'autre dérivée du second ordre que $z_{\prime\prime}$, la dérivée z' n'y entre pas.

En effet, les équations qui ne satisfont pas à cette condition peuvent, sans diminuer la généralité, se mettre sous l'une des formes

$$z_{\prime}=F(x,\ y,\ z,\ z',\ z''),$$

$$z'=F(x,\ y,\ z,\ z_{\prime},\ z_{\prime\prime}),$$

en supposant la première résolue par rapport à $z_{\prime}$, la seconde par rapport à z'.

Examinons maintenant s'il est possible d'admettre, par exemple, que la première de ces équations ait une intégrale générale finie sans quadratures partielles. Les deux fonctions arbitraires d'une telle intégrale devraient, d'après ce qui précède, dépendre de la seule variable y. Donc α doit être une fonction de y et réciproquement $y=f(\alpha)$. En introduisant, à l'aide de cette dernière relation, la variable α au lieu de y, on trouve, en vertu de la Remarque du § 4, n⁰ 31, que les expressions de z' et de z'', tirées des équations de l'intégrale, doivent être homogènes à l'intégrale par rapport à α, tandis que l'expression

$$z_{\prime}=\frac{\frac{\partial z}{\partial \alpha}}{f'(\alpha)}$$

lui est nécessairement hétérogène par rapport à α. Donc, par la substitution de ces expressions dans l'équation considérée, il n'est pas possible de transformer cette équation en identité, puisque le

premier membre devrait renfermer une fonction arbitraire de α, qui ne peut se trouver dans le second membre.

En échangeant entre elles les lettres y et x, on pourra démontrer, absolument de la même manière, la proposition analogue relativement à l'équation

$$z' = F(x, y, z, z_{,}, z_{,,}).$$

42. La méthode que nous venons d'exposer pour l'étude des arguments des fonctions arbitraires de l'intégrale, s'applique sans difficulté aux équations aux dérivées partielles d'ordre quelconque. Si l'on fait attention à l'uniformité des procédés employés dans cette étude, il suffira d'indiquer brièvement cette généralisation pour l'équation du troisième ordre.

Soit

$$F(x, y, z, z', z_{,}, z'', z_{,}', z_{,,}, z''', z_{,}'', z_{,,}', z_{,,,}) = 0$$

l'équation donnée. En la différentiant $n-3$ fois par rapport à y, il vient

$$\frac{\partial F}{\partial z_{,,,}} z_n + \frac{\partial F}{\partial z'_{,,}} z'_{n-1} + \frac{\partial F}{\partial z_{,}''} z''_{n-2} + \frac{\partial F}{\partial z'''} z'''_{n-3} + R = 0.$$

Ici les dérivées de l'ordre n n'entrent que linéairement, leurs coefficients étant formés avec des quantités qui se trouvent dans l'équation donnée, et le terme R contenant, en outre, les dérivées de z des ordres inférieurs à n.

Imaginons maintenant que l'un des arguments des fonctions arbitraires de l'intégrale supposée soit $\alpha = f(x, y)$, et introduisons comme variables indépendantes x et α, au lieu de x et de y. Nous aurons ainsi les équations

$$\frac{\partial z_{n-1}}{\partial x} = z'_{n-1} + z_n \frac{\partial y}{\partial x},$$

$$\frac{\partial z'_{n-2}}{\partial x} = z''_{n-2} + z'_{n-1} \frac{\partial y}{\partial x},$$

$$\frac{\partial z''_{n-3}}{\partial x} = z'''_{n-3} + z''_{n-2} \frac{\partial y}{\partial x},$$

d'où l'on tire

Digitized by Google

$$z'_{n-1} = \frac{\partial z_{n-1}}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial x} z_n.$$

$$z''_{n-2} = \frac{\partial z'_{n-2}}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial z_{n-1}}{\partial x} + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 z_n,$$

$$z'''_{n-3} = \frac{\partial z''_{n-3}}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial z'_{n-2}}{\partial x} + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial z_{n-1}}{\partial x} - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^3 z_n.$$

En substituant ces valeurs de z'_{n-1}, z''_{n-2}, z'''_{n-3}, l'équation précédente prend la forme

$$\left.\begin{aligned}&\left[\frac{\partial F}{\partial z_{\prime\prime\prime}} - \frac{\partial F}{\partial z_{\prime\prime}'}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z_{\prime}''}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 - \frac{\partial F}{\partial z'''}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^3\right] z_n \\ &+ R + \frac{\partial F}{\partial z_{\prime\prime}'}\frac{\partial z_{n-1}}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z_{\prime}''}\left(\frac{\partial z'_{n-2}}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial z_{n-1}}{\partial x}\right) \\ &+ \frac{\partial F}{\partial z'''}\left[\frac{\partial z''_{n-3}}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial z'_{n-2}}{\partial x} + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\frac{\partial z_{n-1}}{\partial x}\right]\end{aligned}\right\} = 0.$$

Puisque le nombre n est arbitraire, on peut toujours le supposer tel, que les expressions des dérivées de z de l'ordre n soient hétérogènes à l'intégrale par rapport à α. Dans ce cas, en substituant dans l'équation précédente les expressions des fonctions y, z et des dérivées partielles de z, tirées des équations de l'intégrale, on ne pourra y satisfaire que si l'on a l'équation, du troisième degré par rapport à $\frac{\partial y}{\partial x}$,

$$\frac{\partial F}{\partial z_{\prime\prime\prime}} - \frac{\partial F}{\partial z_{\prime\prime}'}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z_{\prime}''}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 - \frac{\partial F}{\partial z'''}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^3 = 0,$$

dont les racines m, n, p sont liées aux arguments α, β, γ de l'intégrale par les équations

$$\alpha' + m\alpha_{\prime} = 0, \quad \beta' + n\beta_{\prime} = 0, \quad \gamma' + p\gamma_{\prime} = 0.$$

En conséquence, toutes les questions relatives à la forme des arguments pourront être résolues comme dans le cas précédent.

Digitized by Google

Chapitre II.

Intégration des formes les plus simples d'équations aux dérivées partielles du second ordre d'une fonction de deux variables indépendantes.

§ 7.

43. Les formes de la classe d'équations différentielles considérée sont caractérisées principalement par la forme des arguments α, β des fonctions arbitraires renfermées dans les intégrales générales de ces équations. D'après cela, voulant nous occuper d'abord des équations les plus simples, auxquelles se ramèneront ensuite les équations de forme plus compliquée, nous commencerons par les hypothèses les plus simples relativement à la forme des arguments α et β. Il est évident que le cas où ces deux arguments sont égaux, et s'expriment au moyen d'une seule des variables indépendantes x ou y, correspond à l'hypothèse la plus simple.

Si, par exemple, $\alpha = \beta = y$, alors l'équation différentielle correspondante ne peut admettre une intégrale générale de forme finie (§ 6, art. 40 et 41) que dans le cas seulement où l'équation ne contient pas d'autre dérivée du second ordre que z'', ni d'autre dérivée du premier ordre que z'; c'est-à-dire dans le cas seulement où l'équation est de la forme générale

$$F(x, y, z, z', z'') = 0.$$

Dans ce cas, du reste, il est aisé de s'en convaincre immédiatement, en se représentant le passage de l'intégrale générale, qui contient deux fonctions arbitraires de y, à l'équation différentielle correspondante, aux dérivées partielles du second ordre, moyennant l'élimination des fonctions arbitraires. Comme, dans le calcul des dérivées z' et z'', la quantité y est considérée comme constante, on peut aussi se maintenir à ce point de vue dans l'intégration de l'équation en question. De cette manière, on aura une équation aux différentielles ordinaires entre les variables x et z, et, en l'intégrant, on aura son intégrale générale avec deux constantes arbitraires distinctes. Or ces dernières doivent être constantes seulement par rapport à x; par suite, elles peuvent être considérées comme deux fonctions arbitraires distinctes de y, et nous aurons ainsi l'intégrale générale de l'équation proposée.

Digitized by Google

Pour une équation différentielle ordinaire du second ordre, i existe toujours deux intégrales intermédiaires du premier ordre, con tenant chacune une seule constante arbitraire. Par conséquent, e changeant ces constantes en fonctions arbitraires de y, on aura tou jours des intégrales générales intermédiaires du premier ordre pou l'équation proposée.

44. Généralement, les équations qui admettent une intégral générale dans laquelle $\alpha = \beta$ peuvent se ramener, par une transfor mation convenable, à la forme plus simple que nous venons de con sidérer. Pour cela, il ne faut qu'introduire dans l'équation proposé comme variables indépendantes, α et x, ou bien α et y, à la plac de x et de y. Nous exposerons plus loin (Chap. IV) les procédé généraux pour faire cette transformation dans le cas où l'on pe obtenir, au moyen de l'équation donnée, l'expression de α en fonctio de x, y, z, z', $z_{,}$; nous nous bornerons présentement au cas moin général où, à l'aide de l'équation donnée, on peut former l'expressio de l'argument α en fonction de x et de y.

45. Supposons que l'équation donnée soit de la forme général

$$F(x, y, z, z', z_{,}, \zeta) = 0,$$

où

$$\zeta = Rz'' + 2Sz_{,}' + Tz_{,,},$$

R, S, T désignant des fonctions données de x et de y.

En vertu de ce qui a été démontré plus haut (§ 6, art. 40), les arguments α, β de l'intégrale générale de l'équation donnée ne pourront être égaux que sous la condition

$$\left(\frac{\partial F}{\partial z_{,}'}\right)^2 - 4\frac{\partial F}{\partial z''}\frac{\partial F}{\partial z_{,,}} = 0.$$

Or on a

$$\frac{\partial F}{\partial z''} = R\frac{\partial F}{\partial \zeta}, \quad \frac{\partial F}{\partial z_{,}'} = 2S\frac{\partial F}{\partial \zeta}, \quad \frac{\partial F}{\partial z_{,,}} = T\frac{\partial F}{\partial \zeta};$$

par suite, la condition précédente prendra la forme

$$4\left(\frac{\partial F}{\partial \zeta}\right)^2 (S^2 - RT) = 0,$$

et comme le facteur $\frac{\partial F}{\partial \zeta}$ ne saurait être nul, il faudra que l'on ait

$$S^2 - RT = 0.$$

Digitized by Google

En supposant cette dernière condition satisfaite, on aura

$$\zeta = R(z'' + 2mz_{,}' + m^2 z_{,,}),$$

en posant, pour abréger,

$$m = \frac{S}{R}.$$

Pour déterminer l'argument α, on a (art. 36) l'équation aux dérivées partielles du premier ordre

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} + m \frac{\partial \alpha}{\partial y} = 0,$$

d'où l'on tire, en désignant par μ le facteur d'intégration,

$$\alpha = \int \mu (dy - m dx) = f(x, y).$$

A l'aide de la relation entre x, y, α, exprimée par cette dernière équation, on peut maintenant introduire, comme variables indépendantes, α et x au lieu de x et de y. En considérant ainsi les deux systèmes de variables indépendantes, il faut se rappeler la convention établie plus haut (art. 2), et d'après laquelle les dérivées partielles d'une fonction quelconque par rapport à x et à y sont désignées par des accents placés à droite de la fonction, en haut ou en bas, tandis que, pour représenter les dérivées partielles par rapport à x et à α, on emploie la notation habituelle.

D'après cela, on a

$$z' = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial y}, \qquad z_{,} = \frac{\partial z}{\partial \alpha}\cdot\frac{\partial \alpha}{\partial y}$$

par suite,

$$z' + mz_{,} = \frac{\partial z}{\partial x}.$$

On trouve de même

$$(z' + mz_{,})' + m(z' + mz_{,})_{,} = \frac{\partial (z' + mz_{,})}{\partial x},$$

ou

$$z'' + 2mz_{,}' + m^2 z_{,,} + (m' + mm_{,}) z_{,} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$$

On tire de ces équations

$$\zeta = R(z'' + 2mz_{,}' + m^2 z_{,,}) = R\left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - (m' + mm_{,}) z_{,}\right],$$

Digitized by Google

et

$$z' = \frac{\partial z}{\partial x} - m z_{,}.$$

Par conséquent, si l'équation donnée admet une intégrale gé
rale de forme finie, avec deux fonctions arbitraires de l'argum
$\alpha = f(x, y)$; alors, en y substituant les valeurs précédentes de ζ
de z', il faudra encore que $z_{,}$ s'élimine aussi d'elle-même, par s
des réductions. Or, dans ce cas, en considérant au lieu de ζ et de
leurs expressions ci-dessus, et différentiant partiellement le pre
membre de l'équation proposée par rapport à $z_{,}$, on devra obt
un résultat identiquement nul. Donc les deux égalités

$$\frac{\partial F}{\partial \zeta} R(m' + m m_{,}) + \frac{\partial F}{\partial z'} m - \frac{\partial F}{\partial z_{,}} = 0, \qquad S^2 - RT = 0$$

seront des conditions nécessaires et suffisantes, et, lorsqu'elles ser
remplies, l'intégration de l'équation aux dérivées partielles considé
se ramènera à l'intégration d'une équation aux différentielles o
naires du second ordre.

Il est clair qu'en échangeant les rôles de x et de y, et pos
pour abréger,

$$n = \frac{S}{T},$$

on obtiendra les deux conditions, analogues aux précédentes,

$$\frac{\partial F}{\partial \zeta} T(n_{,} + n n') + \frac{\partial F}{\partial z_{,}} n - \frac{\partial F}{\partial z'} = 0, \qquad S^2 - RT = 0.$$

46. Eclaircissons ce qui précède par un exemple simple. P
nons l'équation

$$f[\zeta + (1 + x + y) z_{,}] + x\zeta + (x^2 + xy - y) z_{,} - z' = 0,$$

dans laquelle on a

$$\zeta = z'' + 2(x+y) z_{,}' + (x+y)^2 z_{,,},$$

et où f désigne une fonction donnée quelconque. Nous aurons ici

$$m = x + y, \qquad \alpha = \int e^{-x}[dy - (x+y)\,dx] = \frac{1 + x + y}{e^x}.$$

En introduisant x et α comme variables indépendantes, au li
de x et y, il vient

$$z' = \frac{\partial z}{\partial x} - (x+y) z_{,}, \qquad \zeta = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - (1 + x + y) z_{,}.$$

Digitized by Google

Par la substitution de ces valeurs de z' et de ζ dans l'équation proposée, on en élimine en même temps $z_{,}$, et l'on ramène l'équation à la forme

$$f\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)+x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial z}{\partial x}=0,$$

équation aux différentielles ordinaires du second ordre, qui s'intègre par la règle de Clairaut. Si nous introduisons dans l'intégrale complète de cette équation deux fonctions arbitraires différentes de α, à la place des constantes arbitraires, nous obtiendrons l'intégrale générale de l'équation donnée sous la forme

$$z=\frac{x^2}{2}\varphi\left(\frac{1+x+y}{e^x}\right)+xf\left[\varphi\left(\frac{1+x+y}{e^x}\right)\right]+\psi\left(\frac{1+x+y}{e^x}\right).$$

Il est facile de vérifier que, dans cet exemple la première des deux formes de conditions d'intégrabilité (art. 45) est satisfaite.

47. Si l'équation proposée est de la forme particulière

$$Rz''+2Sz_{,}'+Tz_{,,}+U=0,$$

U représentant une fonction donnée de x, y, z, z', $z_{,}$, les conditions d'intégrabilité, d'après la méthode précédente, seront

$$S^2-RT=0, \qquad R(m'+mm_{,})+\frac{\partial U}{\partial z'}m-\frac{\partial U}{\partial z_{,}}=0,$$

ou

$$S^2-RT=0, \qquad T(n_{,}+nn')+\frac{\partial U}{\partial z_{,}}n-\frac{\partial U}{\partial z'}=0.$$

Si dans cette équation on pose

$$U=Qz_{,}+Pz'+Nz-M,$$

M, N, P, Q désignant des fonctions données de x et de y, elle se changera dans l'équation linéaire

$$Rz''+2Sz_{,}'+Tz_{,,}+Qz_{,}+Pz'+Nz=M,$$

et l'on aura pour les conditions d'intégrabilité, d'après la méthode précédente,

$$S^2-RT=0, \qquad R(m'+mm_{,})+Pm-Q=0,$$

ou

$$S^2-RT=0, \qquad T(n_{,}+nn')+Qn-P=0.$$

48. Remarquons encore que, si nous adoptons les notations symboliques ∇ et $\nabla_{,}$, définies par les égalités

Digitized by Google

$$\nabla v = v' + m v_{,}, \quad \nabla^2 v = \nabla \nabla v = (v' + m v_{,})' + m(v' + m v_{,})_{,},$$

$$\nabla_{,} v = v_{,} + n v', \quad \nabla_{,}^2 v = \nabla_{,} \nabla_{,} v = (v_{,} + n v')_{,} + n(v_{,} + n v')',$$

nous aurons

$$\nabla z = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad \nabla^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},$$

$$\nabla_{,} z = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad \nabla_{,}^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Par conséquent, les équations aux dérivées partielles du second ordre de la forme générale

$$F(x, y, z, \nabla z, \nabla^2 z) = 0, \quad \text{ou} \quad F(x, y, z, \nabla_{,} z, \nabla_{,}^2 z) = 0$$

s'intégreront par la méthode précédente; et réciproquement, les équations qui s'intègrent par cette méthode (c'est-à-dire, qui satisfont aux conditions d'intégrabilité données ci-dessus) se ramèneront à l'une des formes symboliques précédentes.

§ 8.

49. Après les équations considérées dans le § précédent, celles dont la forme est la plus simple sont celles qui correspondent à l'hypothèse que l'un des arguments des fonctions arbitraires de leur intégrale générale est égal à x, et l'autre à y. Dans ce cas, comme on l'a vu (art. 40, 6°), l'équation différentielle ne peut contenir d'autre dérivée du second ordre que $z_{,}'$, et par suite elle est de la forme générale

$$F(x, y, z, z', z_{,}, z_{,}') = 0.$$

La théorie de l'intégration des équations de cette forme présente une importance spéciale, parce que toutes les équations de la classe que nous étudions doivent évidemment s'y ramener, dès que l'on y introduit comme variables indépendantes les arguments des fonctions arbitraires des intégrales générales qui leur appartiennent.

50. Ampère a établi, comme il suit, les condttions nécessaires et suffisantes pour que l'équation précédente puisse admettre une intégrale du premier ordre avec une seule fonction arbitraire de y ou de x.

Supposons que l'équation

$$f[x, y, z, \varphi(x), \psi(y)] = 0,$$

Digitized by Google

où φ et ψ désignent des fonctions arbitraires, représente l'intégrale générale. En la différentiant par rapport à y, et éliminant $\varphi(x)$ entre l'équation ainsi obtenue et l'équation proposée, on aura un résultat de la forme

$$f_{\prime}[x, y, z, z_{\prime}, \psi(y), \psi'(y)] = 0.$$

Cette dernière équation ne peut évidemment représenter l'intégrale générale du premier ordre, que s'il est possible d'éliminer toutes les fonctions arbitraires entre cette équation et celle que l'on obtient en la différentiant par rapport à x.

Pour cela, il faut que, dans la dernière équation, $\psi(y)$ et $\psi'(y)$ n'entrent que dans un groupe séparé, de la forme

$$\Psi[y, \psi(y), \psi'(y)];$$

alors la fonction arbitraire de y, représentée par ce groupe, se reproduira sans altération dans l'équation provenant de la différentiation de la précédente par rapport à x, et par conséquent elle pouvra être éliminée entre ces deux équations. Comme le résultat d'une telle élimination peut toujours se mettre sous la forme d'une équation linéaire par rapport à $z_{\prime}'$ et à z', telle que

$$Gz_{\prime}' + Hz' + K = 0,$$

G, H, K pouvant en général contenir x, y, z, $z_{\prime}$, cette forme de l'équation différentielle sera aussi une des conditions de la possibilité de son intégrale générale du premier ordre avec une seule fonction arbitraire de y.

51. La condition obtenue, bien que nécessaire, n'est pas suffisante. En effet, en remarquant que l'on a

$$z_{\prime}' = \frac{\partial z_{\prime}}{\partial x}, \qquad z' = \frac{\partial z}{\partial x},$$

et multipliant l'équation précédente par ∂x, il vient

$$G\partial z_{\prime} + H\partial z + K\partial x = 0.$$

Dans cette équation linéaire par rapport aux différentielles des trois variables $z_{\prime}$, z, x, on peut considérer y comme constante. Elle admet, comme on sait, une intégrale avec une constante arbitraire (laquelle peut être remplacée par une fonction arbitraire de y), dans le cas seulement où la condition d'Euler,

Digitized by Google

$$\text{(E)}\qquad G\left(\frac{\partial H}{\partial x}-\frac{\partial K}{\partial z}\right)+H\left(\frac{\partial K}{\partial z_{,}}-\frac{\partial G}{\partial x}\right)+K\left(\frac{\partial G}{\partial z}-\frac{\partial H}{\partial z_{,}}\right)=0,$$

est satisfaite.

Ainsi l'existence de cette dernière égalité, avec la forme lin de l'équation proposée par rapport à $z_{,}'$ et à z', constituent les ditions nécessaires et suffisantes pour que cette dernière équatio une intégrale générale du premier ordre avec une fonction arbi de x.

On trouvera absolument de même les conditions de l'exist d'une intégrale générale du premier ordre avec une fonction traire de x.

52. Il est aisé, par exemple, de faire voir de cette manière l'équation

$$(x+yz)z_{,}'-yz_{,}z'+\frac{y(z-1)}{x+y}z_{,}=0$$

ne peut avoir d'intégrale du premier ordre avec une fonction traire de x, mais peut en avoir une avec une fonction arbitrair y. Pour obtenir celle-ci, multiplions les deux premiers terme premier membre de l'équation proposée par ∂x, ce qui donnera

$$(x+yz)\partial z_{,}-yz_{,}\partial z.$$

En considérant, dans cette expression différentielle binôme, $z_{,}$ z comme seules variables, multipliant l'expression par $-\frac{1}{z_{,}^{2}}$ intégrant, on trouve

$$\int\frac{yz_{,}\partial z-(x+yz)\,\partial z_{,}}{z_{,}^{2}}=\frac{x+yz}{z_{,}}.$$

Introduisons maintenant, au lieu de la variable dépendante mitive z, une nouvelle variable u, en posant

$$u=\frac{x+yz}{z_{,}}.$$

On en tire, en différentiant par rapport à x,

$$u'=\frac{z_{,}(1+yz')-(x+yz)z_{,}'}{z_{,}^{2}}.$$

En ajoutant cette dernière équation à la proposée multipliée $\frac{1}{z_{,}^{2}}$, on aura

Digitized by Google

$$u' = \frac{x+yz}{(x+y)z_{,}},$$

l

$$u' - \frac{u}{x+y} = 0.$$

On obtient ainsi une équation du premier ordre, et, comme il y entre pas de dérivée par rapport à y, en l'intégrant comme une uation ordinaire à deux variables x et u, et remplaçant la conante arbitraire de l'intégrale par une fonction arbitraire de y, il ent

$$\frac{u}{x+y} = \psi(y).$$

n substituant à u sa valeur dans cette équation, on obtient l'intérale du premier ordre de l'équation proposée, sous la forme

$$z_{,} = \frac{y}{(x+y)\psi(y)} \cdot z + \frac{x}{(x+y)\psi(y)}.$$

Dans cette équation du premier ordre, il n'entre pas de dérivée ar rapport à x; en l'intégrant donc comme une équation différenelle ordinaire entre les deux variables y et z, et remplaçant la nstante arbitraire de l'intégrale par une fonction arbitraire de x, n trouve, pour l'intégrale primitive générale de l'équation proposée,

$$z = e^{\int \frac{y}{x+y} \cdot \frac{dy}{\psi(y)}} \cdot \left[\varphi(x) + x \int e^{-\int \frac{y}{x+y} \cdot \frac{dy}{\psi(y)}} \cdot \frac{dy}{(x+y)\psi(y)}\right].$$

53. Si l'on a

$$G = 1, \quad H = P, \quad K = Qz_{,} + Nz - M,$$

M, N, P, Q désignant des fonctions données de x et de y, l'équation onsidérée sera linéaire par rapport à z, z', $z_{,}$, $z_{,}'$, et de la forme

$$z_{,}' + Qz_{,} + Pz' + Nz = M,$$

t les conditions pour qu'elle puisse avoir une intégrale générale du remier ordre avec des fonctions arbitraires de x seule ou de y seule, 'exprimeront respectivement par les égalités

$$\frac{\partial P}{\partial x} - N + PQ = 0, \qquad \frac{\partial Q}{\partial y} - N + PQ = 0.$$

es conditions ont été encore démontrées par **Euler** (**Instit. Calc.** ntegr. t. III).

Digitized by Google

En effet, l'équation donnée peut s'écrire sous les deux for[mes] suivantes,

$$\frac{\partial(z_{,}+Pz)}{\partial x}+Q(z_{,}+Pz)+\left(N-PQ-\frac{\partial P}{\partial x}\right)z=0,$$

$$\frac{\partial(z'+Qz)}{\partial y}+P(z'+Qz)+\left(N-PQ-\frac{\partial Q}{\partial y}\right)z=0;$$

et, si l'une des conditions précédentes est remplie, alors, en int[ro]duisant au lieu de la variable primitive z, dans le premier cas[, la] variable

$$u=z_{,}+Pz,$$

et dans le second, la variable

$$v=z'+Qz,$$

on réduira l'équation proposée à l'une des deux suivantes

$$u'+Qu=M,\qquad v_{,}+Pv=M,$$

lesquelles fournissent des intégrales générales du premier or[dre, à] savoir, la première une intégrale avec une fonction arbitraire d[e y,] la seconde une intégrale avec une fonction arbitraire de x.

§ 9.

54. Les paroles suivantes d'Ampère, complétement vra[ies] encore à l'époque actuelle, caractérisent l'importance et le degré [de] développement de la théorie de l'intégration des équations que n[ous] avons commencé à considérer dans le paragraphe précédent:

„Les équations aux différentielles partielles du second ordre [qui] ne contiennent que la dérivée $z_{,}'$ de cet ordre, doivent être exa[mi]nées avec d'autant plus de soin, que c'est souvent en y ramenant [d']autres équations aux différentielles partielles du second ordre qu['on] parvient à les intégrer. L'intégration générale des équations co[m]prises dans la forme

$$\mathrm{F}(x,\,y,\,z,\,z',\,z_{,},\,z_{,}')=0$$

peut être regardée comme la première question à résoudre p[our] arriver à celle de toutes les équations du second ordre. Mais [ce] problème paraît devoir échapper encore longtemps aux méthodes [de] l'Analyse actuelle; on ne sait encore intégrer ces équations que d[ans] le cas dont nous venons de parler [sous la condition (E), art. 5

où elles ont une intégrale intermédiaire, et dans le cas des équations linéaires intégrées par M. de Laplace (*)."

A en juger d'après ces considérations, chaque progrès realisé, dans le dévéloppement et la généralisation des méthodes d'intégration des équations de la forme considérée, doit avoir une importance pour la théorie tout entière des équations aux dérivées partielles du second ordre.

55. La méthode de Laplace, mentionnée par Ampère, consiste à ramener, moyennant un changement convenable de la variable dépendante, l'intégration d'une équation linéaire

$$z_{\prime}' + Qz_{\prime} + Pz' + Nz = M,$$

qui ne satisfait à aucune des deux conditions d'intégrabilité

$$\frac{\partial P}{\partial x} - N + PQ = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial y} - N + PQ = 0,$$

à l'intégration d'une équation de la même forme générale.

Si l'équation transformée ne satisfait pas non plus aux conditions d'intégrabilité, on peut lui appliquer à son tour le même mode de transformation. En continuant de cette manière, ou l'on parviendra à une équation linéaire satisfaisant aux conditions d'intégrabilité, et au moyen de son intégrale on exprimera celle de l'équation proposée; ou bien on s'assurera de l'impossibilité d'intégrer cette dernière équation sous forme finie.

Par conséquent, cette méthode est fondée sur la possibilité d'exprimer l'intégrale de l'équation proposée au moyen de l'intégrale d'une autre équation de même forme générale, mais satisfaisant à des conditions déterminées, auxquelles la proposée ne satisfait pas. Mais on peut faire voir que ce procédé s'applique non-seulement aux équations linéaires auxquelles Laplace s'est restreint, mais encore aux équations de la forme plus générale

(a) $$Gz_{\prime}' + Hz' + K = 0,$$

où G, H, K sont exprimés en fonction de x, y, z, $z_{\prime}$. Après avoir établi cette généralisation, nous en tirerons la méthode de Laplace comme cas particulier.

56. Procédons à l'intégration de l'équation précédente comme il a été indiqué ci-dessus (art. 51). Multiplions les deux premiers ter-

---

(*) Journal de l'Ec. Polyt., XVIII$_e$ Cahier, p. 43.

Digitized by Google

mes de son premier membre par ∂x, ce qui donne l'expression diff rentielle

$$G\partial z_{,}+H\partial z;$$

en considérant, dans celle-ci, $z_{,}$ et z comme seules variables, déte minons le facteur d'intégration μ, puis intégrons. On trouve ain l'égalité

$$\int\mu(G\partial z_{,}+H\partial z)=\mathrm{F}(x,\ y,\ z,\ z_{,}),$$

dont le second membre est la valeur de l'intégrale du premi Introduisons maintenant, au lieu de z, la nouvelle variable dépe dante u, en posant

$$u=\mathrm{F}(x,\ y,\ z,\ z_{,}).$$

La différentiation de cette équation par rapport à x donne

$$u'=\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z_{,}}z_{,}'+\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z}z'+\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x}=\mu(Gz_{,}'+Hz')+\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x}.$$

Par suite, en multipliant l'équation proposée par μ, et la retranch de la précédente, on a

$$u'=\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x}-\mu K.$$

Le second membre de cette dernière équation s'exprime d'une m nière déterminée au moyen de x, y, z, $z_{,}$; on peut donc poser, po simplifier,

$$u'=\mathrm{F}_1(x,\ y,\ z,\ z_{,}).$$

Si les fonctions F et F_1 ne sont pas distinctes entre elles p rapport à z et à $z_{,}$, c'est-à-dire si, en éliminant entre les équatio

$$u=\mathrm{F}(x,\ y,\ z,\ z_{,}),\qquad u'=\mathrm{F}_1(x,\ y,\ z,\ z_{,})$$

une des quantités z, $z_{,}$, on élimine en même temps l'autre, on obti alors une équation entre x, y, u, u', d'où l'on tire, comme nous l'av ons vu plus haut (§ 8), une intégrale générale du premier or avec une fonction arbitraire de y. Mais dans ce cas, comme on s ... doit avoir l'identité

$$\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z}\frac{\partial \mathrm{F}_1}{\partial z_{,}}-\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z_{,}}\frac{\partial \mathrm{F}_1}{\partial z}=0,$$

laquelle est aussi la condition d'existence de l'intégrale du prem ... en question, et doit être équivalente à la condition donnée p ...

Digitized by Google

$$G\left(\frac{\partial H}{\partial x}-\frac{\partial K}{\partial z}\right)+H\left(\frac{\partial K}{\partial z_{,}}-\frac{\partial G}{\partial x}\right)+K\left(\frac{\partial G}{\partial z}-\frac{\partial H}{\partial z_{,}}\right)=0.$$

...en effet, il est aisé de vérifier que cette dernière condition découle ...la première (*).

57. Nous sommes maintenant arrivés à la question qui fait ...objet de cette étude: **Comment faut-il procéder, quand les ...onditions précédentes ne sont pas remplies?**

Remarquons que les équations

$$u = \mathrm{F}(x,\ y,\ z,\ z_{,}), \qquad u' = \mathrm{F}_1(x,\ y,\ z,\ z_{,})$$

...euvent être considérées comme équivalentes à l'équation proposée. ...n effet, si l'on substitue dans la seconde la valeur de u tirée de la ...remière, on obtient l'équation donnée. En résolvant les équations ...récédentes algébriquement par rapport à z et à $z_{,}$, on obtient deux ...tres équations de la forme

$$z = f(x,\ y,\ u,\ u'), \qquad z_{,} = f_1(x,\ y,\ u,\ u'),$$

...uivalentes à celles d'où on les a tirées, et, par suite, à l'équation ...roposée. Si donc on porte dans l'équation proposée les valeurs ...récédentes de z, $z_{,}$, et les valeurs de z', $z_{,}'$ obtenues en différen...ant les équations précédentes par rapport à x, on obtient nécessai...ment une identité pour toute valeur de u. Or la fonction u doit ...re déterminée de telle sorte qu'entre les valeurs $z = f$ et $z_{,} = f_1$ il ...'y ait pas incompatibilité, ce qui exige que la dérivée de f par rapport ...y soit égale à f_1. En exprimant cette condition, on a l'équation

$$\frac{\partial f}{\partial u'}u_{,}' + \frac{\partial f}{\partial u}u_{,} + \frac{\partial f}{\partial y} - f_1(x,\ y,\ u,\ u') = 0;$$

...déterminant l'intégrale de celle-ci, et substituant la valeur de cette ...tégrale dans le second membre de l'équation

$$z = f(x,\ y,\ u,\ u'),$$

...obtiendra l'intégrale de l'équation proposée.

58. Mais il est facile de démontrer que l'équation ($a_{,}$), consi...rée comme linéaire par rapport à $u_{,}'$, et à $u_{,}$, ne doit pas avoir ...intégrale du premier ordre avec une fonction arbitraire de x. En ...fet, en multipliant les deux premiers termes de son premier membre ...r ∂y, et intégrant, il vient

(*) Voir, par exemple, Boole, Treatise on Differential Equations, p. 271.

$$\int\left(\frac{\partial f}{\partial u'}\partial u'+\frac{\partial f}{\partial u}\partial u\right)=f(x,\,y,\,u,\,u')=v.$$

En différentiant la valeur de v par rapport à y, on trouve

$$v_{,}=\frac{\partial f}{\partial u'}u_{,}'+\frac{\partial f}{\partial u}u_{,}+\frac{\partial f}{\partial y},$$

et en retranchant de là l'équation (a,), on a

$$v_{,}=f_1(x,\,y,\,u,\,u').$$

Ici les fonctions f et f_1 sont évidemment les mêmes que nous avi plus haut.

L'équation (a,) pourrait avoir une intégrale du premier ord avec une fonction arbitraire de x, si l'expression

$$\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial f_1}{\partial u'}-\frac{\partial f}{\partial u'}\frac{\partial f_1}{\partial u}$$

était identiquement égale à zéro. Mais, en vertu d'un théorè connu sur les déterminants fonctionnels des fonctions inverses, on

$$\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial f_1}{\partial u'}-\frac{\partial f}{\partial u'}\frac{\partial f_1}{\partial u}=\frac{1}{\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial F_1}{\partial v_{,}}-\frac{\partial F}{\partial v_{,}}\frac{\partial F_1}{\partial v}}.$$

Le déterminant qui entre dans le second membre de cette égal est, par hypothèse, différent de zéro. Donc le déterminant du p mier membre ne peut être ni nul ni infini.

59. Ainsi l'équation (a,), considérée comme linéaire par rapp à $u_{,}'$ et à $u_{,}$, ne conduit pas au but désiré. Cependant il re encore la possibilité de résoudre la question de la manière qu' était proposée, si l'équation (a,) est également linéaire p rapport à $u_{,}'$ et à u'; et pour cela il faut seulement que les fo tions f et f_1 soient du premier degré par rapport à u'. Introduis cette condition, en posant

$$z=f(x,\,y,\,u,\,u')=Mu'+N,$$

$$z_{,}=f_1(x,\,y,\,u,\,u')=mu'+n,$$

M, N, m, n désignant des fonctions de x, y, u.

Maintenant l'équation (a,) prend la forme

$$Mu_{,}'+\left(\frac{\partial M}{\partial u}u_{,}+\frac{\partial M}{\partial y}-m\right)u'+\frac{\partial N}{\partial u}u_{,}+\frac{\partial N}{\partial y}-n=0,$$

Digitized by Google

ou, en posant, pour abréger,

$$M = g, \quad \frac{\partial M}{\partial u} u_{,} + \frac{\partial M}{\partial y} - m = h, \quad \frac{\partial N}{\partial u} u_{,} + \frac{\partial N}{\partial y} - n = k,$$

(a') $$g u_{,}' + h u' + k = 0.$$

Si l'équation (a') satisfait à la condition d'intégrabilité

$$g\left(\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial k}{\partial u}\right) + h\left(\frac{\partial k}{\partial u_{,}} - \frac{\partial g}{\partial x}\right) + k\left(\frac{\partial g}{\partial u} - \frac{\partial h}{\partial u_{,}}\right) = 0,$$

laquelle, en vertu de l'égalité

$$\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial h}{\partial u_{,}} = \frac{\partial M}{\partial u},$$

prend la forme

$$g\left(\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial k}{\partial u}\right) + h\left(\frac{\partial k}{\partial u_{,}} - \frac{\partial g}{\partial x}\right) = 0;$$

elle aura alors une intégrale du premier ordre avec une fonction arbitraire de y, à l'aide de laquelle on pourra obtenir l'intégrale générale primitive de l'équation (a'); puis on aura l'intégrale de l'équation (a) par la formule

$$z = f(x, y, u, u').$$

Si l'équation (a') ne satisfait pas à la condition d'intégrabilité, on peut alors lui appliquer de nouveau la méthode de transformation que l'on a employée pour l'équation (a). En continuant de cette manière, ou l'on parviendra à une équation satisfaisant à la condition d'intégrabilité et fournissant, par conséquent, l'intégrale de l'équation proposée; ou l'on s'assurera de l'impossibilité d'appliquer cette méthode de solution.

60. Eclaircissons la théorie précédente par un exemple très-simple. Prenons l'équation

$$z_{,}' - z z' = 0.$$

En la comparant à l'équation générale

$$G z_{,}' + H z' + K = 0,$$

on trouve que la condition d'intégrabilité (E) est satisfaite; et, en effet, en multipliant l'équation proposée par ∂x, il vient

$$\partial z_{,} - z \partial z = 0,$$

Digitized by Google

d'où l'on tire, en intégrant, l'intégrale générale du premier ordre

$$z_{,}-\tfrac{1}{2}z^2 = \Psi(y),$$

contenant une fonction arbitraire de y.

Mais, ne sachant pas intégrer les équations à deux variables z, y, de la forme de la dernière équation, nous ne pourrons pas nous servir de celle-ci pour en tirer l'intégrale générale primitive de l'équation proposée. Si donc nous comparons l'équation proposée à cette autre forme générale

$$Gz_{,}'+Hz_{,}+K=0,$$

nous aurons

$$G=1, \qquad H=0, \qquad K=-zz',$$

et en vérifiant si la condition d'intégrabilité

$$G\left(\frac{\partial H}{\partial y}-\frac{\partial K}{\partial z}\right)+H\left(\frac{\partial K}{\partial z'}-\frac{\partial G}{\partial y}\right)+K\left(\frac{\partial G}{\partial z}-\frac{\partial H}{\partial z'}\right)=0$$

est satisfaite, nous trouverons que son premier membre est égal, non à zéro, mais à z'; par conséquent, l'équation proposée ne peut avoir d'intégrale du premier ordre avec une fonction arbitraire de x.

Il ne nous reste, d'après cela, qu'à recourir à la méthode générale exposée plus haut, et par laquelle on trouve d'abord

$$\int(G\partial z'+H\partial z)=\int\partial z'=z';$$

introduisons ensuite, au lieu de z, la nouvelle variable indépendante v, en posant

$$v=z'.$$

Si l'on différentie cette équation par rapport à y, et qu'on l'ajoute à la proposée, il vient

$$v_{,}=zz'.$$

Des deux équations précédentes on tire

$$z=\frac{v_{,}}{v}, \qquad z'=v.$$

En substituant dans l'équation proposée les valeurs obtenues pour z et z', ainsi que la valeurs de $z_{,}'$ que l'on trouve en différentiant par rapport à y la seconde des équations ci-dessus, on obtiendra l'identité $v_{,}=v_{,}$. Mais, pour qu'il n'y ait pas incompatibilité entre les valeurs de z et de z', il faut satisfaire à la condition

Digitized by Google

$$\left(\frac{v_{,}}{v}\right)' = v,$$

que l'on peut encore écrire

$$\frac{\partial^2 \log v}{\partial x \partial y} = v.$$

Liouville a trouvé (*), pour l'intégrale générale de cette équation, l'expression

$$v = \frac{2\varphi'(x)\psi'(y)e^{\varphi(x)+\psi(y)}}{[1-e^{\varphi(x)+\psi(y)}]^2}.$$

On tire de là

$$\log v = \log 2 + \log\varphi'(x) + \log\psi'(y) + \varphi(x) + \psi(y) - 2\log[1-e^{\varphi(x)+\psi(y)}].$$

Enfin, en différentiant cette dernière équation par rapport à y, on obtient l'intégrale générale de la proposée,

$$z = \frac{v_{,}}{v} = \frac{\psi''(y)}{\psi'(y)} + \psi'(y) + 2\frac{e^{\varphi(x)+\psi(y)}.\psi'(y)}{1-e^{\varphi(x)+\psi(y)}},$$

dont il est facile de vérifier l'exactitude. Mais cette intégrale doit satisfaire aussi à l'équation

$$z_{,} - \tfrac{1}{2}z^2 = \Psi(y).$$

Pour s'en assurer, on trouve

$$z_{,} = \frac{d^2\log\psi'}{dy^2} + \psi'' + 2\psi''.\frac{e^{\varphi+\psi}}{1-e^{\varphi+\psi}} + 2\psi'^2.\frac{e^{\varphi+\psi}}{1-e^{\varphi+\psi}} + 2\psi'^2.\frac{e^{2\varphi+2\psi}}{(1-e^{\varphi+\psi})^2},$$

$$\tfrac{1}{2}z^2 = \tfrac{1}{2}\left(\frac{d\log\psi'}{dy} + \psi'\right)^2 + 2\left(\frac{d\log\psi'}{dy} + \psi'\right).\frac{e^{\varphi+\psi}.\psi'}{1-e^{\varphi+\psi}} + 2\psi'^2.\frac{e^{2\varphi+2\psi}}{(1-e^{\varphi+\psi})^2},$$

et, en retranchant la seconde égalité de la première,

$$z_{,} - \tfrac{1}{2}z^2 = \frac{d^2\log\psi'(y)}{dy^2} + \psi''(y) - \tfrac{1}{2}\left[\frac{d\log\psi'(y)}{dy} + \psi'(y)\right]^2,$$

(*) Monge, Application de l'Analyse à la Géometrie, 5e édition, corrigée par J. Liouville, Note IV, p. 597.

Digitized by Google

où le second membre peut être égalé à une fonction arbitraire $\Psi(y)$ de y, à cause de la forme entièrement indéterminée de cette fonction et de la fonction $\psi(y)$.

Remarque. De cette manière on obtient, entre autre choses, l'intégrale de l'équation précédente entre les deux variables z et y, qui est d'une forme assez compliquée. On déduit cette intégrale de la valeur de z donnée tout à l'heure, en y remplaçant seulement $\varphi(x)$ par une constante arbitraire.

§ 10.

61. Voyons maintenant comment, de la généralisation précédente, on peut tirer la méthode de Laplace (*) pour l'intégration de l'équation linéaire

$$z_{,}'+Pz'+Qz_{,}+Nz=M,$$

dans le cas où les expressions

$$N-PQ-P'=A, \qquad N-PQ-Q_{,}=a$$

ne sont pas égales à zéro.

Suivant la méthode générale, en multipliant les deux premiers termes de l'équation proposée par ∂x, et considérant, dans le produit, $z_{,}$ et z comme seules variables, puis intégrant, il vient

$$\int(\partial z_{,}+P\partial z)=z_{,}+Pz.$$

Introduisons ensuite, au lieu de z, une nouvelle variable dépendante u, en posant

$$z_{,}+Pz=u;$$

si l'on différentie cette équation par rapport à x, et qu'on retranche le résultat de l'équation proposée, il viendra

$$Qz_{,}+(N-P')z=M-u'.$$

En resolvant les deux dernières équations par rapport à z et à $z_{,}$, on trouve

$$z=\frac{1}{A}(M-Qu-u'), \qquad z_{,}=\frac{1}{A}[(N-P')u+Pu'-MP].$$

(*) Histoire de l'Académie des Sciences, 1773.

Il est évident que l'on satisfera à l'équation proposée en substituant la valeur de z fournie par la première des deux équations précédentes, pourvu que la valeur de $z_{,}$ que l'on en tirera soit égale à celle que donne la seconde de ces deux équations. Par suite, la fonction u doit être déterminée par la condition

$$\left(\frac{M-Qu-u'}{A}\right)_{,} = \frac{(N-P')u+Pu'-MP}{A};$$

en la développant, et ordonnant le résultat suivant l'ordre descendant des dérivées de u, on trouve l'équation linéaire

$$u_{,}'+pu'+qu_{,}+nu = m,$$

en posant

$$p = P-\frac{A_{,}}{A}, \qquad q = Q,$$

$$n = N-P'+Q_{,}-Q\frac{A_{,}}{A}, \qquad m = M_{,}-M\frac{A_{,}}{A}+MP.$$

62. Nous savons déjà, par le §. précédent, que l'équation transformée ne peut avoir d'intégrale du premier ordre avec une fonction arbitraire de x; et en effet, en formant l'expression qui doit s'annuler pour qu'il existe une pareille intégrale, on trouve

$$b = n-pq-q_{,} = N-PQ-P' = A$$

pour cette quantité, laquelle est, par hypothèse, différente de zéro.

Formons ensuite l'expression qui doit être égale à zéro, si l'équation transformée a une intégrale du premier ordre avec une fonction arbitraire de y; il vient

$$B = n-pq-p' = N-PQ-P'+(Q_{,}-P')+\left(\frac{A_{,}}{A}\right)',$$

ou, en vertu des égalités

$$A = N-PQ-P', \qquad a = N-PQ-Q_{,},$$

et de celle qui s'en déduit,

$$A-a = Q_{,}-P',$$

$$B = \left(\frac{A_{,}}{A}\right)'+2A-a = \frac{\partial^2 \log A}{\partial x\,\partial y}+2A-a.$$

63. On voit par là que B peut être égal à zéro, lors même que A et a ne seraient pas nuls. Si B n'est pas égal à zéro, on peut alors appliquer à l'équation transformée le même procédé de trans-

Digitized by Google

formation qu'à l'équation proposée. Mais il est encore plus simple, au lieu de former les équations transformées, de prolonger la série des quantités aualogues à B et à b, de la valeur desquelles dépend l'intégrabilité des équations qui leur correspondent. Cette série s'écrit de la manière suivante:

$$
\text{(I)} \quad \left\{
\begin{array}{ll}
A = N - PQ - \dfrac{\partial P}{\partial x}, & a = N - PQ - \dfrac{\partial Q}{\partial y}, \\[2ex]
B = \dfrac{\partial^2 \log A}{\partial x \partial y} + 2A - a, & b = A, \\[2ex]
C = \dfrac{\partial^2 \log B}{\partial x \partial y} + 2B - b, & c = B, \\[2ex]
\dots\dots\dots & \dots\dots\dots
\end{array}
\right.
$$

Si, en prolongeant la suite A, B, C, ..., nous rencontrons un terme égal à zéro, alors la méthode de Laplace est applicable, et le rang du terme qui s'annule indique au bout de combien de transformations on obtiendra l'intégrale cherchée.

64. Dans la recherche précédente, on pourrait attribuer à la variable y le rôle qu'avait x, et vice versa. On obtient de cette manière une autre série, semblable à la précédente,

$$
\text{(II)} \quad \left\{
\begin{array}{ll}
a = N - PQ - \dfrac{\partial Q}{\partial y}, & A = N - PQ - \dfrac{\partial P}{\partial x}, \\[2ex]
b = \dfrac{\partial^2 \log a}{\partial x \partial y} + 2a - A, & B = a, \\[2ex]
c = \dfrac{\partial^2 \log b}{\partial x \partial y} + 2b - B, & C = b, \\[2ex]
\dots\dots\dots & \dots\dots\dots
\end{array}
\right.
$$

Il faut se rappeler que B, C, ..., b, c, ... ont, dans les formules (I) et (II) des significations différentes.

65. En appliquant cette méthode à l'équation

$$z_{,}' + xyz' - 2yz = 0,$$

où $P = xy$, $Q = 0$, $N = -2y$, $M = 0$, on trouve, d'après les formules (I),

$$
\left\{
\begin{array}{llll}
A = -3y, & B = -4y, & C = -5y, & \dots, \\
a = -2y, & b = -3y, & c = -4y, & \dots.
\end{array}
\right.
$$

Par conséquent, la série des quantités A, B, C, ... ne peut se terminer par zéro.

Mais, en appliquant les formules (II), il vient

$$\begin{cases} a = -2y, \quad b = -y, \quad c = 0, \\ A = -3y, \quad B = -2y. \end{cases}$$

Par suite, on obtient de cette manière, au bout de trois transformations, l'intégrale de l'équation proposée. En effet, en posant

$$z' = u,$$

différentiant cette équation par rapport à y, et la soustrayant de la proposée, il vient

$$xyz' - 2yz = -u_{,},$$

et des deux équations qui précèdent on tire

$$z = \tfrac{1}{2}xu + \frac{u_{,}}{2y} \cdot$$

Partant on doit avoir

$$\left(\tfrac{1}{2}xu + \frac{u_{,}}{2y}\right)' = u,$$

ou

$$u_{,}' + xyu' - yu = 0.$$

En posant

$$u' = v,$$

différentiant par rapport à y, et soustrayant de l'équation précédente, on a

$$xyu' - yu = -v_{,}.$$

Des deux dernières équations on tire

$$u = xv + \frac{v_{,}}{y};$$

on doit donc avoir

$$\left(xv + \frac{v_{,}}{y}\right)' = v,$$

ou

$$v_{,}' + xyv' = 0.$$

On tire de là

Digitized by Google

$$v = \psi(y) + \int e^{-\frac{xy^2}{2}} \varphi(x)\,dx,$$

et

$$v_{,} = \psi'(y) - y\int e^{-\frac{xy^2}{2}} x\varphi(x)dx;$$

par conséquent,

$$u = x\psi(y) + \frac{\psi'(y)}{y} + x\int e^{-\frac{xy^2}{2}} \varphi(x)\,dx - \int e^{-\frac{xy^2}{2}} x\varphi(x)dx.$$

Enfin, en déterminant la dérivée de u par rapport à y, et substituant pour u et $u_{,}$ leurs valeurs dans la formule

$$2z = xu + \frac{u_{,}}{y},$$

on obtient, pour l'intégrale générale cherchée,

$$2z = x^2\psi(y) + \frac{2xy-1}{y^3}\psi'(y) + \frac{\psi''(y)}{y^2} + x^2\int e^{-\frac{xy^2}{2}} \varphi(x)dx$$

$$+ \frac{1-2xy^2}{y^2}\int e^{-\frac{xy^2}{2}} x\varphi(x)dx + \frac{1}{y^2}\int e^{-\frac{xy^2}{2}} (xy^2-1)x\varphi(x)dx.$$

§ 11.

66. Une équation linéaire de la forme générale

$$z'' + sz_{,}' + tz_{,,} + qz_{,} + pz' + Nz = M,$$

dans laquelle entrent les trois dérivées partielles du second ordre, et où les coefficients M, N, p, q, s, t désignent des fonctions données de x et de y, se ramène à la forme simplifiée que nous avons considérée dans le § précédent, en s'appuyant sur les principes généraux exposés plus haut (Ch. I. § 6). Il suffit pour cela, au lieu de x et de y, d'introduire dans cette équation, pour variables indépendantes, les arguments α et β des fonctions arbitraires de son intégrale générale. Pour la détermination des arguments α et β eux-mêmes, il faut, comme on sait, intégrer deux équations aux dérivées partielles du premier ordre, de la forme

$$\frac{\partial\alpha}{\partial x} + m\frac{\partial\alpha}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial\beta}{\partial x} + n\frac{\partial\beta}{\partial y} = 0,$$

m, n désignant les racines de l'équation du second degré

Digitized by Google

$$\xi^2 - s\xi + t = 0,$$

tirée de la formule générale

$$\frac{\partial F}{\partial z''}\xi^2 - \frac{\partial F}{\partial z'_{\,\prime}}\xi + \frac{\partial F}{\partial z_{\prime\prime}} = 0,$$

où l'on prend pour F le premier membre de l'équation proposée.

67. De cette manière, on ne peut reconnaître si l'équation précédente peut s'intégrer par la méthode de Laplace, avant d'y avoir introduit les nouvelles variables indépendantes, ce qui exige l'intégration préalable des deux équations

$$dy = mdx, \qquad dy = ndx,$$

entre les deux variables x et y.

Mais Legendre a fait connaître un procédé pour appliquer immédiatement à l'équation donnée une recherche analogue, sans y changer les variables indépendantes. Il dit, en parlant des résultats qu'il a obtenus: „C'est le fruit d'un calcul assez pénible, dont je ne crois pas utile de rapporter les détails, à cause de leur longueur.“

Mais on peut présenter cette recherche sous une forme assez simple et tout à fait conforme aux recherches exposées dans le §. précédent.

68. Pour cela, introduisons les notations $\Box$ et ∇, définies par les égalités

$$\Box = \frac{\partial}{\partial x} + m\frac{\partial}{\partial y}, \qquad \nabla = \frac{\partial}{\partial x} + n\frac{\partial}{\partial y},$$

m et n désignant deux fonctions données quelconques de x et de y.

En représentant par u, v des fonctions de x, y, et appliquant une des opérations $\Box$ ou ∇ aux fonctions composées $u \pm v$, $u.v$, $\frac{u}{v}$, on trouve très-facilement

$$\Box(u \pm v) = \Box u \pm \Box v,$$
$$\Box(u.v) = u.\Box v + v.\Box u,$$
$$\Box\frac{u}{v} = \frac{v.\Box u - u.\Box v}{v^2}.$$

Outre cela, on a, par définition,

$$\Box u = u' + mu_{\prime}, \qquad \nabla u = u' + nu_{\prime},$$

d'où l'on tire

Digitized by Google

$$u_{,} = \frac{\square u - \nabla u}{m-n}, \qquad u' = \frac{m.\nabla u - n.\square u}{m-n}.$$

En appliquant maintenant à u les opérations $\square$ et ∇ l'une à la suite de l'autre, mais dans deux ordres différents, on obtient les résultats différents

$$\nabla\square u = u'' + (m+n)u'_{,} + mnu_{,,} + (\nabla m)u_{,,}$$
$$\square\nabla u = u'' + (m+n)u'_{,} + mnu_{,,} + (\square n)u_{,,}$$

d'où

$$\nabla\square u - \square\nabla u = \frac{\nabla m - \square n}{m-n}(\square u - \nabla u),$$

ou, en posant, pour abréger,

$$\mu = \frac{\nabla m - \square n}{m-n},$$
$$\nabla\square u - \square\nabla u = \mu(\square u - \nabla u).$$

69. Prenons maintenant une équation aux dérivées partielles du premier ordre, de la forme

$$\square\nabla z + P\square z + Q\nabla z + Nz = M,$$

M, N, P, Q désignant des fonctions données de x et de y.

En l'écrivant de la manière suivante,

$$\square(\nabla z + Pz) + Q(\nabla z + Pz) + (N - PQ + \square P)z = M,$$

remarquons que, si l'on a

$$N - PQ + \square P = 0,$$

l'équation s'intégrera comme il suit.

En posant

$$\nabla z + Pz = u,$$

on aura une équation aux dérivées partielles du premier ordre

$$\square u + Qu = M,$$

dont l'intégrale s'obtiendra par la méthode exposée plus haut (§. 7), et renfermera dans son expression une fonction arbitraire de x et de y. Si l'on substitue sa valeur dans l'équation précédente, on obtiendra une autre équation aux dérivées partielles du premier ordre. En l'intégrant absolument comme la première, elle fournira l'intégrale générale du problème, avec deux fonctions arbitraires de x et de y.

Digitized by Google

70. Il y a encore un autre moyen pour intégrer l'équation considérée. A l'aide de l'égalité établie plus haut (art. 68),

$$\square\nabla z = \nabla\square z + \mu(\nabla z - \square z),$$

on pourra introduire $\nabla\square z$ au lieu de $\square\nabla z$, par suite de quoi l'équation proposée prendra la forme

$$\nabla\square z + (Q+\mu)\nabla z + (P-\mu)\square z + Nz = M,$$

et l'on pourra encore l'écrire de cette manière,

$$\Delta[\square z + (Q+\mu)z] + (P-\mu)[\square z + (Q+\mu)z] \\ + [N-(P-\mu)(Q+\mu) - \nabla(Q+\mu)]z = M.$$

Si donc on a l'égalité

$$N-(P-\mu)(Q+\mu)-\nabla(Q+\mu) = 0,$$

l'equation proposée s'intégrera exactement comme dans le cas précédent.

71. Si les expressions

$$N - PQ + \square P = A, \qquad N-(P-\mu)(Q+\mu) - \nabla(Q+\mu) = a$$

sont différentes de zéro, introduisons alors, à la place de z, une nouvelle variable dépendante u, en posant

$$\nabla z + Pz = u.$$

En effectuant sur les deux membres de cette équation l'opération $\square$, et soustrayant le résultat de l'équation proposée, il vient

$$Q\nabla z + (N-\square P)z = M - \square u,$$

et des deux dernières équations on tire

$$z = \frac{M - Qu - \square u}{A}, \qquad \nabla z = \frac{(N-\square P)u + Pu - MP}{A}.$$

Si dans l'équation proposée on substitue les valeurs précédentes de z et de ∇z, et les valeurs de $\square z$ et de $\square\nabla z$, obtenues au moyen des équations précédentes en effectuant sur chacune d'elles l'opération $\square$, il est aisé de s'assurer que de cette manière on satisfait à l'équation proposée. Mais, pour que les valeurs de ∇z et de $\square\nabla z$, fournies par la seconde des équations précédentes, soient égales à celles que l'on peut tirer pareillement de la première, il faut nécessairement satisfaire à la condition suivante,

$$\nabla\left(\frac{M - Qu - \square u}{A}\right) = \frac{N - \square P + Pu - MP}{A}.$$

Digitized by Google

En effectuant dans le premier membre l'opération ∇, le résultat peut s'exprimer par l'équation

$$\nabla\Box u+\left(P-\frac{\nabla A}{A}\right)\Box u+Q\nabla u+\left[N-\Box P+\nabla Q-Q\frac{\nabla A}{A}\right]u$$
$$=\nabla M-Q\frac{\nabla A}{A}+MP.$$

Mais, pour la réduire à une forme générale complétement identique à celle de l'équation proposée, introduisons $\Box\nabla u$ au lieu de $\nabla\Box u$, après quoi l'équation précédente prendra la forme

$$\Box\nabla u+p\Box u+q\nabla u+ru=l,$$

en posant

$$p=P+\mu-\frac{\nabla A}{A},\qquad q=Q-\mu,$$

$$r=N-\Box P+\nabla Q-Q\frac{\nabla A}{A},\qquad l=\nabla M-Q\frac{\nabla A}{A}+MP.$$

71. Pour juger de la possibilité d'intégrer l'équation transformée d'après la méthode que nous venons d'exposer, formons les expressions

$$n-pq-\Box p=B,\qquad n-(p-\mu)(q+\mu)-\nabla(q+\mu)=b.$$

En mettant pour n, p, q leurs valeurs, il est aisé de voir que l'on

$$B=\Box\frac{\nabla A}{A}+2A-a-\mu\frac{\nabla A}{A}+\lambda,\qquad b=A,$$

en posant, pour abréger,

$$\lambda=2\mu^2-(\Box\mu+\nabla\mu).$$

D'après cela, b est différent de zéro; mais B peut être nul. Si B aussi est différent de zéro, on peut alors appliquer à l'équation transformée le même mode de transformation que l'on a appliqué à l'équation proposée. Mais il est encore plus simple, au lieu de former l'équation transformée, de prolonger la série des quantités analogues à B et à b, de la valeur desquelles dépend l'intégrabilité des équations qui leur correspondent. Cette série se forme de la manière suivante

$$\left\{\begin{array}{ll}A=N-PQ-\Box P, & a=N-(P-\mu)(Q+\mu)-\nabla(Q+\mu\\ B=\Box\frac{\nabla A}{A}+2A-a-\mu\frac{\nabla A}{A}+\lambda, & b=A,\\ C=\Box\frac{\nabla B}{B}+2B-b-\mu\frac{\nabla B}{B}+\lambda, & c=B,\\ \text{etc.}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \end{array}\right.$$

Digitized by Google

La possibilité d'appliquer cette méthode d'intégration est subordonnée à la condition que la série A, B, C, ... se termine par zéro. L'ordre du terme qui s'évanouit le premier indique après combien de transformations on peut obtenir l'intégrale cherchée.

On peut présenter la recherche précédente sous une autre forme, en l'appliquant à l'équation proposée, écrite sous la forme

$$\nabla\Box z+(Q+\mu)\nabla z+(P-\mu)\Box z+Nz=M.$$

Mais dans ce cas on n'aurait qu'à répéter tous les calculs ci-dessus, en remplaçant partout les signes

$$P,\qquad Q,\qquad A,\qquad a,\qquad \Box,\qquad \nabla$$

respectivement par

$$Q+\mu,\quad P-\mu,\quad a,\qquad A,\qquad \nabla,\qquad \Box.$$

72. Pour montrer comment les résultats précédents s'appliquent à l'équation

$$z''+sz'_{,}+tz_{,,}+qz_{,}+pz'+Nz=M,$$

il suffira de prendre pour m et n les racines de l'équation

$$\xi^2-s\xi+t=0;$$

après quoi, en vertu des formules données plus haut, nous aurons l'égalité

$$\Box\nabla z-[z''+sz'_{,}+tz_{,,}+(\Box n)z_{,}]=0,$$

et, en ajoutant celle-ci à l'équation proposée, il vient

$$\Box\nabla z+(q-\Box n)z_{,}+pz'+Nz=M.$$

Si l'on y substitue les valeurs

$$z'=\frac{m\nabla z-n\Box z}{m-n},\qquad z_{,}=\frac{\Box z-\nabla z}{m-n},$$

on ramènera l'équation précédente à la forme

$$\Box\nabla z+\frac{q-\Box n+pn}{m-n}\Box z+\frac{pm-q+\Box n}{m-n}\nabla z+Nz=M,$$

à laquelle s'applique la méthode d'intégration exposée plus haut.

73. Pour éclaircir cette méthode, appliquons-la à l'équation

$$z''-a^2z_{,,}+\frac{b}{x^2}z=0,$$

Digitized by Google

dont la condition d'intégrabilité sous forme finie a déjà été établi[e]
par Euler (*).

En posant

$$\Box z = z' + az_{,}, \qquad \nabla z = z' - az_{,},$$

on a

$$\Box \nabla z = \nabla \Box z = z'' - a^2 z_{,,};$$

par suite, l'équation proposée prendra la forme

$$\Box \nabla z + \frac{b}{x^2} z = 0.$$

On a ici

$$P = 0, \quad Q = 0, \quad N = \frac{b}{x^2}, \quad M = 0, \quad \Box P = 0, \quad \nabla Q = 0, \quad \mu =$$

$$A = \frac{b}{x^2}, \qquad a = \frac{b}{x^2};$$

par conséquent,

$$\nabla A = -\frac{2b}{x^3}, \qquad \frac{\nabla A}{A} = -\frac{2}{x}, \qquad \Box . \frac{\nabla A}{A} = \frac{2}{x^2}.$$

On obtiendra d'après cela les séries suivantes,

$$a = \frac{b}{x^2}, \qquad A = \frac{b}{x^2},$$

$$b = \frac{b}{x^2}, \qquad B = \frac{k_1}{x^2}, \qquad k_1 = b + 2,$$

$$c = \frac{k_1}{x^2}, \qquad C = \frac{k_2}{x^2}, \qquad k_2 = 2(k_1 + 1) - b,$$

$$d = \frac{k_2}{x^2}, \qquad D = \frac{k_3}{x^2}, \qquad k_3 = 2(k_2 + 1) - k_1,$$

etc. . . . .

En continuant ainsi, et poussant jusqu'au $(n+2)^{\text{ième}}$ terme, il vi[ent]

$$r = \frac{k_n}{x^2}, \qquad R = \frac{k_{n+1}}{x^2}, \qquad k_{n+1} = 2(k_n + 1) - k_{n-1}.$$

Ainsi les coefficients k satisfont à l'équation aux différences finies

$$k_{n+1} - 2k_n + k_{n-1} = 2,$$

(*) Miscellanea Taurinensia, T. III, p. 60.

Digitized by Google

laquelle, en introduisant le signe des différences finies $\triangle$, peut encore s'écrire sous la forme

$$\triangle^2 k_{n-1} = 2.$$

En l'intégrant, on trouve

$$k_{n-1} = n(n-1) + Cn + C',$$

ou

$$k_n = n(n+1) + C(n+1) + C'.$$

Pour déterminer les constantes arbitraires C, C', on a, en faisant tour à tour $n = 1$ et $n = 2$,

$$b = 2C + C', \qquad b = 3C + C',$$

d'où $C = 0$, $C' = b$, et par conséquent

$$k_n = n(n+1) + b.$$

De là on tire la condition d'Euler: pour une constante donnée b, l'équation considérée est intégrable sous forme finie, s'il est possible de satisfaire à la condition

$$n(n+1) + b = 0$$

par une valeur entière et positive quelconque de n. En considérant b comme une constante indéterminée, et posant $b = -n(n+1)$, on obtient la forme des équations

$$z'' - a^2 z_{,,} - \frac{n(n+1)}{x^2} z = 0,$$

qui sont intégrables sous forme finie. Si l'on pose successivement

$$z = x^{n+1} u, \qquad z = x^{-n} v,$$

on ramène l'équation précédente aux deux suivantes,

$$u'' - a^2 u_{,,} + \frac{2(n+1)}{x} u' = 0,$$

$$v'' - a^2 v_{,,} - \frac{2n}{x} v' = 0;$$

donc l'équation

$$z'' - a^2 z_{,,} + \frac{b}{x} z' = 0$$

s'intègre sous forme finie pour toute valeur paire, positive ou négative, du nombre b.

Digitized by Google

74. **Remarque.** On sait que la méthode de Laplace s'applique aussi à certaines équations contenant à la fois des différences finies et des dérivées. Nous pourrions montrer que l'idée fondamentale de cette méthode s'applique également à plusieurs équations linéaires aux différentielles ordinaires du second ordre, de la forme

$$F(x)\frac{d^2y}{dx^2}+f(x)\frac{dy}{dx}+\varphi(x)y=\psi(x).$$

Mais nous ne croyons pas que ce soit ici le lieu d'entrer dans ces détails.

Chapitre III.

Intégration des formes compliquées d'équations aux dérivées partielles du second ordre d'une fonction de deux variables indépendantes.

§ 12.

75. L'équation

(1) $$Hz''+Kz'_{,}+Lz_{,,}+M+N(z''z_{,,}-z'^2_{,})=0,$$

dans laquelle les coefficients H, K, L, M, N sont supposés être des fonctions quelconques de x, y, z, z', $z_{,}$, représente la forme la plus générale des équations que nous considérons, pour laquelle il existe des méthodes tout à fait générales ou une théorie d'intégration.

Monge (*), le premier, a donné une méthode générale pour l'intégration des équations de cette forme (**); mais la théorie qu'il propose n'épuise pas tous les cas qui peuvent se présenter dans l'intégration des équations auxquelles se ramène la question considérée. Le développement le plus complet de la théorie de cette question, a été donné par Ampère (***). Parmi les auteurs plus récents qui

---

(*) Mémoire sur le calcul intégral des équations aux différences partielles. (Histoire de l'Académie des Sciences, 1784).

(**) Il considère surtout le cas de $N=0$; mais cette restriction n'est pas nécessaire.

(***) Mémoire contenant l'application de la théorie exposée dans le XVIIe Cahier du Journal de l'École Polytechnique. (Journ. de l'Éc. Polyt., t. XI, 1820).

Digitized by Google

se sont occupés de la même question générale, nous ne connaissons que les deux mathématiciens anglais Boole(*) et De Morgan(**). Les procédés proposés par ces deux savants, bien que présentant une analyse beaucoup moins générale et moins complète que le travail d'Ampère, n' en sont pas moins remarquables par une nouvelle manière d'aborder le problème en ramenant l'intégration de l'équation considérée aux dérivées partielles du second ordre à l'intégration de deux équations simultanées aux dérivées partielles du premier ordre. A l'aide de cette réduction, que l'on peut du reste effectuer, ainsi que Bour l'a enseigné (***), sans s'écarter des méthodes fondamentales d'Ampère, on établit très-simplement les diverses conditions entre les coefficients H, K, ..., N, par l'existence ou la non-existence desquelles se manifestent tous les cas possibles, pour lesquels la théorie de l'intégration a été constituée par Ampère.

76. Les équations, à l'intégration desquelles se ramène la question considérée, s'obtiennent par la méthode d'Ampère, de la manière suivante. A la place des variables indépendantes primitives, x, y, introduisons les nouvelles variables x, α, en supposant l'existence d'une certaine dépendance entre x, y et α. De cette manière, en conservant les notations que nous avons adoptées pour les dérivées partielles dans ces deux systèmes de variables indépendantes nous aurons

$$(2)\qquad \frac{\partial z'}{\partial x} = z'' + z'_{\prime}\frac{\partial y}{\partial x}, \qquad \frac{\partial z_{\prime}}{\partial x} = z'_{\prime} + z_{\prime\prime}\frac{\partial y}{\partial x}, \qquad \frac{\partial z_{\prime}}{\partial \alpha} = z_{\prime\prime}\frac{\partial y}{\partial \alpha}.$$

De la dernière équation on tire

$$(3)\qquad z_{\prime\prime} = \frac{\dfrac{\partial z_{\prime}}{\partial \alpha}}{\dfrac{\partial y}{\partial \alpha}};$$

(*) (a) Ueber die partielle Differentialgleichung 2-ter Ordnung $Rr + Ss + Tt + U(s^2 - rt) = V$. (Crelle's Journal für die Mathem., *Bd. LXI*, 1863). — (b) Treatise on Differential Equations. Supplementary Volume, 1865; *Ch. XXVIII.* — (c) Dans le Mémoire intitulé: „Considérations sur la recherche des intégrales premières des équations différentielles partielles du second ordre, par Boldt.“ inséré dans le Bulletin de l'Académie des Sciences de St. Pétersbourg, *t. IV*, 1862, le titre contient, d'après Todhunter, une faute d'impression relativement au nom de l'auteur, et ce Mémoire doit appartenir à Boole.

(**) Les recherches de cet auteur, publiées dans les Cambridge Philosophical Transactions, Vol. IX. Part, IV, ne me sont connues que par les renvois qu'y fait Boole, tout en faisant remarquer en même temps la ressemblance des méthodes qu'ils ont employées l'un et l'antre.

(***) Journal de l'École Polytechnique, t. XXII: Sur l'intégration des équations différentielles partielles du premier et du second ordre.

Digitized by Google

ensuite l'avant-dernière donne

$$(3)\qquad z'_{,} = \frac{\partial z_{,}}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{\frac{\partial z_{,}}{\partial \alpha}}{\frac{\partial y}{\partial \alpha}},$$

et enfin on aura, en vertu de la première,

$$(3)\qquad z'' = \frac{\partial z'}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial z_{,}}{\partial x} + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 \frac{\frac{\partial z_{,}}{\partial \alpha}}{\frac{\partial y}{\partial \alpha}}.$$

77. Pour substituer ces valeurs dans l'équation (1), remarquons d'abord que l'on a

$$z'' z_{,,} = \left(\frac{\partial z'}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial z_{,}}{\partial x}\right)\frac{\frac{\partial z_{,}}{\partial \alpha}}{\frac{\partial y}{\partial \alpha}} + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\left(\frac{\frac{\partial z_{,}}{\partial \alpha}}{\frac{\partial y}{\partial \alpha}}\right)^2,$$

$$z'^2_{,} = \left(\frac{\partial z'}{\partial x}\right)^2 - 2\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial z_{,}}{\partial x}\frac{\frac{\partial z_{,}}{\partial \alpha}}{\frac{\partial y}{\partial \alpha}} + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\left(\frac{\frac{\partial z_{,}}{\partial \alpha}}{\frac{\partial y}{\partial \alpha}}\right)^2.$$

Par suite, en retranchant la seconde égalité de la première, les termes du second degré en $\frac{\partial z_{,}}{\partial \alpha} : \frac{\partial y}{\partial \alpha}$ se détruiront, et l'on aura

$$z'' z_{,,} - z'^2_{,} = -\left(\frac{\partial z_{,}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z'}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial z_{,}}{\partial x}\right)\frac{\frac{\partial z_{,}}{\partial \alpha}}{\frac{\partial y}{\partial \alpha}}.$$

D'après cela, le résultat de la substitution prendra la forme

$$(4)\qquad P + Q\,\frac{\frac{\partial z_{,}}{\partial \alpha}}{\frac{\partial y}{\partial \alpha}} = 0,$$

où l'on a posé

$$P = H\left(\frac{\partial z'}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial z_{,}}{\partial x}\right) + 2K\frac{\partial z_{,}}{\partial x} + M - N\left(\frac{\partial z_{,}}{\partial x}\right)^2,$$

$$Q = H\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 - 2K\frac{\partial y}{\partial x} + L + N\left(\frac{\partial z'}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial z_{,}}{\partial x}\right).$$

Digitized by Google

78. Les valeurs de la fonction z et de ses dérivées partielles, tirées de l'intégrale générale correspondante à l'équation (1), doivent satisfaire à cette dernière. De même, en exprimant la fonction z et ses dérivées partielles au moyen des variables x et α, nous satisferons, par ces expressions, au résultat de la même transformation opérée sur l'équation (1), c'est-à-dire à l'équation (4).

Jusqu'ici le choix de la dépendance entre les variables x, y, α est resté arbitraire; mais, si l'on suppose maintenant que α représente l'argument d'une des deux fonctions arbitraires qui entrent dans l'intégrale générale, alors il sera possible de tirer, des conclusions précédentes, des conséquences très-importantes. Car, avec ce choix de nouvelles variables, en vertu de ce qui a été démontré plus haut (Ch. I, §. 4), les expressions des dérivées partielles de la fonction z pourront être homogènes ou hétérogènes à l'intégrale par rapport à α; et dans ce dernier cas, les expressions de chaque ordre de dérivées partielles de z contiendront des fonctions arbitraires de α telle qu'il n'en entrera de pareilles ni dans l'intégrale, ni dans les expressions des dérivées des ordres précédents. Par conséquent, si l'on suppose les dérivées du second ordre z'', $z'_{,}$, $z_{,,}$ hétérogènes à l'intégrale par rapport à α, on devra admettre, dans l'expression

$$\frac{\frac{\partial z_{,}}{\partial \alpha}}{\frac{\partial y}{\partial \alpha}} = z_{,,},$$

la présence d'une fonction arbitraire de α qui ne se trouve ni dans l'intégrale générale, ni dans les expressions de y, z', $z_{,}$, ni dans leurs dérivées partielles $\frac{\partial y}{\partial x}$, $\frac{\partial z'}{\partial x}$, $\frac{\partial z_{,}}{\partial x}$; car, dans la différentiation par rapport à x, α est regardé comme une constante. Donc la fonction arbitraire de α dont il s'agit ne peut entrer ni dans P, ni dans Q, et le premier membre de l'équation (4) ne peut se réduire à zéro que si l'on a à la fois les deux égalités

$$P = 0, \qquad Q = Q. \tag{5}$$

79. Réciproquement, pour juger si les dérivées du second ordre z'', $z'_{,}$, $z_{,,}$ dans l'équation (1), sont hétérogènes à l'intégrale par rapport à α, il suffit de prendre les équations (5), et, en leur adjoignant les deux premières équations (2), d'éliminer entre ces quatre équations les trois dérivées $\frac{\partial z'}{\partial x}$, $\frac{\partial z_{,}}{\partial x}$, $\frac{\partial y}{\partial x}$. Si le résultat de l'élimination est identique avec l'équation proposée (1), les équations (5) lui seront équivalentes, et la supposition de l'hétérogénéité à l'intégrale, par rapport à α, des dérivées z'', $z'_{,}$, $z_{,,}$ sera légitime. Au contraire, cette

supposition se trouverait fausse, si l'on obtenait pour résultat de l'élimination une équation entre x, y, z, z', $z_{,}$, z'', $z'_{,}$, $z_{,,}$, différente de (1).

80. Mais il est facile de s'assurer que, pour l'équation (1), c'est toujours le premier cas qui a lieu. Si l'on substitue, en effet, dans les équations (5) à $\frac{\partial z'}{\partial x}$, $\frac{\partial z_{,}}{\partial x}$ leurs valeurs respectives

$$z'' + z'_{,}\frac{\partial y}{\partial x}, \qquad z'_{,} + z_{,,}\frac{\partial y}{\partial x},$$

on trouve

$$P = H\left[z'' - z_{,,}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right] + 2K\left(z'_{,} + z_{,,}\frac{\partial y}{\partial x}\right) + M - N\left(z'_{,} + z_{,,}\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = 0,$$

$$Q = H\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 - 2K\frac{\partial y}{\partial x} + L + N\left[z'' + 2z'_{,}\frac{\partial y}{\partial x} + z_{,,}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right] = 0,$$

ou

$$Hz'' + 2Kz'_{,} + M - Nz'^{2}_{,} + 2(K - Nz'_{,})z_{,,}\frac{\partial y}{\partial x} - (H + Nz_{,,})z_{,,}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = 0,$$

$$L + Nz'' - 2(K - Nz'_{,})\frac{\partial y}{\partial x} + (H + Nz_{,,})\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = 0,$$

et il est évident que, pour éliminer $\frac{\partial y}{\partial x}$, il suffit d'ajouter la première de ces deux équations à la seconde multipliée par $z_{,,}$. ce qui conduit à l'équation proposée

$$Hz'' + 2Kz'_{,} + Lz_{,,} + M + N(z''z_{,,} - z'^{2}_{,}) = 0.$$

81. Les équations (5), auxquelles on a ramené ainsi l'intégration de l'équation proposée, sont du premier ordre, mais non du premier degré, et sous ce dernier rapport elles sont susceptibles d'une nouvelle simplification. Pour cela, résolvons par rapport à $\frac{\partial y}{\partial x}$ l'équation $Q=0$, ou l'équation qui lui est équivalente

$$(H + Nz_{,,})\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 - 2(K - Nz'_{,})\frac{\partial y}{\partial x} + L + Nz'' = 0;$$

il viendra

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{K - Nz'_{,} \pm \sqrt{(K - Nz'_{,})^2 - (H + Nz_{,,})(L + Nz'')}}{H + Nz_{,,}}$$

$$= \frac{K - Nz'_{,} \pm \sqrt{(K^2 - HL - N[Hz'' + 2Kz'_{,} + Lz_{,,} + N(z''z_{,,} - z'^{2}_{,})]}}{H + Nz_{,,}},$$

Digitized by Google

ou, en vertu de l'équation (1),

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{K - Nz'_{,} \pm \sqrt{K^2 - HL + MN}}{H + Nz_{,,}}.$$

82. On obtient de cette manière, pour $\frac{\partial y}{\partial x}$, deux valeurs, ce qui devait être, puisque la variable indépendante α, que nous employons conjointement avec x, représente un des deux arguments des fonctions arbitraires de l'intégrale générale. Si l'on désigne ces arguments par α et β, les deux valeurs différentes de $\frac{\partial y}{\partial x}$ devront correspondre aux deux systèmes différents de variables indépendantes: x, α, et x, β. En effet, il a été démontré ci-dessus (Chap. I, §. 6) que les valeurs différentes de $\frac{\partial y}{\partial x}$, correspondantes aux arguments α et β, s'obtiennent comme racines de l'équation

$$\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z_{,,}} - \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z'_{,}}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z''}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = 0.$$

Si l'on désigne maintenant par F le premier membre de l'équation (1), on trouve

$$\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z''} = H + Nz_{,,}, \quad \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z'_{,}} = 2(K - Nz'_{,}), \quad \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z_{,,}} = L + Nz''.$$

Par conséquent, les deux équations du second degré en $\frac{\partial y}{\partial x}$ sont tout à fait identiques.

83. Si l'on pose, pour abréger,

$$K^2 - HL + MN = G, \tag{6}$$

nous aurons, à la place de $Q = 0$, l'équation

$$(H + Nz_{,,})\frac{\partial y}{\partial x} - K + Nz'_{,} \mp \sqrt{G} = 0.$$

De plus, l'équation $P = 0$ peut s'écrire ainsi,

$$H\frac{\partial z'}{\partial x} + \left(2K - H\frac{\partial y}{\partial x} - N\frac{\partial z_{,}}{\partial x}\right)\frac{\partial z_{,}}{\partial x} + M = 0,$$

et, par suite de l'équation précédente, elle prend la forme

$$H\frac{\partial z'}{\partial x} + (K \mp \sqrt{G})\frac{\partial z_{,}}{\partial x} + M = 0.$$

Digitized by Google

Les signes différents de $\sqrt{G}$ correspondent aux systèmes différents de variables indépendantes: x, α, et x, β. La présence de la seconde variable indépendante α ou β ne se manifeste pas, parce que les équations ne contiennent que les dérivées partielles des fonctions y, z', $z_{,}$ par rapport à x seulement, tandis que α ou β n'entrent pas explicitement, même dans les coefficients. Pour indiquer laquelle des deux quantités α, β on considère, en même temps que x, comme variable indépendante, Ampère emploie, dans ce cas et généralement dans les cas analogues, la notation suivante pour les dérivées partielles,

$$\frac{\partial y}{\partial x(\alpha}, \quad \frac{\partial z'}{\partial x(\alpha}, \quad \frac{\partial z_{,}}{\partial x(\alpha}, \quad \frac{\partial y}{\partial x(\beta}, \quad \frac{\partial z'}{\partial x(\beta}, \quad \frac{\partial z_{,}}{\partial x(\beta}.$$

84. D'après cela, en conservant devant $\sqrt{G}$ le signe supérieur quand les variables indépendantes sont x, α, et le signe inférieur quand elles sont x, β, on pourra écrire comme il suit les équations auxquelles se ramène finalement l'intégration de (1),

$$\text{(A)} \qquad \begin{cases} H\dfrac{\partial y}{\partial x(\alpha} + N\dfrac{\partial z_{,}}{\partial x(\alpha} - K - \sqrt{G} = 0, \\ H\dfrac{\partial z'}{\partial x(\alpha} + (K - \sqrt{G})\dfrac{\partial z_{,}}{\partial x(\alpha} + M = 0, \end{cases}$$

$$\text{(B)} \qquad \begin{cases} H\dfrac{\partial y}{\partial x(\beta} + N\dfrac{\partial z_{,}}{\partial x(\beta} - K + \sqrt{G} = 0, \\ H\dfrac{\partial z'}{\partial x(\beta} + (K + \sqrt{G})\dfrac{\partial z_{,}}{\partial x(\beta} + M = 0. \end{cases}$$

A chacun de ces deux systèmes on peut encore joindre l'équation

$$\text{(C)} \qquad \frac{\partial z}{\partial x} = z' + z_{,}\frac{\partial y}{\partial x},$$

dans laquelle, en même temps que x, il entrera pour seconde variable indépendante, soit α, soit β, suivant que l'on combinera l'équation (C) avec (A) ou avec (B).

85. Ici il est à propos d'indiquer aussi les autres méthodes, dont il a été question au commencement de ce Chapitre, pour ramener l'intégration de l'équation (1) à d'autres équations analogues à celles d' Ampère (A), (B), (C). Monge a considéré la forme générale des équations, linéaires seulement par rapport à z'', $z'_{,}$, $z_{,,}$; mais sa méthode s'étend facilement aux équations qui sont linéaires aussi par rapport à $z''\, z_{,,} - z'^{2}_{,}$, c'est-à-dire à l'équation générale

$$Hz'' + 2Kz'_{,} + Lz_{,,} + M + N(z''z_{,,} - z'^{2}_{,}) = 0.$$

Digitized by Google

Il commence par cette remarque, que l'équation proposée, représentant une relation simple (unique) entre les trois quantités z'', $z'_{,}$, $z_{,,}$, ne peut être suffisante pour la détermination des valeurs de chacune d'elles au moyen de x, y, z, z', $z_{,}$. Donc, si l'on y joint les deux équations

$$dz' = z''dx + z'_{,}dy, \qquad dz_{,} = z'_{,}dx + z_{,,}dy,$$

lesquelles, exprimant seulement les définitions des dérivées partielles z'', $z'_{,}$, $z_{,,}$, ne donnent pas entre elles de nouvelles relations („ne disent rien de nouveau"); et si par leur moyen on élimine de l'équation proposée deux quelconques des quantités z'', $z'_{,}$, $z_{,,}$, on obtiendra ainsi des équations de la forme

$$P + Qz_{,,} = 0, \qquad R + Sz'' = 0, \qquad T + Uz'_{,} = 0,$$

qui ne devront pas déterminer les valeurs de $z_{,,}$, z'', $z'_{,}$. Par conséquent, les équations précédentes, ayant lieu indépendamment des valeurs des quantités $z_{,,}$, z'', $z'_{,}$, devront se réduire respectivement aux suivantes,

$$P = 0,\ Q = 0; \qquad R = 0,\ S = 0; \qquad T = 0,\ U = 0.$$

Mais il est aisé de voir que, de ces six équations, deux seulement sont nécessaires, par exemple, les deux équations

$$P = 0, \qquad Q = 0,$$

les autres étant ou identiques, ou équivalentes à celles-là. En effet, si l'on opère l'élimination en question, on trouve

$$P = H(dxdz' - dydz_{,}) + 2Kdxdz_{,} + Mdx^2 - Ndz_{,}^2 = 0,$$
$$R = L(dydz_{,} - dxdz') + 2Kdydz' + Mdy^2 - Ndz'^2 = 0,$$
$$T = Hdydz' + Ldxdz_{,} + Mdxdy + Ndz'dz_{,} = 0,$$

et

$$Q = S = -U = Hdy^2 - 2Kdxdy + Ldx^2 + N(dxdz' + dydz_{,}) = 0.$$

Or comme

$$dxdz' + dydz_{,} = z''dx^2 + 2z'_{,}dxdy + z_{,,}dy^2,$$

la dernière équation prend la forme

$$(H + Nz_{,,})dy^2 - 2(K - Nz'_{,})dxdy + (L + Nz'')dx^2 = 0.$$

En résolvant celle-ci successivement par rapport à $\frac{dy}{dx}$ et à $\frac{dx}{dy}$, on trouve, au moyen de l'équation proposée,

Digitized by Google

$$dy = \frac{K - Nz'_{,} \pm \sqrt{G}}{H + Nz_{,,}}\, dx, \qquad dx = \frac{K - Nz'_{,} \pm \sqrt{G}}{L + Nz''}\, dy,$$

où

$$G = K^2 - HL + MN.$$

Chassant les dénominateurs, transportant tous les termes dans même membre, et ayant égard aux équations

$$dz' = z''\,dx + z'_{,}dy, \qquad dz_{,} = z'_{,}dx + z_{,,}dy,$$

on pourra écrire les équations ci-dessus de la manière suivante,

(a) $$Hdy + Ndz_{,} - (K \mp \sqrt{G})\,dx = 0,$$

(a′) $$Ldx + Ndz' - (K \pm \sqrt{G})\,dy = 0.$$

De plus, l'équation $P = 0$, écrite sous la forme

$$Hdxdz' + (2Kdx - Hdy - Ndz_{,})\,dz_{,} + Mdx^2 = 0,$$

devient, en vertu de l'équation (a),

(b) $$Hdz' + (K \mp \sqrt{G})\,dz_{,} + Mdx = 0.$$

De cette manière, les équations $P = 0$ et $Q = 0$ sont remplac par (a) et (b).

Ensuite, l'équation $R = 0$, écrite sous la forme

$$Ldydz_{,} + (2Kdy - Ldx - Ndz')\,dz' + Mdy^2 = 0,$$

devient, en vertu de l'équation (a′),

(b′) $$Ldz_{,} + (K \mp \sqrt{G})\,dz' + Mdy = 0.$$

Par conséquent, $S = 0$ et $R = 0$ peuvent être remplacées par équations (a′) et (b′): or l'équation (a′) est équivalente à (a) (b′) s'obtient par l'élimination de dx entre (a) et (b).

Enfin, l'équation $T = 0$, écrite sous la forme

$$dz_{,}(Ldx + Ndz') + (Hdz' + Mdx)\,dy = 0,$$

devient, en vertu de l'équation (a′),

(b) $$Hdz' + Mdx + (K \mp \sqrt{G})\,dz_{,} = 0.$$

Donc les équations $T = 0$, $U = 0$, et $P = 0$, $R = 0$ se réduis aux seules et mêmes équations (a) et (b).

86. Ainsi, d'après la méthode de Monge, l'intégration de l'éq tion (1) se ramène à l'integration du système des équations

Digitized by Google

$$H dy + N dz_{,} - (K \pm \sqrt{G})\, dx = 0,$$

$$H dz' + (K \mp \sqrt{G})\, dz_{,} + M dx = 0,$$

auxquelles on peut encore joindre la suivante,

$$dz = z'\, dx + z_{,} dy.$$

Les équations d'Ampère (A), (B), (C), étant multipliées par dx, deviennent identiques de forme avec les précédentes; mais ces deux systèmes d'équations se distinguent essentiellement en ce que l'un contient les différentielles des deux variables indépendantes et les différentielles totales des variables dépendantes, tandis que dans l'autre il n'entre que la différentielle d'une seule des variables indépendantes, avec les différentielles partielles des variables dépendantes par rapport à cette variable indépendante.

87. Considérons encore la méthode de Boole. Elle est fondée sur la supposition de l'existence d'une intégrale intermédiaire ou du premier ordre pour l'équation (1). L'auteur de la méthode expose cette idée fondamentale sous deux formes différentes, pour atteindre un seul et même but. Mais, en raison, du défaut de généralité du fondement de cette méthode, il suffira de considérer une seule de ces formes.

Soit

$$\mathrm{F} = 0$$

l'intégrale du premier ordre supposée de l'équation (1). Dans sa composition, outre les variables x, y, z, il entre aussi z' et $z_{,}$; par suite, en la différentiant par rapport à x et à y, il vient

$$-\left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z} z'\right) = \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z'} z'' + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z_{,}} z'_{,},$$

$$-\left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z} z_{,}\right) = \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z'} z'_{,} + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z_{,}} z_{,,}.$$

Ces deux équations peuvent servir au même but pour lequel, dans la méthode de Monge, on a employé les équations

$$dz' = z'' dx + z'_{,} dy, \qquad dz_{,} = z'_{,} dx + z_{,,} dy.$$

Mais de cette manière on serait conduit à répéter tout ce qui a été développé dans l'exposition de la méthode de Monge; seulement, au lieu de

$$dx, \qquad dy, \qquad dz', \qquad dz_{,},$$

on emploierait ici respectivemet

Digitized by Google

$$\frac{\partial F}{\partial z'}, \quad \frac{\partial F}{\partial z_{,}}, \quad -\left(\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}z'\right), \quad -\left(\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}z_{,}\right).$$

On peut donc écrire directement les équations auxquelles se ramè l'intégration de (1),

$$\left\{\begin{array}{l} H\frac{\partial F}{\partial z_{,}}-N\left(\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}z_{,}\right)-(K\pm\sqrt{G})\frac{\partial F}{\partial z'}=0, \\ H\left(\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}z'\right)+(K\mp\sqrt{G})\left(\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}z_{,}\right)-M\frac{\partial F}{\partial z'}=0. \end{array}\right.$$

Ainsi, des deux intégrales du premier ordre possibles en géné pour les équations aux dérivées partielles du second ordre, l'une d satisfaire aux équations simultanées linéaires précédentes aux dérive partielles du premier ordre, où l'on prend $\sqrt{G}$ avec les signes su rieurs (ou inférieurs); et l'autre doit satisfaire aux mêmes équatio où l'on prend $\sqrt{G}$ avec les signes inférieurs (ou supérieurs).

88. En comparant ces trois méthodes, il est impossible de pas accorder la préférence à celle qu'a proposée Ampère: en p mier lieu, à cause de la généralité du procédé, fondé sur la se hypothèse de l'existence d'une intégrale finie de l'équation (1), quoi elle a l'avantage sur la méthode de Boole, qui suppose l'existe d'une intégrale générale du premier ordre, tandis qu'une telle intégr n'est pas toujours possible, lors même que l'intégrale finie existe; second lieu, à cause de sa plus grande clarté, par comparaison a la partie analogue de la méthode de Monge, dans laquelle l'équati transformée (1) se partage en deux; enfin, en troisième lieu, à cau de la forme des équations auxquelles se ramène l'intégration de (1 On est conduit par une voie naturelle aux intégrales d'Ampère p les fonctions arbitraires des arguments α ou β, nécessaires pour le généralité; car elles ne renferment que les dérivées partielles ou l différentielles par rapport à une seule des variables indépendantes.

Relativement à la seconde des trois considérations précédent il faut encore remarquer qu' Ampère, ayant indiqué avec précisi la cause pour laquelle l'équation transformée (1) peut être partagée deux, a expliqué en même temps de quoi dépend la possibilité ou l'imp sibilité de l'application de cette même méthode à d'autres équatio différentes de (1).

89. Prenons, pour cela, l'équation aux dérivées partielles second ordre

$$F(x, \; y, \; z, \; z', \; z_{,}, \; z'', \; z'_{,}, \; z_{,,})=0,$$

en la supposant entière et rationnelle, du moins par rapport à $z'_{,}$, $z_{,,}$, et de forme différente de (1).

En admettant pour cette équation l'existence d'une intégrale générale finie, et prenant l'argument α de l'une des deux fonctions arbitraires pour variable indépendante, en même temps que x, on obtiendra pour z'', $z'_{,}$, $z_{,,}$ les expressions (3). En les substituant dans l'équation proposée, et ordonnant le résultat suivant les puissances ascendantes de $\frac{\partial z_{,}}{\partial \alpha} : \frac{\partial y}{\partial \alpha}$, on obtiendra une équation transformée, de la forme

$$P + Q\frac{\frac{\partial z_{,}}{\partial \alpha}}{\frac{\partial y}{\partial \alpha}} + R\left[\frac{\frac{\partial z_{,}}{\partial \alpha}}{\frac{\partial y}{\partial \alpha}}\right]^2 + \ldots = 0.$$

De même que l'équation proposée sera satisfaite par les valeurs de z, z', $z_{,}$, z'', $z'_{,}$, $z_{,,}$, tirées de l'intégrale, en supposant que les variables indépendantes soient x et y; de même l'équation transformée devra être satisfaite par les valeurs de y, z, z', $z_{,}$, déduites des mêmes équations de l'intégrale dans l'hypothèse de x et de α variables indépendantes. Mais l'équation transformée peut se changer en identité de deux manières, selon que les dérivées du second ordre z'', $z'_{,}$, $z_{,,}$ seront hétérogènes ou homogènes à l'intégrale par rapport à α. Dans le premier cas, le rapport $\frac{\partial z_{,}}{\partial \alpha} : \frac{\partial y}{\partial \alpha}$ contiendra une fonction arbitraire de α qui n'entrera pas dans les coefficients P, Q, $R, \ldots$, et ces derniers se réduiront d'eux-mêmes à zéro. Dans le second cas, les mêmes fonctions arbitraires entreront tant dans le rapport $\frac{\partial z_{,}}{\partial \alpha} : \frac{\partial y}{\partial \alpha}$ que dans les coefficients; par suite, le premier membre de l'équation transformée pourra se réduire à zéro, sans que l'on ait les identités $P = 0$, $Q = 0, \ldots$. Pour juger de la possibilité du premier cas, il faut poser les équations

$$P = 0, \qquad Q = 0, \qquad R = 0, \quad \ldots;$$

puis y remplacer $\frac{\partial z'}{\partial x}$ et $\frac{\partial z_{,}}{\partial x}$ par leurs valeurs respectives

$$z'' + z'_{,}\frac{\partial y}{\partial x}, \qquad z'_{,} + z_{,,}\frac{\partial y}{\partial x},$$

après quoi elles ne contiendront plus que

$$x,\ y,\ z,\ z',\ z_{,},\ z'',\ z'_{,},\ z_{,,},\ \frac{\partial y}{\partial x}.$$

Digitized by Google

90. Si l'on obtient, comme résultats de l'élimination de $\frac{\partial y}{\partial x}$, des équations équivalentes entre elles et à l'équation proposée $F=0$, alors l'hypothèse de z'', $z'_{,}$, $z_{,,}$ hétérogènes à l'intégrale par rapport à α (quel que soit celui des deux arguments que l'on représente par α) sera vérifiée; dans le cas contraire, elle ne le sera pas. Dans cette élimination, on peut généralement, de chacune des équations

$$P=0, \qquad Q=0, \qquad R=0, \quad \ldots,$$

déduire des valeurs de $\frac{\partial y}{\partial x}$, et les subitituer dans les autres. Mais, pour se borner à la seule considération de celles d'entre elles qui correspondent réellement aux deux arguments α, β des fonctions arbitraires de l'intégrale, prises successivement pour variables indépendantes en même temps que x, il faut les égaler aux valeurs de $\frac{\partial y}{\partial x}$ obtenues comme solutions de l'équation du second degré

$$\frac{\partial F}{\partial z_{,,}} - \frac{\partial F}{\partial z'_{,}}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z''}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = 0;$$

ou bien on peut, si c'est plus simple dans le cas proposé, prendre les deux racines de cette équation pour les substituer dans

$$P=0, \qquad Q=0, \qquad R=0, \ldots.$$

91. Pour éclaircir ce qui précède, considérons, par exemple, l'équation

$$z'_{,}z'' + x(z''z_{,,} - z'^2_{,})^2 = 0.$$

En y substituant pour z'', $z'_{,}$, $z_{,,}$ les valeurs (3), il vient

$$x\left(\frac{\partial z'}{\partial x}\right)^4 + \left[\frac{\partial z_{,}}{\partial x} - 2x\left(\frac{\partial z_{,}}{\partial x}\right)^2\left(\frac{\partial z'}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial z_{,}}{\partial x}\right)\right]\frac{\frac{\partial z_{,}}{\partial \alpha}}{\frac{\partial y}{\partial \alpha}}$$

$$+\left[x\left(\frac{\partial z'}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial z_{,}}{\partial x}\right)^2 - \frac{\partial y}{\partial x}\right]\left[\frac{\frac{\partial z_{,}}{\partial \alpha}}{\frac{\partial y}{\partial \alpha}}\right]^2 = 0.$$

En égalant à zéro les coefficients des différentes puissances du rapport $\frac{\partial z_{,}}{\partial \alpha} : \frac{\partial y}{\partial \alpha}$ nous aurons les équations

Digitized by Google

$$P = \frac{\partial z_{\prime}}{\partial x} = 0,$$

$$Q = \frac{\partial z_{\prime}}{\partial x}\left[1 - 2x\frac{\partial z_{\prime}}{\partial x}\left(\frac{\partial z'}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial z_{\prime}}{\partial x}\right)\right] = 0,$$

$$R = x\left(\frac{\partial z'}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial z_{\prime}}{\partial x}\right)^2 - \frac{\partial y}{\partial x} = 0.$$

En vertu de la première de ces équations, la seconde est aussi satisfaite, et la troisième se simplifie, en sorte qu'il suffit de considérer les deux équations

$$\frac{\partial z_{\prime}}{\partial x} = 0, \qquad x\left(\frac{\partial z'}{\partial x}\right)^2 - \frac{\partial y}{\partial x} = 0,$$

lesquelles, par la substitution des valeurs

$$\frac{\partial z'}{\partial x} = z'' + z'_{\prime}\frac{\partial y'}{\partial x}, \qquad \frac{\partial z_{\prime}}{\partial x} = z'_{\prime} + z_{\prime\prime}\frac{\partial y}{\partial x},$$

prennent la forme

$$z'_{\prime} + z_{\prime\prime}\frac{\partial y}{\partial x} = 0, \qquad x\left(z'' + z'_{\prime}\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 - \frac{\partial y}{\partial x} = 0.$$

Mais, en substituant dans la seconde de ces équations la valeur

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{z'_{\prime}}{z_{\prime\prime}},$$

tirée de la première, elle devient

$$x\left(z'' - \frac{z'^{2}_{\prime}}{z_{\prime\prime}}\right)^2 + \frac{z'_{\prime}}{z_{\prime\prime}} = 0,$$

équation équivalente à la proposée. Par suite, la valeur

$$\frac{\partial y}{\partial x(\alpha} = -\frac{z'_{\prime}}{z_{\prime\prime}}$$

peut correspondre, dans l'intégrale finie supposée, à une fonction arbitraire d'un argument α, par rapport auquel les dérivées secondes z'', $z'_{\prime}$, $z_{\prime\prime}$ sont hétérogènes à l'intégrale.

Du reste, on doit encore pouvoir vérifier que cette valeur est racine de l'équation du second degré

$$\frac{\partial F}{\partial z_{\prime\prime}} - \frac{\partial F}{\partial z'_{\prime}}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z''}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = 0,$$

qui, dans le cas actuel, est de la forme

$$2xz_{,,}(z''z_{,,}-z'^{2}_{,})\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2-[4xz'_{,}(z''z_{,,}-z'^{2}_{,})-z_{,,}]\frac{\partial y}{\partial x}+2xz_{,,}(z''z_{,,}-z'^{2}_{,})=0.$$

Pour cela, en divisant son premier membre par $\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{z'_{,}}{z_{,,}}$, on obtient pour quotient

$$2xz_{,,}(z''z_{,,}-z'^{2}_{,})\frac{\partial y}{\partial x}+2xz'_{,}(z''z_{,,}-z'^{2}_{,})-z_{,,},$$

et pour reste

$$\frac{2}{z_{,,}}[x(z''z_{,,}-z'^{2}_{,})^2+z'_{,}z_{,,}].$$

Ce dernier est égal à zéro, en vertu de l'équation proposée; par suite, la valeur $\frac{\partial y}{\partial x}=-\frac{z'_{,}}{z''}$ est effectivement une racine de l'équation du second degré ci-dessus. Son autre racine se trouve en égalant le quotient à zéro, et résolvant l'équation obtenue par rapport à $\frac{\partial y}{\partial x}$. Il vient ainsi

$$\frac{\partial y}{\partial x}(\beta=\frac{1}{2x(z''z_{,,}-z'^{2}_{,})}-\frac{z'_{,}}{z_{,,}}.$$

Cette valeur correspond évidemment à l'argument β, qui entre sous le signe d'une fonction arbitraire dans l'intégrale générale finie supposée, de telle sorte que toutes les dérivées z', $z_{,}$, z'', $z'_{,}$, $z_{,,}$ soient homogènes à celle-ci par rapport à β.

§ 13.

92. Dans le § précédent, nous avons vu que le problème de l'intégration de l'équation

$$(1)\qquad Hz''+2Kz'_{,}+Lz_{,,}+M+N(z''z_{,,}-z'^{2}_{,})=0$$

se ramène à l'intégration d'un système de plusieurs équations, que, pour abréger, nous pourrons écrire ainsi,

$$(2)\qquad \begin{cases} Hdy+Ndz_{,}-(K\pm\sqrt{G})\,dx=0,\\ Hdz'+(K\mp\sqrt{G})\,dz_{,}+M\,dx=0,\\ dz-z'\,dx-z_{,}\,dy=0. \end{cases}$$

Relativement à ce système, examinons d'abord la question suivante: A quelles conditions, et en quel nombre peut-il exister, pour les

Digitized by Google

équations (2), des intégrales de la forme $u =$ const., u étant supposée une fonction de $x, y, z, z', z_,$?

Dans les équations (2), il faut prendre partout ou les signes supérieurs, ou les signes inférieurs devant $\sqrt{G}$; on a donc deux systèmes d'équations simultanées incomplètes, le nombre des variables $x, y, z, z', z_,$, qui entrent dans chacune d'elles, étant plus grand de deux unités que celui des équations. On peut appeler **intégrale** de ces systèmes d'équations différentielles toute fonction u des variables $x, y, z, z', z_,$, dont la différentielle est identiquement égale à zéro en vertu des équations (2). Or, en résolvant les équations (2) par rapport à $dz, dz', dz_,$, on trouve

$$dz = z'dx + z_, dy,$$

$$dz' = -\frac{L}{N}dx + \frac{K \mp \sqrt{G}}{N}dy,$$

$$dz_, = \frac{K \pm \sqrt{G}}{N}dx - \frac{H}{N}dy,$$

et, en substituant ces valeurs de $dz, dz', dz_,$ dans l'expression de du, il vient

$$du = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + z'\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{L}{N}\frac{\partial u}{\partial z'} + \frac{K \pm \sqrt{G}}{N}\frac{\partial u}{\partial z_,}\right)dx$$
$$+ \left(\frac{\partial u}{\partial y} + z_,\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{K \mp \sqrt{G}}{N}\frac{\partial u}{\partial z'} - \frac{H}{N}\frac{\partial u}{\partial z_,}\right)dy.$$

Par conséquent, du se réduit à zéro, et $u =$ const. est une intégrale des équations (2), si la fonction u satisfait aux équations linéaires et homogènes par rapport aux dérivées du premier ordre

$$\frac{\partial u}{\partial x} + z'\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{L}{N}\frac{\partial u}{\partial z'} + \frac{K \pm \sqrt{G}}{N}\frac{\partial u}{\partial z_,} = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} + z_,\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{K \mp \sqrt{G}}{N}\frac{\partial u}{\partial z'} - \frac{H}{N}\frac{\partial u}{\partial z_,} = 0.$$

93. La théorie de l'intégration des équations simultanées aux dérivées partielles du premier ordre n'a été élucidée que dans ces derniers temps, grâce aux travaux de **Jacobi**, de **Bour** et de **Boole**(*),

(*) Une esquisse de cette théorie a été exposée dans ma dissertation „Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre." (**Archiv d. Math. u. Physik**, Bd. L., S. 393—416, §§. 23—25).

et la question qui nous occupe présente une occasion d'appliquer cette théorie.

Pour cela, représentons, pour abréger l'écriture, les deux systèmes d'opérations

$$\frac{\partial}{\partial x}+z'\frac{\partial}{\partial z}-\frac{L}{N}\frac{\partial}{\partial z'}+\frac{K\pm\sqrt{G}}{N}\frac{\partial}{\partial z_{,}},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}+z_{,}\frac{\partial}{\partial z}+\frac{K\mp\sqrt{G}}{N}\frac{\partial}{\partial z'}-\frac{H}{N}\frac{\partial}{\partial z_{,}}$$

respectivement par les symboles ∇_1 et ∇_2, au moyen desquels les équations (3) prendront la forme

$$\nabla_1 u=0,\quad \nabla_2 u=0.$$

La condition nécessaire pour que ces deux équations puissent admettre une intégrale commune consiste, comme on sait, en ce que le résultat de l'opération ∇_1, appliquée à la fonction $\nabla_2 u$, soit égal au résultat de l'opération ∇_2, appliquée à la fonction $\nabla_1 u$, c'est-à-dire, que l'on ait

$$\nabla_1\nabla_2 u=\nabla_2\nabla_1 u.$$

Or, en effectuant les opérations indiquées, on trouve

$$\nabla_1\nabla_2 u-\nabla_2\nabla_1 u=\left(\frac{K\pm\sqrt{G}}{N}-\frac{K\mp\sqrt{G}}{N}\right)\frac{\partial u}{\partial z}$$

$$+\left(\nabla_1\frac{K\mp\sqrt{G}}{N}+\nabla_2\frac{L}{N}\right)\frac{\partial u}{\partial z'}-\left(\nabla_1\frac{H}{N}+\nabla_2\frac{K\pm\sqrt{G}}{N}\right)\frac{\partial u}{\partial z_{,}}.$$

D'après cela, il est clair que cette condition nécessaire peut être remplie de deux manières: 1° lorsque, dans l'expression précédente, les coefficients de $\frac{\partial u}{\partial z}$, $\frac{\partial u}{\partial z'}$, $\frac{\partial u}{\partial z_{,}}$ se réduisent chacun à zéro; 2° lorsque, ces coefficients étant différents de zéro, aux deux équations $\nabla_1 u=0$, $\nabla_2 u=0$, nous en adjoindrons une troisième

$$\nabla_1\nabla_2 u-\nabla_2\nabla_1 u=0,$$

laquelle, évidemment, est algébriquement distincte des deux premières; car elle ne contient pas les dérivées $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$.

94. Chacun de ces deux cas doit être examiné à part. Occupons-nous d'abord du premier, où, par hypothèse, ont lieu les égalités

$$\frac{K\pm\sqrt{G}}{N}-\frac{K\mp\sqrt{G}}{N}=0,\quad \nabla_1\frac{K\mp\sqrt{G}}{N}+\nabla_2\frac{L}{N}=0,$$

$$\nabla_1\frac{H}{N}+\nabla_2\frac{K\pm\sqrt{G}}{N}=0,$$

Digitized by Google

ou

$$G = 0, \qquad \nabla_1 \frac{K}{N} + \nabla_2 \frac{L}{N} = 0, \qquad \nabla_1 \frac{H}{N} + \nabla_2 \frac{K}{N} = 0 \ (*);$$

les équations simultanées considérées prennent alors la forme

$$\nabla_1 u = \frac{\partial u}{\partial x} + z' \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{L}{N}\frac{\partial u}{\partial z'} + \frac{K}{N}\frac{\partial u}{\partial z_,} = 0,$$
$$\nabla_2 u = \frac{\partial u}{\partial y} + z_, \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{K}{N}\frac{\partial u}{\partial z'} - \frac{H}{N}\frac{\partial u}{\partial z_,} = 0.$$

Il est aisé de voir que, dans le cas actuel, les équations $\nabla_1 u = 0$, $\nabla_2 u = 0$ ont trois intégrales communes, de la forme

$$u_1 = \text{const.}, \qquad u_2 = \text{const.}, \qquad u_3 = \text{const.},$$

et en même temps de montrer comment se trouvent ces intégrales.

Pour cela, soient v, v_1, v_2 les intégrales distinctes de l'équation $\nabla_1 u = 0$, lesquelles doivent être au nombre de trois. Déterminons, de plus, une fonction F (y, v, v_1, v_2) de ces trois intégrales et de la variable y, qui satisfasse à la seconde des équations considérées $\nabla_2 \mathrm{F} = 0$. Il vient, en la développant,

$$\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y} \nabla_2 y + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial v} \nabla_2 v + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial v_1} \nabla_2 v_1 + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial v_2} \nabla_2 v_2 = 0.$$

Ici on a évidemment $\nabla_2 y = 1$, et il est facile de voir que les quantités $\nabla_2 v$, $\nabla_2 v_1$, $\nabla_2 v_2$ s'expriment au moyen de v, v_1, v_2 seulement. En effet, on a identiquement, pour une fonction quelconque u,

$$\nabla_1 \nabla_2 u = \nabla_2 \nabla_1 u;$$

donc, en faisant successivement $u = v$, v_1, v_2, on obtient les identités

$$\nabla_1 (\nabla_2 v) = \nabla_2 (\nabla_1 v) = \nabla_2 0 = 0,$$
$$\nabla_1 (\nabla_2 v_1) = \nabla_2 (\nabla_1 v_1) = \nabla_2 0 = 0,$$
$$\nabla_1 (\nabla_2 v_2) = \nabla_2 (\nabla_1 v_2) = \nabla_2 0 = 0,$$

qui démontrent que $\nabla_2 v$, $\nabla_2 v_1$, $\nabla_2 v_2$ sont des intégrales de l'équation $\nabla_1 u = 0$. Mais v, v_1, v_2 représentent toutes les intégrales distinctes de l'équation $\nabla_1 u = 0$; par suite, $\nabla_2 v$, $\nabla_2 v_1$, $\nabla_2 v_2$ doivent s'exprimer au moyen de v, v_1, v_2; et, si ces expressions sont

$$\nabla_2 v = f(v, v_1, v_2), \qquad \nabla_2 v_1 = f_1(v, v_1, v_2), \qquad \nabla_2 v_2 = f_2(v, v_1, v_2),$$

(*) Ces conditions ont été établies par **Boole**. Voir les **Philosophical Transactions**, 1862, T CLII, Part I, p 452.

Digitized by Google

on aura alors l'équation

$$\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v} f + \frac{\partial F}{\partial v_1} f_1 + \frac{\partial F}{\partial v_2} f_2 = 0.$$

Pour cette équation on trouve, par les méthodes connues, trois intégrales distinctes, de la forme

$$u_1 = F_1(y, v, v_1, v_2) = \text{const.}, \qquad u_2 = F_2(y, v, v_1, v_2) = \text{const.},$$
$$u_3 = F_3(y, v, v_1, v_2) = \text{const.},$$

lesquelles doivent évidemment être des intégrales communes des équations

$$\nabla_1 u = 0, \qquad \nabla_2 u = 0.$$

95. Dans l'exposition précédente de la méthode d'intégration simultanée des équations $\nabla_1 u = 0$, $\nabla_2 u = 0$, on peut enfin échanger entre eux les rôles de ces deux équations; mais, dans tous les cas, il faut commencer par déterminer trois intégrales distinctes de l'une d'elles. Pour cela, concurremment avec les méthodes ordinaires, on peut encore faire usage du procédé que Poisson a découvert pour les équations de la Dynamique; car, en vertu de l'identité

$$\nabla_1(\nabla_2 u) = \nabla_2(\nabla_1 u),$$

la substitution d'une intégrale de l'une quelconque des équations $\nabla_1 u = 0$, $\nabla_2 u = 0$ dans le premier membre de l'autre doit donner une intégrale de la première. Le succès de cette méthode tient finalement à la condition que cette substitution donne des intégrales distinctes de celles que l'on substitue.

96. Indiquons maintenant comment, des trois intégrales obtenues ci-dessus

(4) $$u_1 = a, \qquad u_2 = b, \qquad u_3 = c,$$

où a, b, c désignent des constantes arbitraires, on peut tirer d'abord une intégrale particulière, puis l'intégrale générale de l'équation (1).

Des équations (4) on tire, pour z, z', $z_{\prime}$, des expressions de la forme

(5) $$z = \omega(x, y, a, b, c), \qquad z' = \omega_1(x, y, a, b, c), \qquad z_{\prime} = \omega_2(x, y, a, b, c).$$

De la méthode même de calcul des intégrales (4) des équations (3) on peut déjà conclure que les expressions (5) de z, z', $z_{\prime}$ doivent satisfaire aux équations (2). En résolvant celles-ci par rapport à dz, dz', $dz_{\prime}$, et introduisant la condition $G = 0$, on les ramène à la forme

Digitized by Google

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} dz &= z'\,dx + z_{,}dy,\\ dz' &= -\frac{L}{N}dx + \frac{K}{N}dy,\\ dz_{,} &= \frac{K}{N}dx - \frac{H}{N}dy. \end{aligned}\right.$$

Mais cette conclusion est tellement importante, que nous allons chercher à en donner une démonstration directe. Remarquons, pour cela, qu'une fonction entièrement arbitraire de u_1, u_2, u_3, que nous désignerons par $\Phi(u_1, u_2, u_3)$, doit satisfaire aux équations (3), lorsqu'on la substitue à u, puisque l'on a

$$\begin{aligned} \nabla_1 \Phi &= \frac{\partial \Phi}{\partial x} + z'\frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{L}{N}\frac{\partial \Phi}{\partial z'} + \frac{K}{N}\frac{\partial \Phi}{\partial z_{,}}\\ &= \frac{\partial \Phi}{\partial u_1}\nabla_1 u_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial u_2}\nabla_1 u_2 + \frac{\partial \Phi}{\partial u_3}\nabla_1 u_3,\\ \nabla_2 \Phi &= \frac{\partial \Phi}{\partial y} + z_{,}\frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{K}{N}\frac{\partial \Phi}{\partial z'} - \frac{H}{N}\frac{\partial \Phi}{\partial z_{,}}\\ &= \frac{\partial \Phi}{\partial u_1}\nabla_2 u_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial u_2}\nabla_2 u_2 + \frac{\partial \Phi}{\partial u_3}\nabla_2 u_3, \end{aligned}$$

et que les quantités

$$\begin{matrix} \nabla_1 u_1, & \nabla_1 u_2, & \nabla_1 u_3,\\ \nabla_2 u_1, & \nabla_2 u_2, & \nabla_2 u_3 \end{matrix}$$

sont égales à zéro. En prenant la différentielle de la fonction Φ, et substituant dans son expression les valeurs de $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ et de $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$ tirées des égalités $\nabla_1 \Phi = 0$, $\nabla_2 \Phi = 0$, nous aurons l'égalité

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} d\,.\,\Phi(u_1,u_2,u_3) = \frac{\partial \Phi}{\partial z}(dz - z'dx - z_{,}dy) + \frac{\partial \Phi}{\partial z'}\left(dz' + \frac{L}{N}dx - \frac{K}{N}dy\right)\\ + \frac{\partial \Phi}{\partial z_{,}}\left(dz_{,} - \frac{K}{N}dx + \frac{H}{N}dy\right), \end{aligned}\right.$$

dans laquelle

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial z} &= \frac{\partial \Phi}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial \Phi}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{\partial \Phi}{\partial u_3}\frac{\partial u_3}{\partial z},\\ \frac{\partial \Phi}{\partial z'} &= \frac{\partial \Phi}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial z'} + \frac{\partial \Phi}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial z'} + \frac{\partial \Phi}{\partial u_3}\frac{\partial u_3}{\partial z'},\\ \frac{\partial \Phi}{\partial z_{,}} &= \frac{\partial \Phi}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial z_{,}} + \frac{\partial \Phi}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial z_{,}} + \frac{\partial \Phi}{\partial u_3}\frac{\partial u_3}{\partial z_{,}}. \end{aligned}$$

Si maintenant on remplace z, z', $z_{,}$, par leurs valeurs (5), le premier membre de l'égalité (7) se réduira à zéro, puisque u_1, u_2, u_3,

Digitized by Google

on aura alors l'équation

$$\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y}+\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial v}f+\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial v_1}f_1+\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial v_2}f_2=0.$$

Pour cette équation on trouve, par les méthodes co
grales distinctes, de la forme

$$u_1=\mathrm{F}_1(y,v,v_1,v_2)=\text{const.},\qquad u_2=\mathrm{F}_2(y,v$$
$$u_3=\mathrm{F}_3(y,v,v_1,v_2)=\text{cons}$$

lesquelles doivent évidemment être des in
équations

$$\nabla_1 u=0,\qquad \nabla_2 u$$

95. Dans l'exposition précédente
simultanée des équations $\nabla_1 u=0$, ∇
entre eux les rôles de ces deux équat
il faut commencer par déterminer tr
d'elles. Pour cela, concurremment
peut encore faire usage du procédé
les équations de la Dynamique; c
uvent être rem

$$\nabla_1(\nabla_2 u$$

la substitution d'une intégra ... ∂x, $z_{,}=\frac{\partial\omega}{\partial y}$.
$\nabla_1 u=0$, $\nabla_2 u=0$ dans le
une intégrale de la premièr ... $z_{,}$ dans les deux dernières éq
lement à la condition q
distinctes de celles que l'

96. Indiquons mai ... $\frac{}{N}dy$, $\quad d\,.\,\frac{\partial\omega}{\partial y}=\frac{K}{N}dx-\frac{H}{N}dy$,
ci-dessus

(4) u ... x trois égalités suivantes,

où a, b, c désignent
une intégrale parti

Des équation
forme

(5) $z=\omega(x,y$

$$\left\{\begin{aligned}&N\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}+L=0,\\&N\frac{\partial^2\omega}{\partial x\partial y}-K=0,\\&N\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}+H=0.\end{aligned}\right.$$

De la métho ... maintenant facile de démontrer que l'intégrale $z=$
on peut dé ... satisfaisant aux trois équations précédentes, doit nécessai-
satisfaire ... aussi à l'équation (1). Pour cela, il suffit de remar-
dz, dz', ... en vertu de la condition $G=K^2-HL+MN=0$, l'équation
la forme ... s'écrire ainsi,

$$\ldots)(N\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+H) = (N\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-K)^2.$$

... une intégrale particulière de l'équa-
...es arbitraires a, b, c; cherchons à
...me équation, renfermant deux

... les arguments α et β
...le cherchée doivent

$$\frac{Nz'_{,}-\sqrt{G}}{H+Nz_{,,}};$$

...t, on a

$$\ldots t \quad \alpha=\beta.$$

... la proposition suivante. Soient φ
..., substituons α, $\varphi(\alpha)$, $\psi(\alpha)$ à la place
$z=\omega\,(x,\,y,\,a,\,b,\,c)$, et déterminons la
...on que la dérivée de la fonction ω par rapport
... Les deux équations ainsi obtenues

$$=\omega[x,y,\alpha,\varphi(\alpha),\psi(\alpha)], \qquad \frac{\partial\omega}{\partial\alpha}=0$$

...nt l'intégrale générale de l'équation (1).

...effet, si l'on différentie les équations (9) par rapport à x ... y, il vient

$$z'=\frac{\partial\omega}{\partial x}, \qquad \frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha\partial x}=-\frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha^2}\frac{\partial\alpha}{\partial x},$$

$$z_{,}=\frac{\partial\omega}{\partial y}, \qquad \frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha\partial y}=-\frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha^2}\frac{\partial\alpha}{\partial y}.$$

En différentiant encore une fois, par rapport à x et à y, les valeurs de z' et de $z_{,}$, on aura

$$z''=\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\omega}{\partial x\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial x}=\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha^2}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}\right)^2,$$

$$z'_{,}=\frac{\partial^2\omega}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2\omega}{\partial x\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial y}=\frac{\partial^2\omega}{\partial y\partial x}+\frac{\partial^2\omega}{\partial y\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial x}=\frac{\partial^2\omega}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha^2}\frac{\partial\alpha}{\partial x}\frac{\partial\alpha}{\partial y},$$

$$z_{,,}=\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\omega}{\partial y\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial y}=\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha^2}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right)^2.$$

Digitized by Google

$\Phi(u_1, u_2, u_3)$ se changeront respectivement en a, b, c, $\Phi(a, b, c)$; par conséquent, le second membre de l'égalité (7) devra aussi être égal à zéro. Mais il est facile de remarquer que les dérivées $\frac{\partial \Phi}{\partial z}, \frac{\partial \Phi}{\partial z'}, \frac{\partial \Phi}{\partial z_{,}}$ ne peuvent être identiquement nulles, et il suffit de le faire voir en détail pour une de ces dérivées, par exemple, pour $\frac{\partial \Phi}{\partial z}$.

En effet, les trois dérivées $\frac{\partial u_1}{\partial z}, \frac{\partial u_2}{\partial z}, \frac{\partial u_3}{\partial z}$ ne peuvent être toutes nulles, puisque, si elles l'étaient, on ne pourrait des équations (4) tirer les valeurs (5); leurs multiplicateurs $\frac{\partial \Phi}{\partial u_1}, \frac{\partial \Phi}{\partial u_2}, \frac{\partial \Phi}{\partial u_3}$, par la substitution des valeurs (5) de z, z', $z_{,}$, se changent en des constantes arbitraires. Ainsi le second membre de l'égalité (7) ne devra se réduire à zéro qu'en vertu de ce que les équations (6) se changent en identités par la substitution des valeurs de z, z', $z_{,}$.

97. D'après cela, on a l'égalité

$$d\omega = \omega_1 dx + \omega_2 dy,$$

en conséquence de laquelle les équations (5) peuvent être remplacées par les suivantes,

$$z = \omega(x, y, a, b, c), \qquad z' = \frac{\partial \omega}{\partial x}, \qquad z_{,} = \frac{\partial \omega}{\partial y}.$$

En substituant ces valeurs de z, z', $z_{,}$ dans les deux dernières équations (6), on a les égalités

$$d \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x} = -\frac{L}{N} dx + \frac{K}{N} dy, \qquad d \cdot \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{K}{N} dx - \frac{H}{N} dy,$$

qui conduisent encore aux trois égalités suivantes,

$$(8) \qquad \begin{cases} N \dfrac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + L = 0, \\[2ex] N \dfrac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} - K = 0, \\[2ex] N \dfrac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + H = 0. \end{cases}$$

Il est maintenant facile de démontrer que l'intégrale $z = \omega(x, y, a, b, c)$, satisfaisant aux trois équations précédentes, doit nécessairement satisfaire aussi à l'équation (1). Pour cela, il suffit de remarquer que, en vertu de la condition $G = K^2 - HL + MN = 0$, l'équation (1) peut s'écrire ainsi,

Digitized by Google

$$(N\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+L)(N\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+H)=(N\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-K)^2.$$

98. Ainsi nous avons déjà une intégrale particulière de l'équation (1), renfermant trois constantes arbitraires a, b, c; cherchons à en tirer l'intégrale générale de la même équation, renfermant deux fonctions arbitraires.

Pour cela, remarquons préalablement que les arguments α et β des deux fonctions arbitraires de l'intégrale générale cherchée doivent être égaux; car on a en général, pour l'équation (1),

$$-\frac{\frac{\partial\alpha}{\partial x}}{\frac{\partial\alpha}{\partial y}}=\frac{\partial y}{\partial x(\alpha}=\frac{K-Nz'_{,}+\sqrt{G}}{H+Nz_{,,}},\qquad -\frac{\frac{\partial\beta}{\partial x}}{\frac{\partial\beta}{\partial y}}=\frac{\partial y}{\partial x(\beta}=\frac{K-Nz'_{,}-\sqrt{G}}{H+Nz_{,,}};$$

or, dans le cas actuel, $G=0$; par conséquent, on a

$$\frac{\partial\alpha}{\partial x}\frac{\partial\beta}{\partial y}-\frac{\partial\alpha}{\partial y}\frac{\partial\beta}{\partial x}=0,\quad \text{et}\quad \alpha=\beta.$$

99. Démontrons maintenant la proposition suivante. Soient φ et ψ des fonctions arbitraires; substituons α, $\varphi(\alpha)$, $\psi(\alpha)$ à la place de a, b, c dans l'intégrale $z=\omega\ (x,\ y,\ a,\ b,\ c)$, et déterminons la fonction α par la condition que la dérivée de la fonction ω par rapport à α soit égale à zéro. Les deux équations ainsi obtenues

(9) $$z=\omega[x,y,\alpha,\varphi(\alpha),\psi(\alpha)],\qquad \frac{\partial\omega}{\partial\alpha}=0$$

représenteront l'intégrale générale de l'équation (1).

En effet, si l'on différentie les équations (9) par rapport à x et à y, il vient

$$z'=\frac{\partial\omega}{\partial x},\qquad \frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha\partial x}=-\frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha^2}\frac{\partial\alpha}{\partial x},$$
$$z_{,}=\frac{\partial\omega}{\partial y},\qquad \frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha\partial y}=-\frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha^2}\frac{\partial\alpha}{\partial y}.$$

En différentiant encore une fois, par rapport à x et à y, les valeurs de z' et de $z_{,}$, on aura

$$z''=\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\omega}{\partial x\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial x}=\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha^2}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}\right)^2,$$
$$z'_{,}=\frac{\partial^2\omega}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2\omega}{\partial x\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial y}=\frac{\partial^2\omega}{\partial y\partial x}+\frac{\partial^2\omega}{\partial y\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial x}=\frac{\partial^2\omega}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha^2}\frac{\partial\alpha}{\partial x}\frac{\partial\alpha}{\partial y},$$
$$z_{,,}=\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\omega}{\partial y\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial y}=\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha^2}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right)^2.$$

Digitized by Google

Pour s'assurer de la vérité du théorème énoncé, il suffit de démontrer que, par la substitution des valeurs précédentes de z, z', $z_{,}$, z'', $z'_{,}$, $z_{,,}$ on satisfait à l'équation (1). Posons, pour abréger,

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2} = \omega'', \qquad \frac{\partial^2\omega}{\partial x\partial y} = \omega'_{,}, \qquad \frac{\partial^2\omega}{\partial y^2} = \omega_{,,},$$

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial \alpha^2} = -q, \qquad \frac{\partial\alpha}{\partial x} = h, \qquad \frac{\partial\alpha}{\partial y} = l,$$

et désignons le premier membre de l'équation (1) par F $(z'', z'_{,}, z_{,,})$. Le résultat de cette substitution prend, d'après le théorème de Taylor, la forme suivante,

$$\begin{aligned} &\mathrm{F}\,(\omega''+qh^2,\quad \omega'_{,}+qhl,\quad \omega_{,,}+ql^2) \\ &= \mathrm{F}(\omega'',\omega'_{,},\omega_{,,}) + \left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial\omega''}h^2 + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial\omega'_{,}}hl + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial\omega_{,,}}l^2\right)q \\ &\quad + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial\omega''^2}h^4 + 2\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial\omega''\partial\omega'_{,}}h^3 l + \frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial\omega'^2_{,}}h^2 l^2 + 2\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial\omega''\partial\omega_{,,}}h^2 l^2\right. \\ &\qquad\qquad \left. + 2\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial\omega'_{,}\partial\omega_{,,}}hl^3 + \frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial\omega_{,,}^2}l^4\right)q^2. \end{aligned}$$

Or on a

$$\mathrm{F}(\omega'',\omega'_{,},\omega_{,,}) = (N\omega''+L)\,(N\omega_{,,}+H) - (N\omega'_{,}-K)^2,$$

$$\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial\omega''} = N(H+N\omega_{,,}), \quad \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial\omega'_{,}} = 2N(K-N\omega'_{,}), \quad \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial\omega_{,,}} = N(L+N\omega'');$$

par conséquent, le premier et le second terme du développement précédent se réduisent à zéro, en vertu des équations (8), qui doivent avoir lieu independamment des valeurs de a, b, c.

Le multiplicateur de q^2 s'évanouit aussi; car toutes les dérivées du second ordre de F sont égales à zéro, à l'exception de

$$\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial\omega'^2_{,}} = -2N, \quad \text{et de} \quad \frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial\omega''\partial\omega_{,,}} = N,$$

qui donnent des termes égaux, mais de signes contraires.

Le théorème étant ainsi démontré, nous avons maintenant une méthode tout à fait régulière pour l'intégration de l'équation (1), sous les conditions

(10) $$G=0, \qquad \nabla_1\frac{K}{N}+\nabla_2\frac{L}{N}=0, \qquad \nabla_1\frac{H}{N}+\nabla_2\frac{K}{N}=0.$$

100. Il reste à éclaircir cette exposition théorique par un exemple particulier. Prenons, pour cela, l'équation

Digitized by Google

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)\left(1+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)=\left(1-\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2,$$

ou, avec d'autres notations,

$$(z'+z_{,}+z'')(1+z_{,,})=(1-z'_{,})^2.$$

Ici les conditions (10) sont évidemment satisfaites. Formons les deux équations simultanées

$$\nabla_1 u=\frac{\partial u}{\partial x}+z'\frac{\partial u}{\partial z}-(z'+z_{,})\frac{\partial u}{\partial z'}+\frac{\partial u}{\partial z_{,}}=0,$$

$$\nabla_2 u=\frac{\partial u}{\partial y}+z_{,}\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial u}{\partial z'}-\frac{\partial u}{\partial z_{,}}=0,$$

et trouvons toutes les intégrales distinctes de la seconde de ces équations. En prenant, pour cela, le système d'équations

$$dy=\frac{dz}{z_{,}}=dz'=-dz_{,},$$

on trouve les trois intégrales distinctes

$$v=z'+z_{,},\qquad v_1=y-z',\qquad v_2=z+\frac{z_{,}^{\,2}}{2}.$$

Cherchons maintenant une fonction F $(x,\ v,\ v_1\ v_2)$, qui satisfasse à l'équation $\nabla_1 \mathrm{F}=0$. En développant celle-ci, on trouve

$$\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x}\nabla_1 x+\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial v}\nabla_1 v+\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial v_1}\nabla_1 v_1+\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial v_2}\nabla_1 v_2=0.$$

Or on a

$$\nabla_1 x=1,\quad \nabla_1 v=1-v,\quad \nabla_1 v_1=v,\quad \nabla_1 v_2=v.$$

Donc l'équation précédente prend la forme

$$\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x}+\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial v}(1-v)+\left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial v_1}+\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial v_2}\right)v=0.$$

Ses trois intégrales distinctes s'obtiendront par l'intégration des équations

$$dx=\frac{dv}{1-v}=\frac{dv_1}{v}=\frac{dv_2}{v},$$

et seront ainsi de la forme

$$(1-v)e^x=a,\qquad v_1-v_2=b,\qquad v_1+v-x=c,$$

a, b, c désignant des constantes arbitraires. En substituant les valeurs de v, v_1, v_2, il vient

Digitized by Google

$$(1-z'-z_{,})e^x=a, \qquad y-z-z'-\frac{z_{,}^2}{2}=b, \qquad y-x-z_{,}=c,$$

et l'on en tire

$$z_{,}=c+x-y,$$
$$z'=1-ae^{-x}-x+y-c,$$
$$z=b+ae^{-x}+x+c-\frac{(c+x-y)^2}{2}.$$

Cette dernière équation représente une intégrale particulière de l'équa tion proposée. Elle donne, en effet, par différentiation,

$$\frac{\partial z}{\partial x}=1-ae^{-x}-x+y-c, \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=c+x-y,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=ae^{-x}-1, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=1, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-1.$$

On voit par là d'abord que les valeurs trouvées pour z' et po $\frac{\partial z}{\partial x}$ sont identiques, ainsi que celles de $z_{,}$ et de $\frac{\partial z}{\partial y}$; en second li que, par la substitution des valeurs des dérivées du premier et second ordre de z, on réduit à zéro les expressions

$$z'+z_{,}+z'', \qquad 1+z_{,,}, \qquad 1-z'_{,},$$

et par suite on satisfait à l'équation proposée. Il s'ensuit de là, e vertu de ce qui a été démontré plus haut, que si, dans l'intégral particulière précédente, deux des constantes a, b, c sont considéré comme des fonctions arbitraires de la troisième, et qu'on égale zéro la dérivée partielle de z par rapport à cette troisième constant les deux équations ainsi obtenues formeront l'intégrale générale l'équation proposée. En faisant, par exemple,

$$c=\alpha, \qquad b=\varphi(\alpha), \qquad a=\psi(\alpha),$$

nous représenterons l'intégrale générale sous la forme des de équations

$$\begin{cases} z=\varphi(\alpha)+\psi(\alpha)\,e^{-x}+x+\alpha-\dfrac{(\alpha+x-y)^2}{2}, \\ 0=\varphi'(\alpha)+\psi'(\alpha)e^{-x}-\alpha-x+y+1. \end{cases}$$

Il est aisé, du reste, de vérifier le résultat précédent, en faisa voir que l'on obtient l'équation proposée en éliminant α, $\varphi(\alpha)$ $\psi(\alpha)$ entre les deux équations précédentes. De la seconde de c équations on tire

Digitized by Google

$$\frac{\partial\alpha}{\partial x}=\frac{1+\psi'(\alpha)e^{-x}}{\varphi''(\alpha)+\psi''(\alpha)e^{-x}-1},\qquad \frac{\partial\alpha}{\partial y}=\frac{1}{\varphi''(\alpha)+\psi''(\alpha)e^{-x}-1},$$

d'où

$$\frac{\frac{\partial\alpha}{\partial x}}{\frac{\partial\alpha}{\partial y}}=-[1+\psi'(\alpha)e^{-x}].$$

En différentiant la première équation de l'intégrale, il vient

$$\frac{\partial z}{\partial x}=1-\psi(\alpha)e^{-x}-x+y-\alpha,\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=x-y+\alpha,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\psi(\alpha)e^{-x}-1-[1+\psi'(\alpha)e^{-x}]\frac{\partial\alpha}{\partial x},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=1+\frac{\partial\alpha}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-1+\frac{\partial\alpha}{\partial y},$$

d'où l'on tire

$$\frac{\partial\alpha}{\partial x}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-1,\qquad \frac{\partial\alpha}{\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+1,$$

$$-[1+\psi'(\alpha)e^{-x}]=\frac{\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}}{\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-1}.$$

D'après cela, la troisième des équations précédentes prend la forme

$$\frac{\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-1}{\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+1}=\frac{\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}}{\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-1},$$

ou

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-1\right)^2=\left(\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+1\right).$$

Et cette dernière équation est identique avec la proposée.

101. **Remarque I.** — Les conditions

$$\nabla_1\frac{K}{N}+\nabla_2\frac{L}{N}=0,\qquad \nabla_2\frac{K}{N}+\nabla_1\frac{H}{N}=0,$$

qui, jointes à la condition $G=0$, assurent le succès de l'intégration de l'équation (1) d'après la méthode précédente, peuvent s'exprimer très-simplement. Pour cela, remarquons que, pour $G=0$, l'application de la méthode précédente est encore assujettie à la condition de possibilité d'une seule et même intégrale particulière pour les trois équations

$$(1-z'-z_{,})e^{x}=a, \qquad y-z-z'-\frac{z_{,}^{2}}{2}=b,$$

et l'on en tire

$$z_{,}=c+x-y,$$
$$z'=1-ae^{-x}-x+y-c,$$
$$z=b+ae^{-x}+x+c-$$

Cette dernière équation représente un
tion proposée. Elle donne, en effet

signe ∂, q
...ment en tant q
...ore en tant qu'el
...uant ces opérations,
vient

$$\frac{\partial z}{\partial x}=1-ae^{-x}-x+$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=ae^{-x}-1,$$

On voit par là d'abord
$\frac{\partial z}{\partial x}$ sont identiques, ainsi

$$-\frac{L}{N}\frac{\partial\left(\frac{K}{N}\right)}{\partial z'}+\frac{K}{N}\frac{\partial\left(\frac{K}{N}\right)}{\partial z_{,}}=\nabla_1\frac{K}{N}$$

que, par la substitutio
second ordre de z, o

$$\frac{\partial.\left(\frac{K}{N}\right)}{\partial y}=\nabla_2\frac{K}{N}, \qquad \frac{\partial.\left(\frac{H}{N}\right)}{\partial x}=\nabla_1\frac{H}{N}.$$

et par suite on
vertu de ce q
particulière p ... les conditions (10) peuvent se représenter plus sim-
comme des ... plement comme il suit,
zéro la dér
les deux
l'équatio

$$\frac{\partial.\frac{K}{N}}{\partial x}+\frac{\partial.\frac{L}{N}}{\partial y}=0, \qquad \frac{\partial.\frac{K}{N}}{\partial y}+\frac{\partial.\frac{H}{N}}{\partial x}=0.$$

$G=0,$

nous
équ

102. **Remarque II.** — Il a été démontré ci-dessus que l'équa-
tion (1), sous les conditions (10), a une intégrale générale de la forme

$$z=\omega[x,y,\alpha,\varphi(\alpha),\psi(\alpha)], \qquad \frac{\partial.\omega}{\partial\alpha}=0.$$

La proposition réciproque est également vraie, savoir, qu'à toute intégrale de la forme précédente correspond une équation différentielle de la forme (1), satisfaisant aux conditions (10). En effet, en différentiant la première des équations précédentes, et ayant égard à la seconde, il vient

Digitized by Google

$$\frac{\partial.\omega}{\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial x}=\frac{\partial\omega}{\partial x}, \qquad z'=\frac{\partial\omega}{\partial y}+\frac{\partial.\omega}{\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial y}=\frac{\partial\omega}{\partial y},$$

$$z_{\prime\prime}=\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}+\frac{\partial.\frac{\partial\omega}{\partial y}}{\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial y},$$

$$\frac{\partial.\frac{\partial\omega}{\partial y}}{\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial x}.$$

...on des expressions ... employée plus haut, ... la signification du point

$$...)+\frac{\partial\omega}{\partial\psi}\psi'(\alpha),$$

$$\frac{...\omega}{\partial x\partial\alpha}+\frac{\partial^2\omega}{\partial x\partial\varphi}\varphi'(\alpha)+\frac{\partial^2\omega}{\partial x\partial\psi}\psi'(\alpha),$$

$$\frac{\frac{...\omega}{\partial x}}{\partial\alpha}=\frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha\partial x}+\frac{\partial^2\omega}{\partial\varphi\partial x}\varphi'(\alpha)+\frac{\partial^2\omega}{\partial\psi\partial x}\psi'(\alpha),$$

...différentiant par rapport à x la seconde équation de l'inté-...le, il vient

$$\frac{\partial.\frac{\partial\omega}{\partial\alpha}}{\partial x}=-\frac{\partial.^2\omega}{\partial\alpha^2}\frac{\partial\alpha}{\partial x};$$

par conséquent,

$$\frac{\partial.\frac{\partial\omega}{\partial x}}{\partial\alpha}=\frac{\partial\frac{\partial.\omega}{\partial\alpha}}{\partial x}=-\frac{\partial.^2\omega}{\partial\alpha^2}\;\frac{\partial\alpha}{\partial x}.$$

On trouve de même

$$\frac{\partial.\frac{\partial\omega}{\partial y}}{\partial\alpha}=\frac{\partial\frac{\partial.\omega}{\partial\alpha}}{\partial y}=-\frac{\partial^2.\omega}{\partial\alpha^2}\frac{\partial\alpha}{\partial y}.$$

Nous aurons, d'après cela,

$$z''=\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}-\frac{\partial^2.\omega}{\partial\alpha^2}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}\right)^2, \qquad z_{\prime\prime}=\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}-\frac{\partial^2.\omega}{\partial\alpha^2}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}\right)^2,$$

$$z'_{\prime}=\frac{\partial^2\omega}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2.\omega}{\partial\alpha^2}\frac{\partial\alpha}{\partial x}\frac{\partial\alpha}{\partial y}.$$

Digitized by Google

$$z'' + \frac{L}{N} = 0, \qquad z'_{,} - \frac{K}{N} = 0, \qquad z_{,,} + \frac{H}{N} = 0,$$

ce qui exige, relativement aux coefficients H, K, L, N, deux conditions, qui doivent nécessairement être équivalentes aux précédentes. En effet, ces équations donnent

$$z''_{,} = \frac{\partial.\left(-\frac{L}{N}\right)}{\partial y} = \frac{\partial.\left(\frac{K}{N}\right)}{\partial x}, \qquad z'_{,,} = \frac{\partial.\left(\frac{K}{N}\right)}{\partial y} = \frac{\partial.\left(-\frac{H}{N}\right)}{\partial x}$$

Nous indiquons ici par un point (.), placé après le signe ∂, qu'il faut différentier par rapport à x et à y, non-seulement en tant que ces variables entrent explicitement, mais encore en tant qu'elles entrent par le moyen de z, z', $z_{,}$. En effectuant ces opérations, et remplaçant z'', $z'_{,}$, $z_{,,}$ par leurs valeurs, il vient

$$\frac{\partial.\left(\frac{K}{N}\right)}{\partial x} = \frac{\partial\left(\frac{K}{N}\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(\frac{K}{N}\right)}{\partial z} z' - \frac{L}{N}\frac{\partial\left(\frac{K}{N}\right)}{\partial z'} + \frac{K}{N}\frac{\partial\left(\frac{K}{N}\right)}{\partial z_{,}} = \nabla_1 \frac{K}{N},$$

et de même

$$\frac{\partial.\left(\frac{L}{N}\right)}{\partial y} = \nabla_2 \frac{L}{N}, \qquad \frac{\partial.\left(\frac{K}{N}\right)}{\partial y} = \nabla_2 \frac{K}{N}, \qquad \frac{\partial.\left(\frac{H}{N}\right)}{\partial x} = \nabla_1 \frac{H}{N}.$$

Par conséquent, les conditions (10) peuvent se représenter plus simplement comme il suit,

$$G = 0, \qquad \frac{\partial.\frac{K}{N}}{\partial x} + \frac{\partial.\frac{L}{N}}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial.\frac{K}{N}}{\partial y} + \frac{\partial.\frac{H}{N}}{\partial x} = 0.$$

102. **Remarque II.** — Il a été démontré ci-dessus que l'équation (1), sous les conditions (10), a une intégrale générale de la forme

$$z = \omega[x, y, \alpha, \varphi(\alpha), \psi(\alpha)], \qquad \frac{\partial.\omega}{\partial \alpha} = 0.$$

La proposition réciproque est également vraie, savoir, qu'à toute intégrale de la forme précédente correspond une équation différentielle de la forme (1), satisfaisant aux conditions (10). En effet, en différentiant la première des équations précédentes, et ayant égard à la seconde, il vient

Digitized by Google

$$z' = \frac{\partial\omega}{\partial x} + \frac{\partial.\omega}{\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial x} = \frac{\partial\omega}{\partial x}, \qquad z' = \frac{\partial\omega}{\partial y} + \frac{\partial.\omega}{\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial y} = \frac{\partial\omega}{\partial y},$$

$$z'' = \frac{\partial^2\omega}{\partial x^2} + \frac{\partial.\frac{\partial\omega}{\partial x}}{\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial x}, \qquad z_{,,} = \frac{\partial^2\omega}{\partial y^2} + \frac{\partial.\frac{\partial\omega}{\partial y}}{\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial y},$$

$$z'_{,} = \frac{\partial^2\omega}{\partial y\partial x} + \frac{\partial.\frac{\partial\omega}{\partial x}}{\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial y} = \frac{\partial^2\omega}{\partial x\partial y} + \frac{\partial.\frac{\partial\omega}{\partial y}}{\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial x}.$$

Ici il convient d'introduire la transformation des expressions précédentes de z'', $z'_{,}$, $z_{,,}$ que nous avons déjà employée plus haut, mais sans explication. En ayant égard à la signification du point placé après le signe ∂, on a

$$\frac{\partial.\omega}{\partial\alpha} = \frac{\partial\omega}{\partial\alpha} + \frac{\partial\omega}{\partial\varphi}\varphi'(\alpha) + \frac{\partial\omega}{\partial\psi}\psi'(\alpha),$$

$$\frac{\partial.\frac{\partial.\omega}{\partial\alpha}}{\partial x} = \frac{\partial^2\omega}{\partial x\partial\alpha} + \frac{\partial^2\omega}{\partial x\partial\varphi}\varphi'(\alpha) + \frac{\partial^2\omega}{\partial x\partial\psi}\psi'(\alpha),$$

$$\frac{\partial.\frac{\partial\omega}{\partial x}}{\partial\alpha} = \frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha\partial x} + \frac{\partial^2\omega}{\partial\varphi\partial x}\varphi'(\alpha) + \frac{\partial^2\omega}{\partial\psi\partial x}\psi'(\alpha),$$

et, en différentiant par rapport à x la seconde équation de l'intégrale, il vient

$$\frac{\partial.\frac{\partial\omega}{\partial\alpha}}{\partial x} = -\frac{\partial.^2\omega}{\partial\alpha^2}\frac{\partial\alpha}{\partial x};$$

par conséquent,

$$\frac{\partial.\frac{\partial\omega}{\partial x}}{\partial\alpha} = \frac{\partial\frac{\partial.\omega}{\partial\alpha}}{\partial x} = -\frac{\partial.^2\omega}{\partial\alpha^2}\frac{\partial\alpha}{\partial x}.$$

On trouve de même

$$\frac{\partial.\frac{\partial\omega}{\partial y}}{\partial\alpha} = \frac{\partial\frac{\partial.\omega}{\partial\alpha}}{\partial y} = -\frac{\partial^2.\omega}{\partial\alpha^2}\frac{\partial\alpha}{\partial y}.$$

Nous aurons, d'après cela,

$$z'' = \frac{\partial^2\omega}{\partial x^2} - \frac{\partial^2.\omega}{\partial\alpha^2}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}\right)^2, \qquad z_{,,} = \frac{\partial^2\omega}{\partial y^2} - \frac{\partial^2.\omega}{\partial\alpha^2}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}\right)^2,$$

$$z'_{,} = \frac{\partial^2\omega}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2.\omega}{\partial\alpha^2}\frac{\partial\alpha}{\partial x}\frac{\partial\alpha}{\partial y}.$$

Digitized by Google

En éliminant entre ces équations $\frac{\partial\alpha}{\partial x}$ et $\frac{\partial\alpha}{\partial y}$, on trouve l'équation

$$\left(z'' - \frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}\right)\left(z_{\prime\prime} - \frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}\right) = \left(z'_{\prime} - \frac{\partial^2\omega}{\partial x\partial y}\right)^2.$$

Enfin, à l'aide des équations

$$z = \omega, \qquad z' = \frac{\partial\omega}{\partial x}, \qquad z_{\prime} = \frac{\partial\omega}{\partial y},$$

nous pourrons exprimer α, $\varphi(\alpha)$, $\psi(\alpha)$ au moyen de x, y, z, z', $z_{\prime}$, et substituer ces valeurs dans les fonctions

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}, \qquad \frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}, \qquad \frac{\partial^2\omega}{\partial x\partial y},$$

après quoi ces dernières prendront une forme que nous pourrons représenter par

$$-\frac{L}{N}, \qquad -\frac{H}{N}, \qquad \frac{K}{N},$$

et l'équation précédente s'écrira ainsi

$$\left(z'' + \frac{L}{N}\right)\left(z_{\prime\prime} + \frac{H}{N}\right) = \left(z'_{\prime} - \frac{K}{N}\right)^2,$$

c'est-à-dire que nous aurons une équation de la forme (1). On voit qu'elle satisfait à la condition (10) par la raison que, en vertu de la provenance des coefficients $-\frac{L}{N}$, $-\frac{H}{N}$, $\frac{K}{N}$, ceux-ci doivent vérifier les égalités

$$\frac{\partial.\left(-\frac{L}{N}\right)}{\partial y} = \frac{\partial.\left(\frac{K}{N}\right)}{\partial x}, \qquad \frac{\partial.\left(-\frac{H}{N}\right)}{\partial x} = \frac{\partial.\left(\frac{K}{N}\right)}{\partial y},$$

lesquelles, comme on l'a démontré plus haut, se ramènent aux suivantes,

$$\nabla_1\frac{K}{N} + \nabla_2\frac{L}{N} = 0, \qquad \nabla_2\frac{K}{N} + \nabla_1\frac{L}{N} = 0.$$

L'égalité $G = 0$ résulte de la forme même de l'équation.

Au point de vue géométrique, lorsque x, y, z sont les coordonnées des points d'une surface, les deux équations de l'intégrale générale

$$z = \omega[x, y, \alpha, \varphi(\alpha), \psi(\alpha)] = 0, \qquad \frac{\partial.\omega}{\partial\alpha} = 0,$$

Digitized by Google

représentent une surface enveloppant une série de surfaces données par l'équation intégrale particulière

$$z = \omega(x, y, a, b, c),$$

lorsqu'on y fait varier d'une manière continue les trois paramètres a, b, c, en les liant par deux relations arbitraires

$$b = \varphi(a), \qquad c = \psi(a).$$

Par suite, l'équation (1), sous les conditions (10), représente l'équation différentielle commune à ces surfaces enveloppantes.

§. 14.

103. Après avoir montré de quelle manière on intègre l'équation (1) du §. précédent, lorsque les trois quantités

$$\nabla_1 \frac{H}{N} + \nabla_2 \frac{K \pm \sqrt{G}}{N} = P, \quad \nabla_2 \frac{L}{N} + \nabla_1 \frac{K \mp \sqrt{G}}{N} = Q, \quad \pm \frac{2\sqrt{G}}{N} = R$$

se réduisent à zéro, passons maintenant à la considération des autres cas qui peuvent se présenter.

Si P, Q, R sont différents de zéro, alors les deux équations

$$\nabla_1 u = \frac{\partial u}{\partial x} + z' \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{L}{N} \frac{\partial u}{\partial z'} + \frac{K \pm \sqrt{G}}{N} \frac{\partial u}{\partial z_{\prime}} = 0,$$

$$\nabla_2 u = \frac{\partial u}{\partial y} + z_{\prime} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{K \mp \sqrt{G}}{N} \frac{\partial u}{\partial z'} - \frac{H}{N} \frac{\partial u}{\partial z_{\prime}} = 0$$

ne peuvent admettre une intégrale commune que dans le cas où a lieu en même temps la troisième équation

$$\nabla_1 \nabla_2 u - \nabla_2 \nabla_1 u = \nabla_3 u = R \frac{\partial u}{\partial z} + Q \frac{\partial u}{\partial z'} - P \frac{\partial u}{\partial z_{\prime}} = 0.$$

En admettant l'existence de cette dernière, examinons à quelles conditions et en quel nombre il peut y avoir des intégrales satisfaisant à la fois aux trois équations précédentes. Afin de résoudre ces deux questions aussi simplement que possible, ramenons au nombre minimum les dérivées partielles dans chaque équation. Pour cela, entre les deux premières équations éliminons, à l'aide de la troisième, une des dérivées $\frac{\partial u}{\partial z}$, $\frac{\partial u}{\partial z'}$, $\frac{\partial u}{\partial z_{\prime}}$. Si l'on suppose R différent de zéro,

Digitized by Google

et qu'on élimine ainsi $\frac{\partial u}{\partial z}$, on ramènera les trois équations considérées à la forme

$$\nabla' u = \frac{\partial u}{\partial x} + A\frac{\partial u}{\partial z'} + B\frac{\partial u}{\partial z_i} = 0,$$

$$\nabla'' u = \frac{\partial u}{\partial y} + C\frac{\partial u}{\partial z'} + D\frac{\partial u}{\partial z_i} = 0,$$

$$\nabla''' u = \frac{\partial u}{\partial z} + E\frac{\partial u}{\partial z'} + F\frac{\partial u}{\partial z_i} = 0,$$

où les nouveaux symboles introduits ∇', ∇'', ∇''' sont déterminés par les formules

$$\nabla' = \nabla_1 - \frac{z_i}{R}\nabla_3, \qquad \nabla'' = \nabla_2 - \frac{z'}{R}\nabla_3, \qquad \nabla''' = \frac{1}{R}\nabla_3,$$

les expressions des coefficients A, B, ..., F au moyen des coefficients des équations précédentes étant faciles à obtenir. Les conditions nécessaires pour que, aux trois équations $\nabla' u = 0$, $\nabla'' u = 0$, $\nabla''' = 0$, appartienne une intégrale commune consistent en ce que les résultats des opérations

$$\nabla'\nabla'' u, \qquad \nabla'\nabla''' u, \qquad \nabla''\nabla''' u$$

soient respectivement égaux aux suivants,

$$\nabla''\nabla' u, \qquad \nabla'''\nabla' u, \qquad \nabla'''\nabla'' u.$$

Or chacune des expressions

$$\nabla'\nabla'' u - \nabla''\nabla' u, \qquad \nabla'\nabla''' u - \nabla'''\nabla' u, \qquad \nabla''\nabla''' u - \nabla'''\nabla'' u$$

est de la forme

$$S\frac{\partial u}{\partial z'} + T\frac{\partial u}{\partial z_i},$$

c'est-à-dire qu'elle est linéaire et homogène par rapport seulement aux deux dérivées $\frac{\partial u}{\partial z'}$, $\frac{\partial u}{\partial z_i}$. Par suite, ces expressions peuvent s'annuler de deux manières:

1°. Ou parce que les coefficients de $\frac{\partial u}{\partial z'}$ et de $\frac{\partial u}{\partial z_i}$ s'annulent séparément dans les trois expressions;

2°. Ou, si les coefficients de $\frac{\partial u}{\partial z'}$ et de $\frac{\partial u}{\partial z_i}$ ne sont pas nuls dans les trois expressions, parce que l'on égale à zéro des expressions qui

Digitized by Google

ne s'annulent par d'elles-mêmes, et qu'ainsi aux trois équations données on en joint de nouvelles, algébriquement différentes des équations données, puisqu'elles ne contiennent pas les dérivées $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$.

104. Considérons à part chacun de ces deux cas, et occupons-nous d'abord du premier, dans lequel on a, par hypothèse, les trois identités

$$\nabla'\nabla''u = \nabla''\nabla'u, \quad \nabla'\nabla'''u = \nabla'''\nabla'u, \quad \nabla''\nabla'''u = \nabla'''\nabla''u$$

Il est aisé de faire voir que, dans ce cas, les trois équations simultanées

$$\nabla' u = 0, \quad \nabla'' u = 0, \quad \nabla''' u = 0$$

doivent avoir d e u x intégrales communes.

Pour cela, en intégrant complétement l'une d'entre elles, par exemple la première

$$\nabla' u = \frac{\partial u}{\partial x} + A\frac{\partial u}{\partial z'} + B\frac{\partial u}{\partial z_{,}} = 0,$$

nous trouverons seulement deux intégrales distinctes de cette équation,

$$v = \text{const.}, \quad v_1 = \text{const.}$$

Ensuite, la recherche de l'intégrale

$$\mathrm{F}(y, v, v_1) = \text{const.},$$

satisfaisant aux deux premières équations, conduit à l'équation

$$\nabla''\mathrm{F} = \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y}\nabla'' y + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial v}\nabla'' v + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial v_1}\nabla'' v_1 = 0,$$

où l'on a $\nabla'' y = 1$, et où les quantités $\nabla'' v$, $\nabla'' v_1$ s'expriment au moyen des seules variables v, v_1, puisque, en vertu des identités

$$\nabla'\nabla'' v = \nabla''\nabla' v = \nabla'' 0 = 0, \quad \nabla'\nabla'' v_1 = \nabla''\nabla' v_1 = \nabla'' 0 = 0,$$

$\nabla'' v$ et $\nabla'' v_1$ sont des intégrales des l'équation $\nabla' u = 0$. En posant donc

$$\nabla'' v = f(v, v_1), \quad \nabla'' v_1 = f_1(v, v_1),$$

on aura, pour déterminer la fonctions F, l'équation

$$\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial v} f(v, v_1) + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial v_1} f_1(v, v_1) = 0,$$

dont l'intégration complète fournit les deux intégrales distinces

Digitized by Google

$$w = F(y, v, v_1) = \text{const.}, \qquad w_1 = F_1(y, v, v_1) = \text{const.}$$

Enfin, la recherche de l'intégrale

$$\Phi\,(z, w, w_1) = \text{const.},$$

satisfaisant à la fois aux trois équations données, conduit à l'équation

$$\nabla''' \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \nabla''' z + \frac{\partial \Phi}{\partial w} \nabla''' w + \frac{\partial \Phi}{\partial w_1} \nabla''' w_1 = 0,$$

dans laquelle $\nabla''' z = 1$, et les quantités $\nabla''' w$, $\nabla''' w_1$ s'expriment au moyen de w et de w_1 puisque, en vertu des identités

$$\nabla''\nabla''' w = \nabla'''\nabla'' w = \nabla''' 0 = 0, \; \nabla''\nabla''' w_1 = \nabla'''\nabla'' w_1 = \nabla''' 0 = 0,$$

$\nabla''' w$ et $\nabla''' w_1$ sont des intégrales de l'équation $\nabla''' u = 0$. Donc, en posant

$$\nabla''' w = \varphi(w, w_1), \qquad \nabla''' w_1 = \varphi_1(w, w_1),$$

on aura, pour déterminer la fonction Φ, l'équation

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial \Phi}{\partial w} \varphi(w, w_1) + \frac{\partial \Phi}{\partial w_1} \varphi_1(w, w_1) = 0,$$

dont l'intégration complète fournit les deux intégrales distinctes

$$u_1 = \Phi_1(z, w, w_1) = \text{const.}, \qquad u_2 = \Phi_2(z, w, w_1) = \text{const.},$$

satisfaisant aux trois équations simultanées

$$\nabla' u = 0, \qquad \nabla'' u = 0, \qquad \nabla''' u = 0.$$

Il est aisé de voir que ces deux intégrales satisfont aussi aux trois équations

$$\nabla_1 u = 0, \qquad \nabla_2 u = 0, \qquad \nabla_3 u = 0,$$

puisque l'on a

$$\nabla_3 u = R \nabla''' u, \qquad \nabla_2 u = \nabla'' u + z_{\prime} \nabla''' u, \qquad \nabla_1 u = \nabla' u + z' \nabla''' u,$$

et que les seconds membres de ces dernières égalités s'annulent, lorsqu'on y remplace u par u_1 ou par u_2.

105. Ainsi, pour déterminer les deux intégrales qui satisfont aux trois équations simultanées $\nabla' u = 0$, $\nabla'' u = 0$, $\nabla''' u = 0$, il faut commencer par intégrer complétement l'une des trois équations, c'est-à-dire par déterminer deux intégrales distinctes de cette équation. Mais on peut quelquefois se borner à la détermination d'une de ces deux intégrales; car la substitution d'une intégrale de l'une des trois équations $\nabla' u = 0$, $\nabla'' u = 0$, $\nabla''' u = 0$ dans les

Digitized by Google

premiers membres des deux autres doit donner des intégrales de la première. En effet, si $v = \text{const.}$ est une intégrale de l'équation $\nabla' u = 0$, les identités

$$\nabla' \nabla'' v = \nabla'' \nabla' v = 0, \qquad \nabla' \nabla''' v = \nabla''' \nabla' v = 0$$

font voir que $\nabla'' v = \text{const.}$ et $\nabla''' v = \text{const.}$ sont aussi des intégrales de l'équation $\nabla' u = 0$, et il suffit que l'une d'elles soit distincte de l'intégrale $v = \text{const.}$, pour que cette méthode puisse simplifier la solution du problème de l'intégration simultanée des équations $\nabla' u = 0$, $\nabla'' u = 0$, $\nabla''' u = 0$.

106. D'après ce que nous avons vu, pour que l'on puisse déterminer par la méthode précédente deux intégrales satisfaisant aux trois équations simultanées

$$\nabla' u = 0, \qquad \nabla'' u = 0, \qquad \nabla''' u = 0,$$

trois conditions sont nécessaires, lesquelles sont exprimées par les égalités

$$\nabla' \nabla'' u - \nabla'' \nabla' u = 0, \qquad \nabla' \nabla''' u - \nabla''' \nabla' u = 0,$$
$$\nabla'' \nabla''' u - \nabla''' \nabla'' u = 0,$$

qui doivent avoir lieu pour toute fonction u. Mais il est facile de voir que deux de ces conditions sont suffisantes, la troisième étant une conséquence des deux autres, en vertu d'une relation trés-simple qui existe entre les premiers membres de ces équations de condition. Cette relation est exprimée par l'égalité

$$(\nabla' \nabla'' u - \nabla'' \nabla' u) + z_{,} (\nabla' \nabla''' u - \nabla''' \nabla' u)$$
$$- z' (\nabla'' \nabla''' u - \nabla''' \nabla'' u) = 0,$$

qui a lieu pour toute fonction u.

Comme cette égalité ne dépend que des propriétés des symboles ∇', ∇'', ∇''', et est complétement indépendante de la valeur de la fonction représentée par la lettre u, on pourra faire abstraction de celle-ci, et alors le théorème à démontrer s'exprimera symboliquement de la manière suivante:

$$(\nabla' \nabla'' - \nabla'' \nabla') + z_{,} (\nabla' \nabla''' - \nabla''' \nabla') - z' (\nabla'' \nabla''' - \nabla''' \nabla'') = 0.$$

Pour les démontrer, rappelons-nous que ∇', ∇'', ∇''' s'expriment au moyen de ∇_1, ∇_2, ∇_3, comme il suit,

$$\nabla' = \nabla_1 - \frac{z_{,}}{R} \nabla_3, \qquad \nabla'' = \nabla_2 - \frac{z'}{R} \nabla_3, \qquad \nabla''' = \frac{1}{R} \nabla_3,$$

et que, de plus,

$$\nabla_3 = \nabla_1 \nabla_2 - \nabla_2 \nabla_1 .$$

En vertu de ces définitions, on obtient facilement les égalités symboliques suivantes (qu'il est d'ailleurs facile de changer en égalités ordinaires, en rétablissant sous les signes d'opérations la fonction u, qu'on a omise),

$$\nabla' \nabla'' - \nabla'' \nabla'$$

$$= \left[1 - \left(\nabla_1 \frac{z_{\prime}}{R}\right) + \left(\nabla_2 \frac{z'}{R}\right) + \frac{z'}{R}\left(\nabla_3 \frac{z_{\prime}}{R}\right) - \frac{z_{\prime}}{R}\left(\nabla_3 \frac{z'}{R}\right)\right] \nabla_3$$

$$- \frac{z_{\prime}}{R}(\nabla_1 \nabla_3 - \nabla_3 \nabla_1) + \frac{z'}{R}(\nabla_2 \nabla_3 - \nabla_3 \nabla_2),$$

$$\nabla' \nabla''' - \nabla''' \nabla'$$

$$= \frac{1}{R}(\nabla_1 \nabla_3 - \nabla_3 \nabla_1) + \left[\left(\nabla_1 \frac{1}{R}\right) - \frac{z'}{R}\left(\nabla_3 \frac{1}{R}\right) + \frac{1}{R}\left(\nabla_3 \frac{z'}{R}\right)\right] \nabla_3,$$

$$\nabla'' \nabla''' - \nabla''' \nabla''$$

$$= \frac{1}{R}(\nabla_2 \nabla_3 - \nabla_3 \nabla_2) + \left[\left(\nabla_2 \frac{1}{R}\right) - \frac{z_{\prime}}{R}\left(\nabla_3 \frac{1}{R}\right) + \frac{1}{R}\left(\nabla_3 \frac{z'}{R}\right)\right] \nabla_3 .$$

Ajoutant ces trois égalités, après avoir multiplié la seconde par $z_{\prime}$, la troisième par $-z'$, et effectué des réductions évidentes, il vient

$$(\nabla' \nabla'' - \nabla'' \nabla') + z_{\prime}(\nabla' \nabla''' - \nabla''' \nabla') - z'(\nabla'' \nabla''' - \nabla''' \nabla'')$$
$$= \frac{R - \nabla_1 z_{\prime} + \nabla_2 z'}{R} .$$

Or

$$R = \frac{\pm 2\sqrt{G}}{N}, \qquad \nabla_1 z_{\prime} = \frac{K \pm \sqrt{G}}{N}, \qquad \nabla_2 z' = \frac{K \mp \sqrt{G}}{N};$$

donc

$$R - \nabla_1 z_{\prime} + \nabla_2 z' = 0,$$

et par suite

$$(\nabla' \nabla'' - \nabla'' \nabla') + z_{\prime}(\nabla' \nabla''' - \nabla''' \nabla') - z'(\nabla'' \nabla''' - \nabla''' \nabla'') = 0;$$

ce qu'il fallait démontrer.

107. Passons maintenant aux autres cas qui peuvent se présenter dans l'intégration des équations

$$\nabla' u = 0, \qquad \nabla'' u = 0, \qquad \nabla''' u = 0.$$

Ces cas sont au nombre de deux:

(a) Lorsqu'aucune des expressions

$$\nabla'\nabla'' u - \nabla''\nabla' u, \qquad \nabla'\nabla''' u - \nabla'''\nabla' u, \qquad \nabla''\nabla''' u - \nabla'''\nabla'' u$$

ne se réduit identiquement à zéro;

(b) Lorsqu'une de ces expressions se réduit identiquement à zéro.

Comme, dans chacun de ces cas, ces trois expressions doivent être égales à zéro pour que les trois équations $\nabla' u = 0$, $\nabla'' u = 0$, $\nabla''' u = 0$ puissent admettre une intégrale commune, il suffira alors dans le cas (a), en vertu du théorème démontré, d'égaler deux d'entre elles à zéro. Ainsi aux trois équations proposées on joindra encore ces deux-ci,

$$S\frac{\partial u}{\partial z'} + T\frac{\partial u}{\partial z_{\prime}} = 0, \qquad S_1\frac{\partial u}{\partial z'} + T_1\frac{\partial u}{\partial z_{\prime}} = 0.$$

Si ces dernières sont algébriquement distinctes, on aura, en même temps que les équations proposées, cinq équations linéaires et homogènes par rapport aux cinq dérivées $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$, $\frac{\partial u}{\partial z'}$, $\frac{\partial u}{\partial z_{\prime}}$. De ces équations on ne peut tirer qu'une seule conclusion, savoir, que l'on a

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial z'} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial z_{\prime}} = 0,$$

ce qui montre que, aux trois équations proposées, et par suite aussi aux équations

$$\nabla_1 u = 0, \qquad \nabla_2 u = 0, \qquad \nabla_3 u = 0,$$

on ne peut satisfaire que par la substitution d'une quantité constante au lieu de u.

Si les équations

$$S\frac{\partial u}{\partial z'} + T\frac{\partial u}{\partial z_{\prime}} = 0, \qquad S_1\frac{\partial u}{\partial z'} + T_1\frac{\partial u}{\partial z_{\prime}} = 0$$

ne sont pas algébriquement distinctes, il suffira de joindre l'une d'entre elles aux équations proposées. Le reste de l'analyse sera identique à ce que nous allons maintenant expliquer pour le cas (b).

108. Dans ce dernier cas, une des trois expressions

$$\nabla'\nabla'' u - \nabla''\nabla' u, \qquad \nabla'\nabla''' u - \nabla'''\nabla' u, \qquad \nabla''\nabla''' u - \nabla'''\nabla'' u$$

Digitized by Google

se réduit, par hypothèse, identiquement à zéro. Par conséquent, en vertu du théorème démontré (art. 106), il suffira d'égaler à zéro une des deux expressions qui ne s'évanouissent pas. On obtient ainsi un système d'équations de la forme

$$\nabla' u = \frac{\partial u}{\partial x} + A\frac{\partial u}{\partial z'} + B\frac{\partial u}{\partial z_{,}} = 0,$$

$$\nabla'' u = \frac{\partial u}{\partial y} + C\frac{\partial u}{\partial z'} + D\frac{\partial u}{\partial z_{,}} = 0,$$

$$\nabla''' u = \frac{\partial u}{\partial z} + E\frac{\partial u}{\partial z'} + \mathrm{F}\frac{\partial u}{\partial z_{,}} = 0,$$

$$\nabla'''' u = S\frac{\partial u}{\partial z'} + T\frac{\partial u}{\partial z_{,}} = 0,$$

lesquelles, par l'élimination de l'une des dérivées $\frac{\partial u}{\partial z'}$, $\frac{\partial u}{\partial z_{,}}$ entre les trois premières au moyen de la quatrième, se changent dans les suivantes,

$$\triangle_1 u = \frac{\partial u}{\partial x} + a\frac{\partial u}{\partial z_{,}} = 0,$$

$$\triangle_2 u = \frac{\partial u}{\partial y} + b\frac{\partial u}{\partial z_{,}} = 0,$$

$$\triangle_3 u = \frac{\partial u}{\partial z} + c\frac{\partial u}{\partial z_{,}} = 0,$$

$$\triangle_4 u = \frac{\partial u}{\partial z'} + d\frac{\partial u}{\partial z_{,}} = 0,$$

où l'on a posé

$$\triangle_1 = \nabla' - \frac{A}{S}\nabla'''', \qquad \triangle_2 = \nabla'' - \frac{C}{S}\nabla'''', \qquad \triangle_3 = \nabla''' - \frac{E}{S}\nabla'''',$$

$$\triangle_4 = \frac{1}{S}\nabla'''',$$

a, b, c, d s'exprimant d'une manière connue au moyen des coefficients des équations précédentes.

Le dernier système d'équations n'admet une intégrale commune que dans les cas seulement où l'on a identiquement les égalités

$$\triangle_i \triangle_k u = \triangle_k \triangle_i u,$$

pour toute fonction u, et pour toutes les valeurs différentes de i et de k, prises dans la suite des nombres 1, 2, 3, 4.

Digitized by Google

Dans le cas contraire, évidemment, il n'est possible de satisfaire simultanément ni aux quatre équations considérées, ni aux équations d'où elles sont déduites. Or toutes ces équations ont pour origine commune les deux équations primitives $\nabla_1 u = 0$, $\nabla_2 u = 0$; donc celles-ci, dans ce cas, n'admettent pas non plus d'intégrale commune.

Si la condition $\triangle_i \triangle_k u = \triangle_k \triangle_i u$ est satisfaite, comme on l'a exigé ci-dessus, la méthode pour la détermination d'une intégrale unique, commune aux quatre équations

$$\triangle_1 u = 0, \qquad \triangle_2 u = 0, \qquad \triangle_3 u = 0, \qquad \triangle_4 u = 0$$

sera encore absolument la même que celle qui a été exposée en détail à propos de l'intégration des systèmes précédents. Il nous suffira donc d'en indiquer brièvement l'application.

109. Commençons par déterminer l'intégrale de l'une des équations précédentes, de la première, par exemple; on l'obtient au moyen de l'équation

$$adx - dz_{,} = 0,$$

entre les deux variables x et $z_{,}$; soit $v =$ const. cette intégrale. En cherchant l'intégrale

$$w = \mathrm{F}(y, v) = \text{const.},$$

qui satisfait à la première équation et à la seconde, on arrive à une équation de la forme

$$\triangle_2 w = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial v} f(v) = 0,$$

$f(v)$ étant une fonction connue. Par suite, l'intégrale cherchée s'obtient au moyen d'une quadrature,

$$w = y - \int \frac{dv}{f(v)} = \text{const.}$$

Pour trouver l'intégrale

$$t = \Phi(z, w) = \text{const.},$$

satisfaisant aux trois premières équations, on est conduit à une équation de la forme

$$\triangle_3 t = \frac{\partial t}{\partial z} + \frac{\partial t}{\partial w} \varphi(w) = 0,$$

$\varphi(w)$ étant une fonction connue, et l'intégrale cherchée s'exprime au moyen d'une quadrature

Digitized by Google

se réduit, par hypothèse, identiquement à zéro. Par c vertu du théorème démontré (art. 106), il suffira d'é des deux expressions qui ne s'évanouissent pas. Or système d'équations de la forme

$$\nabla' u = \frac{\partial u}{\partial x} + A\frac{\partial u}{\partial z'} + B\frac{\partial u}{\partial z_{,}} =$$

$$\nabla'' u = \frac{\partial u}{\partial y} + C\frac{\partial u}{\partial z'} + D\frac{\partial}{}$$

$$\nabla''' u = \frac{\partial u}{\partial z} + E\frac{\partial u}{\partial z'} +$$

$$\nabla'''' u = S\frac{\partial u}{\partial z'} +$$

lesquelles, par l'élimination de ...ement aux deux équations trois premières au moyen d suivantes,

$$\nabla_2 u = 0,$$

Δ

$$+z'\nabla''' u, \quad \nabla_2 u = \nabla'' u + z_{,}\nabla''' u,$$

$$\nabla'' u = \Delta_2 u + C\Delta_4 u, \quad \nabla''' u = \Delta_3 u + E\Delta_4 u$$

les valeurs de $\Delta_1 u$, $\Delta_2 u$, $\Delta_3 u$, $\Delta_4 u$ doivent se réduire à par la substitution de u_1 à la place de u.

où l'on a po

$\Delta_1 = \nabla'$

§. 15.

110. Dans les deux paragraphes précédents, nous avons exposé une méthode pour déterminer toutes les intégrales possibles des deux systèmes incomplets d'équations

a, b, des

$$Hdy + Ndz_{,} - (K \pm \sqrt{G})\,dx = 0,$$

$$Hdz' + K \mp \sqrt{G})\,dz_{,} + M dx = 0,$$

$$dz - z'\,dx - z_{,}dy = 0,$$

q

dont l'un correspond aux signes supérieurs, l'autre aux signes inférieurs du radical $\sqrt{G}$.

Dans l'exposition de cette méthode, on a eu en vue moins les formules générales que les procédés généraux pour une telle recherche. En conséquence, on n'a pas mentionné les cas où, par exemple, les

Digitized by Google

... qui entrent en dénominateurs dans nos équa-... ; en effet, les variables x, y, z, z', $z_{,}$ jouent ... identiques, et l'on peut toujours prendre ... pour éviter les difficultés en question.

... cette manière, que le nombre ...es d'équations ci-dessus peut ...lons maintenant supposer ...intégrales sont possi-... équations, et nous ...ut obtenir l'intégrale

$$(z''z_{,,}-z'^{2}_{,})=0.$$

...ui où les deux systèmes d'équations ... où, en vertu de la condition $G=0$, ... été déjà étudié complétement dans le §. ... passer tout à l'heure à l'examen des autres ...aintenant à propos de compléter la remarque ...ue, dans les deux systèmes d'équations considérés, ..., y, z, z', $z_{,}$ jouent des rôles identiques. Pour cela, ... démontrer que, dans l'équation (1) elle-même, on peut, ...es variables indépendantes x et y, introduire successivement ... $z_{,}$, x et $z_{,,}$ y et z', et choisir chaque fois la variable dépendante ... manière que le type général de l'équation transformée ne soit pas altéré.

112. La première de ces transformations, indiqueé par Legendre (*), peut se présenter comme il suit. Supposons que les expressions de ..., z', $z_{,}$ en fonction de x et de y soient

$$z=f(x,y),\qquad z'=\varphi(x,y),\qquad z_{,}=\psi(x,y);$$

...es seconds membres de ces équations doivent satisfaire aux conditions

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\varphi,\qquad \frac{\partial f}{\partial y}=\psi.$$

...u moyen des équations $z'=\varphi$, $z_{,}=\psi$, on peut introduire comme ...ariables indépendantes z' et $z_{,}$ au lieu de x et de y. De plus, au ...eu de la variable dépendante z, introduisons la variable w, déter-...inée par l'équation

(*) Histoire de l'Académie des Sciences, 1787. Mémoire sur l'intégration de quelques équations aux différences partielles, par Le Gendre, p. 314.

Digitized by Google

$$t = z - \int \frac{dw}{\varphi(w)} = \text{const.}$$

Enfin, la détermination de l'intégrale

$$u_1 = \Psi(z', t) = \text{const.},$$

satisfaisant à la fois aux quatre équations, conduit à l'équation

$$\triangle_4 u_1 = \frac{\partial u_1}{\partial z'} + \frac{\partial u_1}{\partial t}\,\psi(t) = 0,$$

$\psi(t)$ étant une fonction connue; et l'intégrale cherchée s'exprime encore au moyen d'une quadrature,

$$u_1 = z' - \int \frac{dt}{\psi(t)} = \text{const.}$$

Cette dernière intégrale satisfait également aux deux équations simultanées

$$\nabla_1 u = 0, \qquad \nabla_2 u = 0,$$

puisque l'on a

$$\nabla_1 u = \nabla' u + z' \nabla''' u, \qquad \nabla_2 u = \nabla'' u + z_, \nabla''' u,$$

et

$$\nabla' u = \triangle_1 u + A \triangle_4 u, \quad \nabla'' u = \triangle_2 u + C \triangle_4 u, \quad \nabla''' u = \triangle_3 u + E \triangle_4 u,$$

et que les valeurs de $\triangle_1 u$, $\triangle_2 u$, $\triangle_3 u$, $\triangle_4 u$ doivent se réduire à zéro par la substitution de u_1 à la place de u.

§. 15.

110. Dans les deux paragraphes précédents, nous avons exposé une méthode pour déterminer toutes les intégrales possibles des deux systèmes incomplets d'équations

$$Hdy + Ndz_, - (K \pm \sqrt{G})\,dx = 0,$$

$$Hdz' + K \mp \sqrt{G})\,dz_, + M dx = 0,$$

$$dz - z'\,dx - z_, dy = 0,$$

dont l'un correspond aux signes supérieurs, l'autre aux signes inférieurs du radical $\sqrt{G}$.

Dans l'exposition de cette méthode, on a eu en vue moins les formules générales que les procédés généraux pour une telle recherche. En conséquence, on n'a pas mentionné les cas où, par exemple, les

Digitized by Google

coefficients N, R, etc., qui entrent en dénominateurs dans nos équations, se réduisent à zéro; en effet, les variables x, y, z, z', $z_{,}$ jouent dans ces équations, des rôles identiques, et l'on peut toujours prendre l'une d'elles à la place de l'autre, pour éviter les difficultés en question.

111. Après nous être assurés, de cette manière, que le nombre des intégrales de chacun des deux systèmes d'équations ci-dessus peut varier de trois à zéro inclusivement, nous allons maintenant supposer que différentes combinaisons de ces nombres d'intégrales sont possibles en même temps pour l'un et l'autre système d'équations, et nous allons chercher comment, dans chaque cas, on peut obtenir l'intégrale générale finie de l'équation

$$(1)\qquad Hz''+2Kz'_{,}+Lz_{,,}+M+N(z''z_{,,}-z'^{2}_{,})=0.$$

Le plus simple de ces cas, celui où les deux systèmes d'équations ont chacun trois intégrales, et où, en vertu de la condition $G=0$, leur différence s'évanouit, a été déjà étudié complétement dans le §. précédent; nous allons passer tout à l'heure à l'examen des autres cas. Mais il est maintenant à propos de compléter la remarque faite plus haut, que, dans les deux systèmes d'équations considérés, les variables x, y, z, z', $z_{,}$ jouent des rôles identiques. Pour cela, nous allons démontrer que, dans l'équation (1) elle-même, on peut, au lieu des variables indépendantes x et y, introduire successivement z' et $z_{,}$, x et $z_{,}$, y et z', et choisir chaque fois la variable dépendante de manière que le type général de l'équation transformée ne soit pas altéré.

112. La première de ces transformations, indiquée par Legendre (*), peut se présenter comme il suit. Supposons que les expressions de z, z', $z_{,}$ en fonction de x et de y soient

$$z=f(x,y),\qquad z'=\varphi(x,y),\qquad z_{,}=\psi(x,y);$$

les seconds membres de ces équations doivent satisfaire aux conditions

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\varphi,\qquad \frac{\partial f}{\partial y}=\psi.$$

Au moyen des équations $z'=\varphi$, $z_{,}=\psi$, on peut introduire comme variables indépendantes z' et $z_{,}$ au lieu de x et de y. De plus, au lieu de la variable dépendante z, introduisons la variable w, déterminée par l'équation

---

(*) Histoire de l'Académie des Sciences, 1787. Mémoire sur l'intégration de quelques équations aux différences partielles, par Le Gendre, p. 314.

Digitized by Google

$$w = xz' + yz_{,} - z.$$

En différentiant w successivement par rapport aux variables indépendantes z', $z_{,}$, il vient

$$\frac{\partial w}{\partial z'} = x + \left(z' - \frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{\partial z'} + \left(z_{,} - \frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial z'},$$

$$\frac{\partial w}{\partial z_{,}} = y + \left(z' - \frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{\partial z_{,}} + \left(z_{,} - \frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial z_{,}}.$$

En vertu des conditions $\frac{\partial f}{\partial x} = \varphi$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \psi$, les coefficients de $\frac{\partial x}{\partial z'}, \frac{\partial x}{\partial z_{,}}, \frac{\partial y}{\partial z'}, \frac{\partial y}{\partial z_{,}}$ dans les seconds membres de ces équations s'annulent, et l'on a simplement

$$\frac{\partial w}{\partial z'} = x, \qquad \frac{\partial w}{\partial z_{,}} = y.$$

De plus, en différentiant par rapport à z' et à $z_{,}$ les équations $z' = \varphi$, $z_{,} = \psi$, on trouve

$$1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z'} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z'}, \qquad 0 = \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z'} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z'},$$

$$0 = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z_{,}} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z_{,}}, \qquad 1 = \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z_{,}} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z_{,}}.$$

Mais, en ayant égard aux relations

$$x = \frac{\partial w}{\partial z'}, \quad y = \frac{\partial w}{\partial z_{,}}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = z'', \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial x} = z'_{,}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = z_{,,}$$

on peut écrire les équations précédentes sous la forme

$$1 = z''\frac{\partial^2 w}{\partial z'^2} + z'_{,}\frac{\partial^2 w}{\partial z'\partial z_{,}}, \qquad 0 = z'_{,}\frac{\partial^2 w}{\partial z'^2} + z_{,,}\frac{\partial^2 w}{\partial z'\partial z_{,}},$$

$$0 = z''\frac{\partial^2 w}{\partial z'\partial z_{,}} + z'_{,}\frac{\partial^2 w}{\partial z_{,}^2}, \qquad 1 = z'_{,}\frac{\partial^2 w}{\partial z'\partial z_{,}} + z_{,,}\frac{\partial^2 w}{\partial z_{,}^2}.$$

On tire de là

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z'^2} = \frac{z''}{z''z_{,,} - z'^2_{,}}, \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial z'\partial z_{,}} = \frac{-z'_{,}}{z''z_{,,} - z'^2_{,}}, \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial z_{,}^2} = \frac{z_{,,}}{z''z_{,,} - z'^2_{,}},$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z'^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial z_{,}^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial z'\partial z_{,}}\right)^2 = \frac{1}{z''z_{,,} - z'^2_{,}}.$$

Par conséquent, si dans les coefficients de l'équation (1) on remplace

$$x, \qquad y, \qquad z$$

Digitized by Google

respectivement par

$$\frac{\partial w}{\partial z'}, \qquad \frac{\partial w}{\partial z_{,}}, \qquad z'\frac{\partial w}{\partial z'}+z_{,}\frac{\partial w}{\partial z_{,}}-w,$$

et qu'on la divise par $z'' z_{,,} - z'_{,}{}^2$, alors, en vertu des égalités précédentes, elle prendra la forme

$$L\frac{\partial^2 w}{\partial z_{,}^2}-2K\frac{\partial^2 w}{\partial z'\partial z_{,}}+H\frac{\partial^2 w}{\partial z'^2}+N+M\left[\frac{\partial^2 w}{\partial z'^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial z_{,}^2}+\left(\frac{\partial^2 w}{\partial z'\partial z_{,}}\right)^2\right]=0.$$

Ayant obtenu, par l'intégration de cette équation, la valeur de w en fonction de z' et de $z_{,}$, on pourra tirer des équations

$$\frac{\partial w}{\partial z'}=x, \qquad \frac{\partial w}{\partial z_{,}}=y, \qquad z=xz'+yz_{,}-w$$

les expressions de z', $z_{,}$, z au moyen des variables x et y.

113. Ampère(*) a démontré la possibilité de deux autres transformations, analogues à celle de Legendre. Pour la première transformation, on peut supposer que, au moyen des trois équations

$$z=f(x,y), \qquad z'=\varphi(x,y), \qquad z_{,}=\psi(x,y),$$

on ait exprimé y en fonction de x et de $z_{,}$. Introduisons, de plus, au lieu de z, la variable dépendante v, déterminée par l'équation

$$v=z-z_{,}y.$$

En différentiant v successivement par rapport aux variables indépendantes x et $z_{,}$, il vient

$$\frac{\partial v}{\partial x}=z'+\left(\frac{\partial z}{\partial y}-z_{,}\right)\frac{\partial y}{\partial x}, \qquad \frac{\partial v}{\partial z_{,}}=\left(\frac{\partial z}{\partial y}-z_{,}\right)\frac{\partial y}{\partial z_{,}}-y.$$

En vertu de la condition $\frac{\partial f}{\partial y}=\psi$, les coefficients de $\frac{\partial y}{\partial x}$ et de $\frac{\partial y}{\partial z_{,}}$, dans les seconds membres des équations précédentes, s'annulent, et il vient

$$\frac{\partial v}{\partial x}=z', \qquad \frac{\partial v}{\partial z_{,}}=-y.$$

De plus, en différentiant par rapport à x et à $z_{,}$ les équations $z'=\varphi$, $z_{,}=\psi$, nous aurons

$$\frac{\partial z'}{\partial x}=\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}, \qquad 0=\frac{\partial \psi}{\partial x}+\frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}, \qquad 1=\frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z_{,}},$$

(*) Journal de l'École Polytechnique, XVIII$_e$ Cahier, p. 90.

Digitized by Google

ou

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = z'' - z'_{,} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z_{,}}, \qquad 0 = z'_{,} - z_{,,} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z_{,}}, \qquad 1 = - z_{,,} \frac{\partial^2 v}{\partial z_{,}^2}.$$

On tire de là

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z_{,}^2} = -\frac{1}{z_{,,}}, \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z_{,}} = \frac{z'_{,}}{z_{,,}}, \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{z'' z_{,,} - z'^2_{,}}{z_{,,}},$$

et

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial z_{,}^2} - \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z_{,}}\right)^2 = -\frac{z''}{z_{,,}}.$$

Par conséquent, si l'on remplace, dans les coefficients de l'équation (1)

$$y, \qquad z, \qquad z'$$

respectivement par

$$-\frac{\partial v}{\partial z_{,}}, \qquad v - z_{,} \frac{\partial v}{\partial z_{,}}, \qquad \frac{\partial v}{\partial x},$$

et que l'on divise par $z_{,,}$; alors, en vertu des égalités précédentes l'équation (1) prendra la forme

$$N \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2K \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z_{,}} - M \frac{\partial^2 v}{\partial z_{,}^2} + L - H \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial z_{,}^2} - \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z_{,}}\right)^2\right] = 0.$$

Ayant obtenu, par l'intégration de cette équation, la valeur de v en fonction de x et de $z_{,}$, on pourra déduire des équations

$$\frac{\partial v}{\partial z_{,}} = y, \qquad z = v + z_{,} y$$

les expressions de $z_{,}$ et de z au moyen des variables x et y.

114. Enfin, la troisième transformation est tout à fait semblable à la précédente. Au moyen de la seconde des équations $z =$, $z' = \varphi$, $z_{,} = \psi$, on peut exprimer x en fonction de y et de z'. Si de plus, on introduit, à la place de z, la variable dépendante

$$u = z - z' x,$$

nous aurons alors, comme dans la transformation précédente,

$$\frac{\partial u}{\partial y} = z_{,}, \quad \frac{\partial u}{\partial z'} = -x, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{z'' z_{,,} - z'^2_{,}}{z''}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z'^2} = -\frac{1}{z''}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z'} = \frac{z'_{,}}{z''},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial z'^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z'}\right)^2 = -\frac{z_{,,}}{z''}.$$

Par conséquent, si, dans les coefficients de l'équation (1), on remplace

Digitized by Google

$$x, \quad z, \quad z_i$$

respectivement par

$$-\frac{\partial u}{\partial z'}, \qquad u - z'\frac{\partial u}{\partial z'}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y};$$

et que l'on divise par z'', alors, en vertu des égalités que l'on vient d'établir, elle prendra la forme

$$N\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2K\frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial z'} - M\frac{\partial^2 u}{\partial z'^2} + H - L\left[\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial z'^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial z'}\right)^2\right] = 0.$$

Après avoir obtenu, par l'intégration de cette équation, le valeur de u en fonction de y et de z', on pourra tirer des équations

$$\frac{\partial u}{\partial z'} = -x, \qquad z = u + z'x$$

les expressions de z' et de z au moyen des variables x et y.

115. Il est facile de voir que les expressions formées, au moyen des coefficients des équations transformées, d'après la même loi qui a servi à former l'expression $G = K^2 - HL + MN$ relative à l'équation (1), auront des valeurs identiques à cette dernière.

Legendre et Ampère, apres avoir découvert la possibilité de ces transformations générales de l'équation (1), en ont indiqué en même temps des applications très-importantes. On trouve encore un bel exemple de la transformation de Legendre dans les recherches de Fuchs sur l'intégration de l'équation

$$(1 + z_i^2)z'' = (1 + z'^2)z_{ii},$$

dont la solution a été complétée et simplifiée par Hoppe (*). Mais nous ne nous arrêterons pas ici sur ces exemples particuliers, parce que, à la fin de ce Mémoire (Chapitre IV), on démontrera la possibilité d'un nombre illimité de méthodes pour trouver des transformations de l'équation (1), et non-seulement des transformations analogues à celles de Legendre et d'Ampère, par suite desquelles l'équation transformée conserve le type primitif, mais aussi des transformations par suite desquelles, à la place de l'équation (1), on obtient une transformée plus simple, savoir, une transformée de forme linéaire par rapport aux dérivées partielles du second ordre. En même temps, nous ferons des applications de ces sortes de transformations.

(*) Crelle's Journal für die Mathematik, 1861, Bd. LVIII, S. 80 u. 369.

Digitized by Google

§. 16.

116. Revenons maintenant à la considération des méthodes d'intégration de l'équation

$$(1) \qquad Hz'' + 2Kz'_{,} + Lz_{,,} + M + N(z''z_{,,} - z'^{2}_{,}) = 0,$$

dans les cas où chacun des systèmes

$$(A) \qquad \begin{cases} Hdy + Ndz_{,} - (K + \sqrt{G})\,dx = 0, \\ Hdz' + (K - \sqrt{G})dz_{,} + Mdx = 0, \\ dz - z'\,dx - z_{,}\,dy = 0, \end{cases}$$

$$(B) \qquad \begin{cases} Hdy + Ndz_{,} - (K - \sqrt{G})\,dx = 0, \\ Hdz' + (K + \sqrt{G})dz_{,} - Mdx = 0, \\ dz - z'\,dx - z_{,}dy = 0 \end{cases}$$

admet moins de trois intégrales distinctes. Supposons que nous connaissions deux intégrales distinctes

$$u_1 = \text{const.}, \qquad u_2 = \text{const.}$$

du système (A). En vertu de ce qui a été démontré plus haut, les fonctions u_1 et u_2, substituées à la place de u, satisfont aux deux équations

$$\nabla_1 u = 0, \qquad \nabla_2 u = 0,$$

dans lesquelles il faut prendre G avec le signe supérieur. Une fonction arbitraire $\Phi(u_1, u_2)$ de u_1 et de u_2 y satisfait pareillement; donc l'équation

$$(2) \qquad \Phi(u_1, u_2) = 0$$

sera une intégrale du système (A), et par suite devra être une intégrale de la proposée (1), cette intégrale, renfermant des dérivées du premier ordre et une fonction arbitraire, sera une intégrale générale du premier ordre.

De même, en prenant deux intégrales du système (B),

$$v_1 = \text{const.}, \qquad v_2 = \text{const.},$$

on obtiendra une autre intégrale générale de premier ordre

$$(3) \qquad \Psi(v_1, v_2) = 0,$$

117. La méthode proposée par Monge pour trouver l'intégrale primitive de l'équation (1) repose sur la détermination préalable

Digitized by Google

d'une intégrale générale du premier ordre de cette équation, laquelle étant connue, il ne reste plus, d'après cette méthode, qu'à l'intégrer comme une équation aux dérivées partielles du premier ordre. Si l'on obtient une intégrale générale, il entrera dans son expression une fonction arbitraire, distincte de celle qui était déjà renfermée dans l'équation à intégrer; par conséquent, cette intégrale, renfermant deux fonctions arbitraires, devra être l'intégrale primitive générale de l'équation (1). Si l'on obtient une intégrale complète, il entrera dans son expression deux constantes arbitraires. En supposant l'une d'elles fonction arbitraire de l'autre, et joignant à l'équation intégrale sa dérivée prise en différentiant par rapport à la constante arbitraire restante, on aura l'intégrale primitive générale de l'équation (1) et la condition pour la détermination de l'argument de l'une des deux fonctions arbitraires qui y entrent.

Si l'on peut parvenir à deux intégrales générales du premier ordre (2) et (3), alors, en éliminant entre elles une des dérivées du premier ordre z', $z_{,}$, on obtiendra une équation qui pourra être intégrée comme une équation différentielle ordinaire entre les deux variables z et x, ou z et y. L'intégrale doit nécessairement contenir les deux fonctions arbitraires renfermées dans l'équation à intégrer. Si l'on peut résoudre les équations (2) et (3) par rapport à z' et à $z_{,}$, alors, en substituant ces valeurs, on pourra intégrer l'équation

$$dz - z'dx - z_{,}dy = 0;$$

car la condition d'intégrabilité

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z'}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}+\frac{\partial\Psi}{\partial z}z'\right)-\frac{\partial\Psi}{\partial z'}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\frac{\partial\Phi}{\partial z}z'\right)+\frac{\partial\Phi}{\partial z_{,}}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial y}+\frac{\partial\Psi}{\partial z}z_{,}\right)$$
$$-\frac{\partial\Psi}{\partial z_{,}}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}+\frac{\partial\Phi}{\partial z}z_{,}\right)=0$$

sera remplie, ce dont il est aisé de s'assurer, en ayant égard aux égalités

$$\nabla_1\Phi = 0, \qquad \nabla_2\Phi = 0, \qquad \nabla_1\Psi = 0, \qquad \nabla_2\Psi = 0.$$

118. Mais, d'après le Mémoire dans lequel Monge a exposé sa méthode (*), on voit que, au point de vue de la généralité, il avait déjà été fait une grave objection, fondeé sur ce qu'il existe des équations de la forme (1), admettant une intégrale primitive finie, mais n'ayant pas d'intégrale générale du premier ordre: par exemple, l'équation

(*) Histoire de l'Académie des Sciences, 1773.

$$z'' - z_{,,} - \frac{2z'}{x} = 0,$$

dont l'intégrale générale finie

$$z = \varphi(x+y) + \psi(x-y) - x[\varphi'(x+y) + \psi'(x-y)]$$

a été trouvée par Euler. (Voir §. 11).

Ne voulant pas admettre un pareil fait, Monge s'est efforcé de représenter les intégrales générales du premier ordre de l'équation précédente sous la forme

$$z' + z_{,} = \varphi'(x+y) - 2x\varphi''(x+y) + \int\left[\frac{z'}{x} + \varphi''(x+y)\right](dx - dy),$$

$$z' - z_{,} = \psi'(x+y) - 2x\psi''(x-y) + \int\left[\frac{z'}{x} + \psi''(x-y)\right](dx + dy),$$

en ajoutant pour la détermination des fonctions superflues les conditions

$$\psi''(x-y) = \frac{z'}{x} + \varphi''(x+y),$$

$$\varphi''(x+y) = \frac{z'}{x} + \psi''(x-y).$$

Mais dans ces expressions, comme on l'a remarqué avec justesse, il a été fait un usage illégitime du signe $\int$(*). En outre, on peut ajouter encore qu'après avoir admis l'existence de l'une des intégrales de cette forme, il n'y aura pas de raisons pour rejeter l'autre; mais, dans ce cas, les conditions précédentes pour la détermination des fonctions arbitraires superflues, ayant lieu en même temps, donnent $z' = 0$, c'est-à-dire changent z en une fonction de y seulement.

119. Ainsi, en ne prenant pour les intégrales du premier ordre que la forme (2) ou (3), on peut toujours examiner si l'équation (1) admet de telles intégrales; car cette question se ramène à cette autre: les équations (A) et (B) ont-elles chacune deux intégrales distinctes? et la solution de cette dernière question a été exposée avec détail dans un des §§. précédents.

Ampère, après avoir signalé de cette manière la nécessité de borner l'application de la méthode de Monge aux seuls cas où l'équation à intégrer admet une intégrale générale du premier ordre, a fait ressortir, en outre, la difficulté d'appliquer les méthodes ordinaires d'intégration à l'intégrale générale du premier ordre, par suite de la présence d'une fonction arbitraire dans cette intégrale. Mais

(*) „On a reproché que ces expressions étoient abusives.“ (Ibid., p. 137).

Digitized by Google

la méthode d'Ampère elle-même, fondée aussi sur la détermination préalable d'une intégrale générale du premier ordre, n'écarte pas la difficulté qu'il avait lui-même remarquée, et à laquelle on ne peut évidemment échapper qu'en se servant d'intégrales particulières de l'équation (1), au lieu d'intégrales générales, comme nous le verrons plus tard.

120. Poursuivons notre étude de la méthode d'Ampère, et appelons actuellement l'attention sur une autre remarque de ce géomètre, consistant en ce que le système auxiliaire des équations différentielles ordinaires auxquelles se ramène l'intégration de l'équation (2) fournit les équations (B), et pareillement, que le système des équations auxquelles se ramène l'intégration de l'équation (3) fournit les équations (A). On peut se convaincre comme il suit de la vérité de cette remarque.

L'intégration de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre

$$\Phi(u_1, u_2) = 0$$

conduit, comme on sait, au système d'équations simultanées

$$(4) \qquad \frac{dx}{\frac{\partial\Phi}{\partial z'}} = \frac{dy}{\frac{\partial\Phi}{\partial z_{\prime}}} = \frac{dz}{\frac{\partial\Phi}{\partial z'}z' + \frac{\partial\Phi}{\partial z_{\prime}}z_{\prime}} = \frac{-dz'}{\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{\partial\Phi}{\partial z}z'} = \frac{-dz_{\prime}}{\frac{\partial\Phi}{\partial y} + \frac{\partial\Phi}{\partial z}z_{\prime}}.$$

Mais, en vertu de l'égalité $\nabla_2\Phi = 0$ ou

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y} + \frac{\partial\Phi}{\partial z}z_{\prime} = \frac{H}{N}\frac{\partial\Phi}{\partial z_{\prime}} - \frac{K-\sqrt{G}}{N}\frac{\partial\Phi}{\partial z'},$$

les équations formée par le 1er, le 2e et le dernier rapport peuvent s'écrire ainsi,

$$\frac{dx}{\frac{\partial\Phi}{\partial z'}} = \frac{dy}{\frac{\partial\Phi}{\partial z_{\prime}}} = \frac{-dz_{\prime}}{\frac{H}{N}\frac{\partial\Phi}{\partial z_{\prime}} - \frac{K-\sqrt{G}}{N}\frac{\partial\Phi}{\partial z'}}.$$

En multipliant les deux termes du premier de ces rapports par $-(K-\sqrt{G})$, ceux du second par H et ceux du troisième par N, et égalant le troisième rapport au rapport des sommes des termes des deux premiers, il vient

$$\frac{H dy - (K-\sqrt{G})\,dx}{H\frac{\partial\Phi}{\partial z_{\prime}} - (K-\sqrt{G})\frac{\partial\Phi}{\partial z'}} = \frac{-N dz_{\prime}}{H\frac{\partial\Phi}{\partial z_{\prime}} - (K-\sqrt{G})\frac{\partial\Phi}{\partial z'}},$$

et, en supprimant les dénominateurs, qui sont égaux, on en tire la première des équations (B).

De plus, en vertu des égalités $\nabla_1\Phi = 0$, $\nabla_2\Phi = 0$, dont la première donne

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{\partial\Phi}{\partial z}z' = \frac{L}{N}\frac{\partial\Phi}{\partial z'} - \frac{K+\sqrt{G}}{N}\frac{\partial\Phi}{\partial z_{\prime}},$$

Digitized by Google

$$z'' - z_{,,} - \frac{2z'}{x} = 0,$$

dont l'intégrale générale finie

$$z = \varphi(x+y) + \psi(x-y) - x[\varphi'(x+y) +$$

a été trouvée par Euler. (Voir §. 11).

Ne voulant pas admettre un pareil fait, représenter les intégrales générales du pr précédente sous la forme

$$z' + z_{,} = \varphi'(x+y) - 2x\varphi''(x+y) + \int$$

$$z' - z_{,} = \psi'(x+y) - 2x\psi''(x-y) -$$

en ajoutant pour la détermination d

$$\psi''(x-y)$$

...us les deux rapp...

$$\varphi''(x+$$

...ions (B).

...s du premier des rapp...

Mais dans ces expre ... le troisième rappor... il a été fait un usage ... somme des dénominat... ajouter encore qu'aprè de cette forme, il n' dans ce cas, les fonctions arbitrair $z' = 0$, c'est-à-di

$$\frac{\partial \Phi'}{\partial z_{,}}$$

119. Ain ... même manière la seconde par... que la forme admet de te ... tion signalée plus haut. les équatio ... tion, comme étant le ... et la sol ... ait été proposé pour l'i... dans un ... dérée; d'autant plus ...

A ... belles applications dans ... born ... métrie". Nous allons, da... l'é ... un exemple, pour donn... a ... procédés auxiliaires dont ... n ... le développement et l'applicatio... ... à cette méthode.

... intégrer l'équation

$$\ldots - \beta(\alpha + z')z_{,,} = 0,$$

Digitized by Google

... abréger,

$$= -\alpha, \qquad \frac{x+zz'}{xz_{,}-yz'} = \beta.$$

...1), on a ici

$$-\alpha(\alpha+z')], \qquad L = -\beta(\alpha+z'),$$
$$...+z_{,})+\alpha(\alpha+z')]^2.$$

...nent la forme

$$0,$$

...es équations (A), on

$$= 0.$$

... même temps que

$$...\beta dz_{,} = 0,$$

...ux autres. Pour cela, il suffit de remar-
...uées ci-dessus de α et de β s'obtiennent comme
des deux équations

$$\alpha x+\beta y+z = 0,$$
$$\alpha z'+\beta z_{,}-1 = 0.$$

...nt donc que l'on ait substitué ici à α et à β leurs valeurs, ...rentiant les identités ainsi obtenues, on trouve les égalités ...iques

$$\alpha dx+\beta dy+dz+xd\alpha+yd\beta = 0,$$
$$\alpha dz'+\beta dz_{,}+z'd\alpha+z_{,}d\beta = 0,$$

en vertu desquelles les deux équations à intégrer se ramènent à la forme

$$xd\alpha+yd\beta = 0, \qquad z'd\alpha+z_{,}d\beta = 0,$$

ou

$$d\alpha = 0, \qquad d\beta = 0.$$

Par suite les deux intégrales distinctes du système (A) sont

$$\alpha = a, \qquad \beta = b,$$

ou

$$-\frac{y+zz_{,}}{xz_{,}-yz'} = a, \qquad \frac{x+zz'}{xz_{,}-yz'} = b,$$

a et b désignant des constantes arbitraires.

On obtient maintenant une intégrale générale du premier order de l'équation proposée, en éliminant a entre les équations

Digitized by Google

les équations formées par le 1er, le 4e et le 5e des rapports (4) peuvent s'écrire de la manière suivante,

$$\frac{dx}{\frac{\partial\Phi}{\partial z'}} = \frac{-dz'}{\frac{L}{N}\frac{\partial\Phi}{\partial z'} - \frac{K+\sqrt{G}}{N}\frac{\partial\Phi}{\partial z}} = \frac{-dz_{\prime}}{\frac{H}{N}\frac{\partial\Phi}{\partial z_{\prime}} - \frac{K-\sqrt{G}}{N}\frac{\partial\Phi}{\partial z'}}.$$

En multipliant les deux termes du premier rapport par M, ceux du second par H, ceux du troisième par $(K+\sqrt{G})$, puis égalant le premier rapport au rapport des sommes des termes des deux autres, ajoutés terme à terme, il vient

$$\frac{Mdx}{M\frac{\partial\Phi}{\partial z'}} = \frac{-Hdz' - (K+\sqrt{G})\,dz_{\prime}}{\frac{HL-K^2+G}{N}\frac{\partial\Phi}{\partial z'}}.$$

Or on a

$$G = K^2 - HL + MN,$$

et par suite

$$\frac{HL-K^2+G}{N} = M.$$

Donc, en supprimant les dénominateurs égaux dans les deux rapport précédents, on trouvera la seconde des équations (B).

Enfin, en multipliant les deux termes du premier des rapport (4) par z', ceux du second par $z_{\prime}$, et égalant le troisième rapport à celui de la somme des numérateurs à la somme des dénominateur des deux premiers, il vient

$$\frac{z'dx + z_{\prime}dy}{z'\frac{\partial\Phi}{\partial z'} + z_{\prime}\frac{\partial\Phi}{\partial z_{\prime}}} = \frac{dz}{z'\frac{\partial\Phi}{\partial z'} + z_{\prime}\frac{\partial\Phi}{\partial z_{\prime}}},$$

d'où l'on tire la troisième équation (B).

On vérifierait absolument de la même manière la seconde parti de la remarque d'Ampère.

121. Abstraction faite de l'imperfection signalée plus haut, l méthode de Monge est très-digne d'attention, comme étant le pr mier procédé suffisamment général qui ait été proposé pour l'inté gration des équations de la forme considérée; d'autant plus q l'auteur de la méthode en a donné de belles applications dans s célèbre „Application de l'Analyse à la Géométrie". Nous allons, dan un court extrait, emprunter à cet ouvrage un exemple, pour donne une idée plus complète des différents procédés auxiliaires dont u analyste habile peut faire usage dans le développement et l'applicatio des idées simples qui servent de fondement à cette méthode.

Supposons qu'il s'agisse d'intégrer l'équation

$$\alpha(\beta+z_{\prime})z'' + [\beta(\beta+z_{\prime}) - \alpha(\alpha+z')]z'_{\prime} - \beta(\alpha+z')z_{\prime\prime} = 0,$$

où l'on a posé, pour abréger,

$$\frac{y+zz_i}{xz_i-yz'}=-\alpha,\qquad \frac{x+zz'}{xz_i-yz'}=\beta.$$

En comparant avec l'équation (1), on a ici

$$H=\alpha(\beta+z_i),\qquad K=\tfrac{1}{2}[\beta(\beta+z_i)-\alpha(\alpha+z')],\qquad L=-\beta(\alpha+z'),$$
$$M=N=0,\qquad G=\tfrac{1}{4}[\beta(\beta+z_i)+\alpha(\alpha+z')]^2.$$

D'après cela, les équations (A) et (B) prennent la forme

$$\text{(A)}\qquad \begin{cases}(\beta+z_i)dy+(\alpha+z')dx=0,\\ \alpha dz'+\beta dz_i=0,\\ dz-z'dx-z_idy=0;\end{cases}$$

$$\text{(B)}\qquad \begin{cases}\alpha dy-\beta dx=0,\\ (\beta+z_i)dz'-(\alpha+z')dz_i=0,\\ dz-z'dx-z_idy=0.\end{cases}$$

En ajoutant la première et la troisième des équations (A), on trouve

$$\alpha dx+\beta dy+dz=0.$$

La dernière équation, considérée en même temps que

$$\alpha dz'+\beta dz_i=0,$$

peut être remplacée par deux autres. Pour cela, il suffit de remarquer que les valeurs données ci-dessus de α et de β s'obtiennent comme solutions algébriques des deux équations

$$\alpha x+\beta y+z=0,$$
$$\alpha z'+\beta z_i-1=0.$$

En concevant donc que l'on ait substitué ici à α et à β leurs valeurs, et différentiant les identités ainsi obtenues, on trouve les égalités identiques

$$\alpha dx+\beta dy+dz+xd\alpha+yd\beta=0,$$
$$\alpha dz'+\beta dz_i+z'd\alpha+z_id\beta=0,$$

en vertu desquelles les deux équations à intégrer se ramènent à la forme

$$xd\alpha+yd\beta=0,\qquad z'd\alpha+z_id\beta=0,$$

ou

$$d\alpha=0,\qquad d\beta=0.$$

Par suite les deux intégrales distinctes du système (A) sont

$$\alpha=a,\qquad \beta=b,$$

ou

$$-\frac{y+zz_i}{xz_i-yz'}=a,\qquad \frac{x+zz'}{xz_i-yz'}=b,$$

a et b désignant des constantes arbitraires.

On obtient maintenant une intégrale générale du premier order de l'équation proposée, en éliminant a entre les équations

$$-\frac{y+zz_{,}}{xz_{,}-yz'}=a,\qquad \frac{x+zz'}{xz_{,}-yz'}=\varphi(a),$$

φ désignant une fonction arbitraire. Mais, en vertu de la remarque faite plus haut, on peut, au lieu de ces équations, prendre les deux suivantes,

$$ax+y\varphi(a)+z=0,$$
$$az'+z_{,}\varphi(a)-1=0.$$

Pour en éliminer a, on peut imaginer que la valeur de cette quantité soit tirée de la première équation et substituée dans la seconde. Or, quelle que soit la fonction φ, cette valeur doit s'exprimer au moyen de x, y, z seulement. Donc la seconde équation, qui représente après la substitution l'intégrale générale du premier ordre, sera linéaire par rapport à z' et à $z_{,}$. Par suite, pour en déduire l'intégrale primitive de l'équation donnée, il suffira d'intégrer le système d'équations simultanées

$$(\gamma)\qquad \frac{dx}{a}=\frac{dy}{\varphi(a)}=dz,$$

en considérant a comme une fonction de x, y, z, satisfaisant à l'équation

$$ax+y\varphi(a)+z=0.$$

Ayant déterminé deux intégrales distinctes de ce système, avec des constantes arbitraires c, c', et établissant entre ces dernières une relation arbitraire $c'=\psi(c)$, on n'aura plus qu'à éliminer entre les trois équations ainsi obtenues les quantités c et c'. Le résultat de l'élimination donnera l'intégrale générale primitive de l'équation proposée.

122. On peut trouver très-simplement une des intégrales du système considéré. On a, en effet, d'après ce système,

$$\frac{xdx+ydy}{ax+y\varphi(a)}=dz,$$

ou, par suite de l'équation $ax+y\varphi(a)+z=0$,

$$xdx+ydy+zdz=0,$$

d'où, en intégrant,

$$x^2+y^2+z^2=c^2,$$

c étant une constante arbitraire.

Cette intégrale peut encore s'obtenir facilement, en vertu d'une remarque d'Ampère, au moyen du système des équations (B). En effet, si l'on substitue les valeurs de α et de β dans la première de ces équations, et que, après avoir chassé le dénominateur, on l'ajoute à la troisième, il vient

$$xdx+ydy+zdz=0.$$

En passant au calcul de l'autre intégrale du système (γ), remarquons que l'on a

Digitized by Google

$$\frac{dx}{dz}=a, \quad \frac{dy}{dz}=\varphi(a),$$

et par suite

$$\frac{dy}{dz}=\varphi\left(\frac{dx}{dz}\right).$$

Or, des équations

$$xdx+ydy+zdz=0, \qquad x^2+y^2+z^2=c^2$$

on tire

$$dz=\frac{xdx+ydy}{\sqrt{c^2-x^2-y^2}};$$

par suite,

$$\frac{dy\sqrt{c^2-x^2-y^2}}{xdx+ydy}=\varphi\left(\frac{dx\sqrt{c^2-x^2-y^2}}{xdx+ydy}\right).$$

L'intégration de cette dernière équation entre les deux variables x et y s'effectue de la manière suivante. En désignant par ω la quantité sous le signe φ, on aura, au lieu de l'équation précédente, ces deux-ci,

$$(a) \qquad \omega x+y\varphi(\omega)=\sqrt{c^2-x^2-y^2}, \qquad \omega dx-\varphi(\omega)dy=0.$$

Si ω était une constante, l'intégrale de la dernière équation serait de la forme

$$\omega y-\varphi(\omega)x=\text{const.};$$

mais, comme ω est une quantité variable, la constante du second membre doit être remplacée par une fonction de ω, de sorte qu'on aura

$$(b) \qquad \omega y-\varphi(\omega)x-f(\omega)=0,$$

$f(\omega)$ étant déterminée de telle manière que la dérivée du premier membre de l'équation précédente, prise par rapport à ω seulement, soit égale à zéro, c'est-à-dire, de manière que l'on ait

$$(c) \qquad y-\varphi'(\omega)x-f'(\omega)=0.$$

Par l'élimination de x et de y entre les équations (a), (b), (c), on obtient une équation différentielle ordinaire entre ω, $\varphi(\omega)$, $f(\omega)$, laquelle peut servir à déterminer la forme de la fonction f. En effet, des équations (b) et (c) on tire

$$x=\frac{f-\omega f'}{\omega\varphi'-\varphi}, \qquad y=\frac{\varphi' f-\varphi f'}{\omega\varphi'-\varphi}.$$

Substituant ces valeurs de x et de y dans la première équation (a), il vient

$$(\omega+\varphi\varphi')f-(\omega^2+\varphi^2)f'$$
$$=\sqrt{c^2(\omega\varphi'-\varphi)^2-(1+\varphi'^2)f^2+2(\omega+\varphi\varphi')ff'-(\omega^2+\varphi^2)f'^2}.$$

Or, en posant

$$v=\frac{f}{\sqrt{\omega^2+\varphi^2}},$$

il vient

$$\frac{dv}{d\omega}=\frac{(\omega^2+\varphi^2)f'-(\omega+\varphi\varphi')f}{(\omega^2+\varphi^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Digitized by Google

D'après cela, l'équation précédente s'écrira ainsi,

$$\left(\frac{dv}{d\omega}\right)^2 = \frac{c^2(\omega\varphi - \varphi)^2 - (1+\varphi'^2)f^2 + 2(\omega + \varphi\varphi')ff' - (\omega^2+\varphi^2)f'^2}{(\omega^2+\varphi^2)^3};$$

en ajoutant cette dernière équation, multipliée par $\omega^2+\varphi^2$, au carré de la précédente, il vient

$$(1+\omega^2+\varphi^2)\left(\frac{dv}{d\omega}\right)^2 = \frac{(\omega\varphi'-\varphi)^2}{(\omega^2+\varphi^2)^2}\left(c^2 - \frac{f^2}{\omega^2+\varphi^2}\right),$$

d'où

$$\frac{dv}{\sqrt{c^2-v^2}} = \frac{(\omega\varphi'-\varphi)d\omega}{(\omega^2+\varphi^2)\sqrt{1+\omega^2+\varphi^2}}.$$

Les variables v et ω sont ainsi séparées. En intégrant, il vient

$$\frac{v}{c} = \frac{f}{c\sqrt{\omega^2+\varphi^2}} = \sin\left[c' + \int\frac{(\omega\varphi'-\varphi)d\omega}{(\omega^2+\varphi^2)\sqrt{1+\omega^2+\varphi^2}}\right].$$

En substituant la valeur de f dans l'équation (b), et posant

$$c' = \psi(c), \qquad c = \sqrt{x^2+y^2+z^2},$$

on obtient l'intégrale générale primitive du problème, sous la forme

$$V = \omega y - x\varphi(\omega) - \sqrt{(x^2+y^2+z^2)(\omega^2+\varphi^2)}.\sin\Big[\psi(x^2+y^2+z^2)$$
$$+\int\frac{(\omega\varphi'-\varphi)d\omega}{(\omega^2+\varphi^2)\sqrt{1+\omega^2+\varphi^2}}\Big] = 0.$$

Pour la condition qui détermine ω, on a l'équation (c) ou

$$\frac{\partial V}{\partial\omega} = 0.$$

De même, en commençant par l'intégration du système (B), on peut obtenir encore une solution générale du problème précédent, présentant un intérêt spécial pour l'interprétation géometrique de l'équation proposée et de tous les résultats ultérieurs du calcul. Mais il ne nous est pas possible d'entrer ici dans ces détails.

§. 17.

123. La méthode d'Ampère pour l'intégration de l'équation

(1) $$Hz'' + 2Kz'_{,} + Lz_{,,} + M + N(z''z_{,,} - z'^{2}_{,}) = 0,$$

dans les cas où elle admet une intégrale générale du premier ordre, constitue un changement de forme et un perfectionnement de la méthode de Monge.

Représentons les deux systèmes d'équations, auxquels se ramène l'intégration de l'équation (1), sous la forme que leur a donnée Ampère (§. 12),

$$
(A)\quad\begin{cases}
H\dfrac{\partial y}{\partial x(\alpha}+N\dfrac{\partial z_{,}}{\partial x(\alpha}-(K+\sqrt{G})=0,\\
H\dfrac{\partial z'}{\partial x(\alpha}+(K-\sqrt{G})\dfrac{\partial z_{,}}{\partial x(a}+M=0,\\
\dfrac{\partial z}{\partial x(\alpha}-z'-z_{,}\dfrac{\partial y}{\partial x(\alpha}=0;
\end{cases}
$$

$$
(B)\quad\begin{cases}
H\dfrac{\partial y}{\partial x(\beta}+N\dfrac{\partial z_{,}}{\partial x(\beta}-(K-\sqrt{G})=0,\\
H\dfrac{\partial z'}{\partial x(\beta}+(K+\sqrt{G})\dfrac{\partial z_{,}}{\partial x(\beta}+M=0,\\
\dfrac{\partial z}{\partial x(\beta}-z'-z_{,}\dfrac{\partial y}{\partial x(\beta}=0.
\end{cases}
$$

Dans les équations (A) et (B), on prend respectivement pour variables indépendantes x et α, et x et β; x pouvant représenter ici l'une quelconque des deux anciennes variables indépendantes, et α, β designant les arguments des deux fonctions arbitraires de l'intégrale générale primitive et finie de cette équation. Il est clair que, dans les équations (A) et (B), on peut changer partout le signe du radical $\sqrt{G}$.

124. Si l'équation (1) admet une intégrale générale du premier ordre, on peut alors supposer qu'il existe deux combinaisons des équations (A), telles qu'on les intégrerait de la même manière que si, au lieu de dérivées partielles, elles contenaient des dérivées ordinaires de fonctions de la seule variable x. Pour trouver ces deux combinaisons intégrables, si elles ne se présentent pas d'elles-mêmes, on peut se servir de la méthode exposée au §. 14. Ayant obtenu leurs intégrales, dans lesquelles entrent deux constantes arbitraires, on aura le droit de remplacer une de ces dernières par α, l'autre par une fonction arbitraire $\varphi(\alpha)$ de α; car, dans les équations (A), on sous-entend qu'en même temps que x il y a une autre variable indépendante α. Supposons donc que les deux intégrales distinctes des équations (A) soient

$$(2)\qquad f(x,\ y,\ z,\ z',\ z_{,})=\alpha,\qquad \mathrm{F}(x,\ y,\ z,\ z',\ z_{,})=\varphi(\alpha).$$

En considérant maintenant x et β comme variables indépendantes, et différentiant, dans cette hypothèse, par rapport à x, on tire des deux équations précédentes ces deux-ci,

$$
(3)\quad\begin{cases}
\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial x(\beta}+\dfrac{\partial f}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial x(\beta}+\dfrac{\partial f}{\partial z'}\dfrac{\partial z'}{\partial x(\beta}+\dfrac{\partial f}{\partial z_{,}}\dfrac{\partial z_{,}}{\partial x(\beta}=\dfrac{\partial\alpha}{\partial x(\beta},\\
\dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial x}+\dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial x(\beta}+\dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial x(\beta}+\dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial z'}\dfrac{\partial z'}{\partial x(\beta}+\dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial z_{,}}\dfrac{\partial z_{,}}{\partial x(\beta}=\varphi'(\alpha)\dfrac{\partial\alpha}{\partial x(\beta}.
\end{cases}
$$

Si l'on élimine, entre les sept équations (2), (3) et (B), les quatre quantités z', $z_{,}$, $\dfrac{\partial z'}{\partial x(\beta}$, $\dfrac{\partial z_{,}}{\partial x(\beta}$, on obtient trois équations, dans les-

Digitized by Google

quelles il n'entre que les dérivées par rapport à x des variables y, z, α. On peut donc les intégrer comme un système déterminé d'équations simultanées aux différentielles ordinaires, et l'on trouve ainsi les expressions de y, z, α au moyen de x et de trois constantes arbitraires C, C', C''. Mais, comme il est sous-entendu que β est, en même temps que x, la seconde variable indépendante, les constantes arbitraires C, C', C'' pourront être remplacées respectivement par β, $\psi(\beta)$, $\chi(\beta)$, en désignant par ψ et χ des fonctions arbitraires.

Mais l'ensemble de ces trois équations, renfermant **trois** fonctions arbitraires φ, ψ, χ, ne représente pas encore l'intégrale générale de l'équation (1), puisque cette intégrale ne doit contenir que **deux** fonctions arbitraires. La présence de la fonction arbitraire superflue s'explique par la raison que nous nous sommes servis d'une partie seulement des conditions qui déterminent la fonction z, savoir, des équations dans lesquelles il n'entre que les dérivées partielles par rapport à x, tandis qu'il est nécessaire d'avoir égard aussi aux autres équations, où entrent aussi les dérivées partielles par rapport à β.

En effet, en exprimant l'équation

$$dz = z' dx + z_{,} dy$$

au moyen des variables indépendantes x et β, on aura

$$\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial \beta} d\beta = z' dx + z_{,} \left(\frac{\partial y}{\partial x} dx + \frac{\partial y}{\partial \beta} d\beta \right),$$

d'où l'on tire les deux équations

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z' + z_{,} \frac{\partial y}{\partial x}, \qquad \frac{\partial z}{\partial \beta} = z_{,} \frac{\partial y}{\partial \beta},$$

et nous n'avons pas encore tenu compte de la seconde de ces équations. En y substituant donc les valeurs trouvées pour les fonctions y, z, $z_{,}$, nous obtiendrons une condition pour la détermination et l'élimination de la fonction arbitraire superflue. Pour cela, on peut se servir d'une autre équation, équivalente à la précédente, et que l'on trouve en se fondant sur ce que l'on a

$$\frac{\partial \left(z' + z_{,} \frac{\partial y}{\partial x} \right)}{\partial \beta} = \frac{\partial \left(z_{,} \frac{\partial y}{\partial \beta} \right)}{\partial x}$$

ou

$$\frac{\partial z'}{\partial \beta} + \frac{\partial z_{,}}{\partial \beta} \frac{\partial y}{\partial x} + z' \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial \beta} = \frac{\partial z_{,}}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial \beta} + z_{,} \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial \beta},$$

d'où l'on tire

$$\frac{\partial z'}{\partial \beta} = \frac{\partial z_{,}}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial \beta} - \frac{\partial z_{,}}{\partial \beta} \frac{\partial y}{\partial x}.$$

125. Appliquons cette méthode d'intégration à l'exemple particulier suivant,

Digitized by Google

$$(z_{,}+yz_{,,})(z''+1)=(yz'_{,}-z'-x)z'_{,}.$$

Les deux premières équations du système (A), dans lequel nous remplacerons les signes de $\sqrt{G}$ par les signes opposés, prennent la forme

$$z_{,}\frac{\partial y}{\partial x(\alpha}+y\frac{\partial z_{,}}{\partial x(\alpha}=0,\qquad z_{,}\frac{\partial z'}{\partial x(\alpha}+(z'+x)\frac{\partial z_{,}}{\partial x(\alpha}+z_{,}=0.$$

En intégrant la première de ces équations, il vient

$$z_{,}y=\alpha.$$

Éliminant entre ces équations $\frac{\partial z_{,}}{\partial x(\alpha}$, on a la combinaison intégrable

$$y\left(\frac{\partial z'}{\partial x(\alpha}+1\right)-(z'+x)\frac{\partial y}{\partial x(\alpha}=0,$$

d'où résulte

$$\frac{z'+x}{y}=\varphi(\alpha).$$

Si l'on prend pour variables indépendantes x et β, et que l'on différentie dans cette hypothèse les équations

(1) $$z_{,}y=\alpha,$$

(2) $$z'+x=y\varphi(\alpha),$$

on trouve

(3) $$z_{,}\frac{\partial y}{\partial x(\beta}+y\frac{\partial z_{,}}{\partial x(\beta}=\frac{\partial \alpha}{\partial x(\beta},$$

(4) $$\frac{\partial z'}{\partial x(\beta}+1=\varphi(\alpha)\frac{\partial y}{\partial x(\beta}+y\varphi'(\alpha)\frac{\partial \alpha}{\partial x(\beta}.$$

A ces quatre équations il faut encore ajouter le système (B), qui devient, en changeant partout le signe de $\sqrt{G}$,

(5) $$z_{,}\frac{\partial y}{\partial x(\beta}+y\frac{\partial z_{,}}{\partial x(\beta}-(z'+1)=0,$$

(6) $$\frac{\partial z'}{\partial x(\beta}+1=0,$$

(7) $$\frac{\partial z}{\partial x(\beta}=z'+z_{,}\frac{\partial y}{\partial x(\beta}.$$

L'équation (4) prend, en vertu de (6), la forme

(8) $$\frac{1}{y}\frac{\partial y}{\partial x(\beta}+\frac{\varphi'(\alpha)}{\varphi(\alpha)}\frac{\partial \alpha}{\partial x(\beta}=0,\qquad \text{d'où } y\varphi(\alpha)=\beta.$$

L'équation (5) prend, en vertu de (3), (2) et (8), la forme

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x(\beta}=y\varphi(\alpha)=\beta,\qquad \text{d'où } \alpha=\beta x+\psi(\beta).$$

L'équation (7), en vertu de (2), (8) et (1) peut s'écrire ainsi,

$$\frac{\partial z}{\partial x(\beta}=\beta-x+\frac{\alpha}{\beta}\varphi(\alpha)\frac{\partial y}{\partial x(\beta}.$$

Or on tire de (8)

Digitized by Google

$$\frac{\partial y}{\partial x(\beta} = -\frac{\beta\varphi'(\alpha)}{[\varphi(\alpha)]^2}\frac{\partial\alpha}{\partial x(\beta},$$

et par suite

$$\frac{\partial z}{\partial x(\beta} = \beta - x - \alpha\frac{\varphi'(\alpha)}{\varphi(\alpha)}\frac{\partial\alpha}{\partial x(\beta}.$$

On en conclut, par l'intégration,

$$z = \left(\beta - \frac{x}{2}\right)x - \alpha\log\varphi(\alpha) + \int\log\varphi(\alpha)d\alpha + \chi(\beta).$$

En supposant maintenant $\log\varphi(\alpha) = \Phi'(\alpha)$, les trois équations obtenues par l'intégration peuvent s'écrire comme il suit,

$$z = \left(\beta - \frac{x}{2}\right)x + \Phi(\alpha) - \alpha\Phi'(\alpha) + \chi(\beta),$$
$$y = \beta e^{-\Phi'(\alpha)},$$
$$\alpha = \beta x + \psi(\beta).$$

Pour éliminer la fonction arbitraire superflue, il faut satisfaire à l'équation

$$\frac{\partial z}{\partial\beta(x} = z_{,}\frac{\partial y}{\partial\beta(x}.$$

On trouve, pour cela,

$$\frac{\partial z}{\partial\beta(x} = x - \alpha\,\Phi''(\alpha)\frac{\partial\alpha}{\partial\beta(x} + \chi'(\beta), \qquad z_{,} = \frac{\alpha}{y} = \frac{\alpha}{\beta}e^{\Phi'(\alpha)},$$
$$\frac{\partial y}{\partial\beta(x} = e^{-\Phi'(\alpha)}\left[1 - \beta\Phi''(\alpha)\frac{\partial\alpha}{\partial\beta(x}\right], \qquad x = \frac{\alpha - \psi(\beta)}{\beta}.$$

En substituant ces valeurs dans l'équation précédente, on obtient la relation suivante entre les fonctions ψ et χ,

$$\psi(\beta) = \beta\chi'(\beta).$$

Par suite, l'intégrale primitive générale de l'équation proposée, après l'élimination de α, peut se mettre sous la forme suivante

$$z = \left(\beta - \frac{x}{2}\right)x + \Phi\{\beta[x + \chi'(\beta)]\} - \beta[x + \chi'(\beta)]\Phi'\{\beta[x + \chi'(\beta)]\} + \chi(\beta),$$
$$y = \beta e^{-\Phi'\{\beta[x + \chi'(\beta)]\}}.$$

L'intégrale primitive générale peut s'obtenir sous une forme plus simple, en mettant les intégrales du système (A) sous la forme

$$(1') \qquad yz_{,} = \varphi(\alpha),$$
$$(2') \qquad z' + x = y\alpha.$$

Si l'on considère x et β comme variables indépendantes, et que l'on différentie les équations précédentes par rapport à x, il vient

$$(3') \qquad y\frac{\partial z_{,}}{\partial x(\beta} + z_{,}\frac{\partial y}{\partial x(\beta} = \varphi'(\alpha)\frac{\partial\alpha}{\partial x(\beta},$$

$$(4') \qquad \frac{\partial z'}{\partial x(\beta} + 1 = y\frac{\partial\alpha}{\partial x(\beta} + \alpha\frac{\partial y}{\partial x(\beta}.$$

Des équations (4′) et (6) on tire

$$(8') \qquad \alpha y = \beta.$$

Digitized by Google

L'équation (5), en vertu de (3′), (2′) et (8′), devient

$$\varphi'(\alpha)\frac{\partial \alpha}{\partial x(\beta} = \beta,$$

et donne, par l'intégration,

$$\varphi(\alpha) = \beta x + \psi(\beta).$$

Enfin (7), en vertu de (2′), (8′) et (1′), prend la forme

$$\frac{\partial z}{\partial x(\beta} = \beta - x + \frac{\alpha}{\beta}\varphi(\alpha)\frac{\partial y}{\partial x(\beta}.$$

Or, on tire de (8′)

$$\frac{\partial y}{\partial x(\beta} = -\frac{\beta}{\alpha^2}\frac{\partial \alpha}{\partial x(\beta},$$

d'où

$$\frac{\partial z}{\partial x(\beta} = \beta - x - \frac{\varphi(\alpha)}{\alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial x(\beta};$$

par suite, en posant $\varphi(\alpha) = \alpha\Phi'(\alpha)$, on aura

$$z = \left(\beta - \frac{x}{2}\right)x - \Phi(\alpha) + \chi(\beta), \qquad y = \frac{\beta}{\alpha},$$

$$\alpha\Phi'(\alpha) = \beta x + \psi(\beta), \qquad z_{\prime} = \frac{\alpha^2\Phi'(\alpha)}{\beta}.$$

Il est facile de vérifier que, au moyen des valeurs précédentes de y, z, $z_{\prime}$, on satisfait encore à l'équation

$$\frac{\partial z}{\partial \beta(x} = z_{\prime}\frac{\partial y}{\partial \beta(x},$$

si l'on pose, semblablement à ce qui été fait dans le cas précédent,

$$\psi(\beta) = \beta\chi'(\beta).$$

Il s'ensuit de là que, par l'élimination de α, l'intégrale générale primitive est représentée par les équations

$$z = \left(\beta - \frac{x}{2}\right)x - \Phi\left(\frac{\beta}{y}\right) + \chi(\beta),$$

$$0 = x - \frac{1}{y}\Phi'\left(\frac{\beta}{y}\right) + \chi'(\beta),$$

dont la seconde s'obtient en différentiant partiellement la première par rapport à β.

Il est aisé de s'assurer que l'intégrale peut s'obtenir aussi très-simplement sous cette dernière forme par la méthode de Monge.

126. D'après les indications que nous venons de donner, on voit que la méthode d'Ampère consiste en réalité dans un simple changement de forme de la méthode de Monge. Dans la première, absolument comme dans la seconde, on commence par déterminer, au moyen du système (A) par exemple, une intégrale générale du premier ordre de l'équation (1). Au lieu de considérer, avec Monge, cette intégrale comme une équation aux dérivées partielles du premier

Digitized by Google

ordre, et de former, pour l'intégrer, le système auxiliaire des équations simultanées de Lagrange, Ampère fait directement usage des équations (B), qui, ainsi qu'on l'a démontré, doivent être renfermées dans le système de Lagrange. C'est précisément dans ce procédé que consiste l'avantage de la méthode d'Ampère. Mais de cette manière on ne se débarasse pas de la fonction arbitraire de l'intégrale générale du premier ordre, laquelle se montre inévitablement dans les trois équations simultanées aux différentielles ordinaires, à l'intégration desquelles se ramène finalement la question. En outre, dans les intégrales de ces équations, il entre trois fonctions arbitraires, dont une doit être éliminée au moyen de l'une des équations

$$\frac{\partial z}{\partial \beta} = z_{,}\frac{\partial y}{\partial \beta}, \qquad \text{ou} \quad \frac{\partial z}{\partial \beta} = \frac{\partial z'}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial \beta} - \frac{\partial z_{,}}{\partial \beta}\frac{\partial y}{\partial x},$$

ce qui amène une complication du problème, que l'on ne rencontre pas dans la méthode de Monge.

Dans le Chapitre suivant, nous exposerons une méthode qui évite la présence des fonctions arbitraires dans les équations à intégrer du problème primitif. Car, dans les cas mêmes où l'équation (1) admet des intégrales générales du premier ordre, on peut, d'après notre méthode, employer, au lieu de ces dernières, des intégrales particulières où il n'entre pas de fonctions arbitraires.

Chapitre IV.

Méthode de la variation des constantes arbitraires.

§. 18.

127. Si l'équation

(1) $$Hz'' + 2Kz'_{,} + Lz_{,,} + M + N(z''z_{,,} - z'^{2}_{,}) = 0$$

n'a pas d'intégrales générales du premier ordre, alors les méthodes d'intégration fondées, comme celle de Monge, sur la supposition de l'existence de ces intégrales ne sont plus applicables. Lagrange a cherché à fonder la théorie de l'intégration des équations comprises dans la forme générale (1) sur la détermination de leurs intégrales particulières complètes, c'est-à-dire contenant cinq constantes arbitraires, et sur l'application de la méthode, découverte par lui, de la variation des constantes arbitraires. Mais de cette manière on obtient des conditions dont la réalisation est en général si difficile, qu'il a lui-même reconnu ce procédé comme étant plus curieux qu'utile. Ampère(*) a appliqué avec bien plus de succès la méthode de la variation

---

(*) Journal de l'École Polytechnique, XVIIIe Cahier, §. IV.

Digitized by Google

des constantes arbitraires aux intégrales particulières du premier ordre, tirées des systèmes d'équations

$$
(A) \quad \begin{cases} H\dfrac{\partial y}{\partial x(\alpha} + N\dfrac{\partial z_{\prime}}{\partial x(\alpha} - K - \sqrt{G} = 0, \\ H\dfrac{\partial z'}{\partial x(\alpha} + (K - \sqrt{G})\dfrac{\partial z_{\prime}}{\partial x(\alpha} + M = 0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial x(\alpha} - z' - z_{\prime}\dfrac{\partial y}{\partial x(\alpha} = 0, \end{cases}
$$

$$
(B) \quad \begin{cases} H\dfrac{\partial y}{\partial x(\beta} + N\dfrac{\partial z_{\prime}}{\partial x(\beta} - K + \sqrt{G} = 0, \\ H\dfrac{\partial z'}{\partial x(\beta} + (K + \sqrt{G})\dfrac{\partial z_{\prime}}{\partial x(\beta} + M = 0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial x(\beta} - z' - z_{\prime}\dfrac{\partial y}{\partial x(\beta} = 0, \end{cases}
$$

lorsque chacun de ces systèmes, ou au moins l'un d'eux n'admet qu'une seule combinaison intégrable, et que par suite il est impossible d'obtenir pour l'équation (1) une intégrale générale du premier ordre. Avant qu'Ampère eût attiré l'attention sur ces intégrales particulières, on n'en avait su tirer aucun parti pour la recherche de l'intégrale générale primitive de l'équation (1).

On ne peut cependant s'empêcher de remarquer que la théorie fondée par Ampère sur cette idée profonde et orginale, ne se distingue pas par la simplicité, et que la voie même qu'il a choisie pourrait être aplanie en beaucoup de points et conduire plus directement au but. En outre, comme Bour le fait remarquer avec raison, „les cas où les équations de la caractéristique" [c'est-à-dire les équations (A) et (B)] „n'admettent pas de combinaison intégrable, ont à peu près échappé jusqu'à présent à tout essai d'une théorie générale (*)." A en juger d'après certains passages du Mémoire de Bour d'où est tirée la remarque précédente, et où il expose quelques considérations détachées sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre, on peut en conclure qu'il a regardé comme possible de revenir à la méthode de Lagrange, malgré les difficultés qu'elle présente. „Je suis heureux", dit-il comme conclusion de son Mémoire, „d'avoir prouvé que ces difficultés ne sont pas toujours insurmontables; et que la belle méthode de Lagrange, après avoir si bien élucidé toutes les questions relatives aux équations du premier ordre, n'a pas encore dit son dernier mot sur la théorie beaucoup plus difficile des équations à différences partielles du second ordre (**)."

(*) Journal de l'École Polytechnique, XXXIXe Cahier, p. 189.
(**) Ibid., p. 191.

Digitized by Google

L'étude attentive des méthodes de Lagrange et d'Ampère m'a conduit à la conviction de la possibilité d'appliquer la théorie de la variation des constantes arbitraires aux intégrales particulières de l'équation (1), sous une forme plus simple et plus générale que celle sous laquelle Ampère a présenté sa méthode. En me fondant seulement sur la supposition de l'existence d'intégrales primitives particulières de l'équation (1), renfermant trois constantes arbitraires, j'ai obtenu des formules générales pour en déduire l'intégrale générale de l'équation (1) au moyen de la variation des constantes arbitraires de l'intégrale particulière. La généralité de l'hypothèse fondamentale permet d'appliquer ces formules, non-seulement au cas mentionné plus haut et dont Ampère s'est occupé exclusivement, mais encore à celui où les équations (A) et (B) n'admettent aucune combinaison intégrable, ou à celui, au contraire, dans lequel ces deux systèmes d'équations admettent plus d'une combinaison intégrable. Nous avons ainsi une méthode embrassant tous les cas de l'intégration de l'équation (1) qui diffèrent par le nombre des intégrales possibles des équations (A) et (B), nombre qui peut varier depuis trois jusqu'à zéro inclusivement. Nos formules générales, considérées sous un autre point de vue, donnent un nombre illimité de méthodes pour obtenir des transformations de l'équation (1), par suite desquelles celle-ci conserve son type primitif, ou éprouve une simplification notable, en se changeant en une équation linéaire par rapport aux dérivées partielles du second ordre.

128. En abordant maintenant l'exposition de la méthode de la variation des constantes arbitraires, nous commencerons par nous occuper de la solution de la question importante que voici: Comment peut-on obtenir l'intégrale générale de l'équation (1), lorsqu'on en connaît une intégrale particulière quelconque, renfermant trois constantes arbitraires?

Il est évident que le succès de la résolution de cette question comprend toute la théorie de la méthode d'intégration considérée.

Soit

(2) $$z = \omega(x, y, \alpha, \gamma, \eta)$$

une intégrale particulière de l'équation (1), renfermant trois constantes arbitraires α, γ, η. En la différentiant par rapport à x et à y, on aura les expressions des cinq dérivées partielles du premier et du second ordre de la fonction z, que l'on pourra représenter par

$$z' = \omega', \quad z_{,} = \omega_{,}, \quad z'' = \omega'', \quad z'_{,} = \omega'_{,}, \quad z_{,,} = \omega_{,,}.$$

Par la substitution de ces expressions et de l'expression donnée de z, le premier membre de l'équation (1) devra, d'après la supposition, se réduire identiquement à zéro, pour des valeurs quelconques des quantités α, γ, η.

Digitized by Google

Supposons maintenant qu'une de celles-ci, η par exemple, représente une fonction, provisoirement indéterminée, de α et de γ, et que α et γ soient déterminés en fonction de x et de y par les équations

$$\frac{\partial\omega}{\partial\alpha}+\frac{\partial\omega\partial\eta}{\partial\eta\,\partial\alpha}=0,\qquad \frac{\partial\omega}{\partial\gamma}+\frac{\partial\omega\partial\eta}{\partial\eta\,\partial\gamma}=0,$$

que l'on obtient en égalant séparément à zéro les dérivées partielles de ω par rapport à α et à γ. On peut écrire ces équations plus brièvement, de la manière suivante [art. 101],

(3) $$\frac{\partial.\omega}{\partial\alpha}=0,\qquad \frac{\partial.\omega}{\partial\gamma}=0,$$

en convenant qu'un point placé après le signe ∂ indique que la différentiation par rapport à α ou à γ est faite non-seulement en tant que ces quantités entrent explicitement, mais encore en tant qu'elles entrent par le moyen d'autres quantités, comme elles le font dans le cas présent par le moyen de η.

129. Voyons à quelles conditions les trois équations (2) et (3) pourront représenter une intégrale de (1). Pour cela, calculons de nouveau les expressions des dérivées partielles de z, en ayant égard aux suppositions que nous avons faites relativement à α, γ, η.

En vertu des équations (3), les expressions des dérivées du premier ordre conserveront leur forme primitive,

$$z'=\omega',\qquad z_{,}=\omega_{,}.$$

Les expressions des dérivées du second ordre changent, et deviennent

$$z''=\omega''+\frac{\partial.\omega'}{\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial x}+\frac{\partial.\omega'}{\partial\gamma}\frac{\partial\gamma}{\partial x},$$

$$z'_{,}=\omega'_{,}+\frac{\partial.\omega'}{\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial y}+\frac{\partial.\omega'}{\partial\gamma}\frac{\partial\gamma}{\partial y}=\omega'_{,}+\frac{\partial.\omega_{,}}{\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial x}+\frac{\partial.\omega_{,}}{\partial\gamma}\frac{\partial\gamma}{\partial x},$$

$$z_{,,}=\omega_{,,}+\frac{\partial.\omega_{,}}{\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial y}+\frac{\partial.\omega_{,}}{\partial\gamma}\frac{\partial\gamma}{\partial y},$$

ou

$$z''=\omega''+h,\qquad z'_{,}=\omega'_{,}+k=\omega'_{,}+k',\qquad z_{,,}=\omega_{,,}+l,$$

en posant, pour abréger,

$$h=\frac{\partial.\omega'}{\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial x}+\frac{\partial.\omega'_{,}}{\partial\gamma}\frac{\partial\gamma}{\partial x},\qquad k=\frac{\partial.\omega'}{\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial y}+\frac{\partial.\omega'}{\partial\gamma}\frac{\partial\gamma}{\partial y},$$

$$k'=\frac{\partial.\omega_{,}}{\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial x}+\frac{\partial.\omega_{,}}{\partial\gamma}\frac{\partial\gamma}{\partial x},\qquad l=\frac{\partial.\omega_{,}}{\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial y}+\frac{\partial.\omega_{,}}{\partial\gamma}\frac{\partial\gamma}{\partial y}.$$

Aux expressions précédentes de h, k, k', l on peut donner une autre forme, après avoir déterminé les valeurs de $\frac{\partial\alpha}{\partial x}$, $\frac{\partial\alpha}{\partial y}$, $\frac{\partial\gamma}{\partial x}$, $\frac{\partial\gamma}{\partial y}$, auquel cas se manifeste d'elle-même l'égalité $k=k'$. Pour cela, différentions par rapport à x la première des équations (3), ce qui donne

$$\frac{\partial\frac{\partial.\omega}{\partial\alpha}}{\partial x}+\frac{\partial.\frac{\partial.\omega}{\partial\alpha}}{\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial x}+\frac{\partial.\frac{\partial.\omega}{\partial\alpha}}{\partial\gamma}\frac{\partial\gamma}{\partial x}=0.$$

Digitized by Google

Mais, dans le premier terme du premier membre de cette équation, les différentiations par rapport à x et à α s'effectuent comme par rapport à deux variables indépendantes; donc

$$\frac{\partial \frac{\partial . \omega}{\partial \alpha}}{\partial x} = \frac{\partial . \frac{\partial \omega}{\partial x}}{\partial \alpha} = \frac{\partial . \omega'}{\partial \alpha},$$

et par suite l'équation précédente prend la forme

$$\frac{\partial . \omega'}{\partial \alpha} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha^2}\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial^2 . \omega}{\partial \alpha \partial \gamma}\frac{\partial \gamma}{\partial x} = 0.$$

De même, en différentiant par rapport à x la seconde des équations (3), on aura

$$\frac{\partial . \omega'}{\partial \gamma} + \frac{\partial^2 . \omega}{\partial \alpha \partial \gamma}\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial^2 . \omega}{\partial \gamma^2}\frac{\partial \gamma}{\partial x} = 0.$$

En différentiant les deux équations (3) par rapport à y, il vient

$$\frac{\partial . \omega_{,}}{\partial \alpha} + \frac{\partial^2 . \omega}{\partial \alpha^2}\frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial^2 . \omega}{\partial \alpha \partial \gamma}\frac{\partial \gamma}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial . \omega_{,}}{\partial \gamma} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha \partial \gamma}\frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \gamma^2}\frac{\partial \gamma}{\partial y} = 0.$$

Des quatre équations précédentes on tire

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{1}{D}\left(\frac{\partial^2 . \omega}{\partial \alpha \partial \gamma}\frac{\partial . \omega'}{\partial \gamma} - \frac{\partial^2 . \omega}{\partial \gamma^2}\frac{\partial . \omega'}{\partial \alpha}\right), \quad \frac{\partial \gamma}{\partial x} = \frac{1}{D}\left(\frac{\partial^2 . \omega}{\partial \alpha \partial \gamma}\frac{\partial . \omega'}{\partial \alpha} - \frac{\partial^2 . \omega}{\partial \alpha^2}\frac{\partial . \omega'}{\partial \gamma}\right),$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial y} = \frac{1}{D}\left(\frac{\partial^2 . \omega}{\partial \alpha \partial \gamma}\frac{\partial . \omega_{,}}{\partial \gamma} - \frac{\partial^2 . \omega}{\partial \gamma^2}\frac{\partial . \omega_{,}}{\partial \alpha}\right), \quad \frac{\partial \gamma}{\partial y} = \frac{1}{D}\left(\frac{\partial^2 . \omega}{\partial \alpha \partial \gamma}\frac{\partial . \omega_{,}}{\partial \alpha} - \frac{\partial^2 . \omega}{\partial \alpha^2}\frac{\partial . \omega_{,}}{\partial \gamma}\right).$$

en posant

$$D = \frac{\partial^2 . \omega}{\partial \alpha^2}\frac{\partial^2 . \omega}{\partial \gamma^2} - \left(\frac{\partial^2 . \omega}{\partial \alpha \partial \gamma}\right)^2;$$

et, par la substitution de ces valeurs des dérivées partielles de α et de γ dans les expressions de h, k, k', l, on donnera à ces dernières la forme suivante,

$$k = \frac{-1}{D}\left[\frac{\partial^2 . \omega}{\partial \alpha^2}\left(\frac{\partial . \omega'}{\partial \gamma}\right)^2 - 2\frac{\partial^2 . \omega}{\partial \alpha \partial \gamma}\frac{\partial . \omega'}{\partial \gamma}\frac{\partial . \omega'}{\partial \alpha} + \frac{\partial^2 . \omega}{\partial \gamma^2}\left(\frac{\partial . \omega'}{\partial \alpha}\right)^2\right],$$

$$k = k' = \frac{-1}{D}\left[\frac{\partial^2 . \omega}{\partial \alpha^2}\frac{\partial . \omega'}{\partial \gamma}\frac{\partial . \omega_{,}}{\partial \gamma} - \frac{\partial^2 . \omega}{\partial \alpha \partial \gamma}\left(\frac{\partial . \omega'}{\partial \alpha}\frac{\partial . \omega_{,}}{\partial \gamma} + \frac{\partial . \omega'}{\partial \gamma}\frac{\partial . \omega_{,}}{\partial \alpha}\right) + \frac{\partial^2 . \omega}{\partial \gamma^2}\frac{\partial . \omega'}{\partial \alpha}\frac{\partial . \omega_{,}}{\partial \alpha}\right],$$

$$l = \frac{-1}{D}\left[\frac{\partial^2 . \omega}{\partial \alpha^2}\left(\frac{\partial . \omega_{,}}{\partial \gamma}\right)^2 - 2\frac{\partial^2 . \omega}{\partial \alpha \partial \gamma}\frac{\partial . \omega_{,}}{\partial \gamma}\frac{\partial . \omega_{,}}{\partial \alpha} + \frac{\partial^2 . \omega}{\partial \gamma^2}\left(\frac{\partial . \omega_{,}}{\partial \alpha}\right)^2\right].$$

Outre cela, par un calcul algébrique simple, il est facile de vérifier que, en retranchant le carré de la seconde des égalités précédentes du produit de la première par la troisième, on obtiendra le résultat simple suivant,

$$hl - k^2 = \frac{1}{D}\left(\frac{\partial . \omega'}{\partial \alpha}\frac{\partial . \omega_{,}}{\partial \gamma} - \frac{\partial . \omega'}{\partial \gamma}\frac{\partial . \omega_{,}}{\partial \alpha}\right)^2.$$

130. Maintenant on trouvera sans difficulté la condition en vertu

de laquelle les équations (2) et (3) représenteront une intégrale de (1). En désignant, pour abréger, le premier membre de l'équation (1) par

$$F(x, y, z, z', z_{,}, z'', z'_{,}, z_{,,}),$$

substituons-y les valeurs

$$z = \omega,\ z' = \omega',\ z_{,} = \omega_{,},\ z'' = \omega'' + h,\ z'_{,} = \omega'_{,} + k,\ z_{,,} = \omega_{,,} + l,$$

tirées des équations (2) et (3); en égalant ensuite à zéro la somme des termes qui ne se détruisent pas, on aura la condition cherchée.

Le résultat de la substitution peut, d'après la formule de Taylor, s'écrire ainsi,

$$F(x, y, \omega, \omega', \omega_{,}, \omega'' + h, \omega'_{,} + k, \omega_{,,} + l) = F(x, y, \omega, \omega', \omega_{,}, \omega'', \omega'_{,}, \omega_{,,})$$
$$+ \frac{\partial F}{\partial \omega''} h + \frac{\partial F}{\partial \omega'_{,}} k + \frac{\partial F}{\partial \omega_{,,}} l + \tfrac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial \omega'^2_{,}} k^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial \omega'' \partial \omega_{,,}} hl.$$

Le premier terme du second membre de cette égalité se réduit à zéro, en vertu de la supposition que la substitution des valeurs

$$z = \omega,\quad z' = \omega',\quad z_{,} = \omega_{,},\quad z'' = \omega'',\quad z'_{,} = \omega'_{,},\quad z_{,,} = \omega_{,,}$$

doit satisfaire à l'équation (1) pour des valeurs quelconques de α, γ, η. De plus, on trouve

$$\frac{\partial F}{\partial \omega''} = H + N\omega_{,,},\qquad \frac{\partial F}{\partial \omega'_{,}} = 2(K - N\omega'_{,}),\qquad \frac{\partial F}{\partial \omega_{,,}} = L + N\omega_{,,},$$
$$-\tfrac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial \omega'^2_{,}} = \frac{\partial^2 F}{\partial \omega'' \partial \omega_{,,}} = N;$$

donc

$$F(x, y, \omega, \omega', \omega_{,}, \omega'' + h, \omega'_{,} + k, \omega_{,,} + l)$$
$$= (H + N\omega_{,,}) h + 2(K - N\omega'_{,}) k + (L + N\omega'') l + N(hl - k^2).$$

On conclut de là que les équations (2) et (3) ne peuvent représenter une intégrale de (1) que dans le cas où la fonction η est déterminée de manière à réduire à zéro le second membre de l'équation précédente. En y substituant les valeurs de h, k. l, $hl - k^2$, données plus haut, égalant à zéro le résultat de la substitution, et supprimant le dénominateur commun D, on obtient une équation de la forme

$$R \frac{\partial^2 . \omega}{\partial \alpha^2} + 2S \frac{\partial^2 . \omega}{\partial \alpha \partial \gamma} + T \frac{\partial^2 . \omega}{\partial \gamma^2} + U = 0, \tag{4}$$

où l'on a fait, pour abréger,

$$(5)\quad \begin{cases} -R = (H + N\omega_{,,}) \left(\dfrac{\partial . \omega'}{\partial \gamma}\right)^2 + 2(K - N\omega'_{,}) \dfrac{\partial . \omega'}{\partial \gamma} \dfrac{\partial . \omega_{,}}{\partial \gamma} + (L + N\omega'') \left(\dfrac{\partial . \omega_{,}}{\partial \gamma}\right)^2, \\ S = (H + N\omega_{,,}) \dfrac{\partial . \omega'}{\partial \alpha} \dfrac{\partial . \omega'}{\partial \gamma} + (K - N\omega'_{,}) \left(\dfrac{\partial . \omega'}{\partial \alpha} \dfrac{\partial . \omega_{,}}{\partial \gamma} + \dfrac{\partial . \omega'}{\partial \gamma} \dfrac{\partial . \omega_{,}}{\partial \alpha}\right) \\ \qquad + (L + N\omega'') \dfrac{\partial . \omega_{,}}{\partial \gamma} \dfrac{\partial . \omega_{,}}{\partial \alpha}, \\ -T = (H + N\omega_{,,}) \left(\dfrac{\partial . \omega'}{\partial \alpha}\right)^2 + 2(K - N\omega'_{,}) \dfrac{\partial . \omega'}{\partial \alpha} \dfrac{\partial . \omega_{,}}{\partial \alpha} + (L + N\omega'' \left(\dfrac{\partial . \omega_{,}}{\partial \alpha}\right)^2, \\ U = N\left(\dfrac{\partial . \omega'}{\partial \alpha} \dfrac{\partial . \omega_{,}}{\partial \gamma} - \dfrac{\partial . \omega'}{\partial \gamma} \dfrac{\partial . \omega_{,}}{\partial \alpha}\right)^2. \end{cases}$$

Digitized by Google

En faisant attention à la composition de l'équation (4), il est aisé de voir qu'elle est **linéaire** par rapport aux dérivées partielles du second ordre

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial\alpha^2},\quad \frac{\partial^2\eta}{\partial\alpha\partial\gamma},\quad \frac{\partial^2\eta}{\partial\gamma^2}$$

de la fonction η; et que, dans ses coefficients, il n'entre, en définitive, que

$$\alpha,\quad \gamma,\quad \eta,\quad \frac{\partial\eta}{\partial\alpha},\quad \frac{\partial\eta}{\partial\gamma}.$$

En effet, les dérivées $\frac{\partial^2\eta}{\partial\alpha^2}$, $\frac{\partial^2\eta}{\partial\alpha\partial\gamma}$, $\frac{\partial^2\eta}{\partial\gamma^2}$ doivent entrer exclusivement, la première seulement dans $\frac{\partial^2.\omega}{\partial\alpha^2}$, la seconde seulement dans $\frac{\partial^2.\omega}{\partial\alpha\partial\gamma}$, la troisième seulement dans $\frac{\partial^2.\omega}{\partial\gamma^2}$; et avec cela, elles n'entreront pas à une autre puissance qu'à la première. En outre, dans la composition de l'équation (4), il n'entre que les variables α, γ, η, $\frac{\partial\eta}{\partial\alpha}$, $\frac{\partial\eta}{\partial\gamma}$, x, y, dont les deux dernières peuvent être éliminées au moyen des équations (2) et (3).

131. Ainsi la méthode de la variation des constantes arbitraires donne la possibilité de transformer l'équation (1), **non linéaire** à cause de la présence de la quantité $z''z''-z'{}_{,}{}^2$, en une équation (4) **linéaire** par rapport aux dérivées du second ordre de la fonction cherchée; tandis que ce but n'est pas atteint par les transformations de **Legendre** et **d'Ampère**, que nous avons indiquées plus haut (Ch. III, §. 15). On peut démontrer qu'il y a une infinité de transformations possibles, analogues à ces dernières, c'est-à-dire telles que l'équation (1) conserve après la transformation son type primitif. Pour cela, il n'y a qu'à supposer, dans la démonstration précédente, que la valeur

(2) $$z = \omega(x, y, \alpha, \gamma, \eta)$$

soit choisie tout à fait arbitrairement, et ne représente plus une intégrale particulière de l'équation (1). Alors toutes les conclusions du calcul précédent subsistent, si ce n'est que

$$F(x, y, \omega, \omega', \omega_{,}, \omega'', \omega'_{,}, \omega_{,,}) = W$$

n'est plus égal à zéro. Donc, en multipliant l'équation finale par

$$D = \frac{\partial^2.\omega}{\partial\alpha^2}\frac{\partial^2.\omega}{\partial\gamma^2} - \left(\frac{\partial^2.\omega}{\partial\alpha\partial\gamma}\right)^2,$$

on obtiendra en plus le terme $W.D$, et, au lieu de l'équation (4), on aura la suivante,

$$R\frac{\partial^2.\omega}{\partial\alpha^2} + 2S\frac{\partial^2.\omega}{\partial\alpha\partial\gamma} + T\frac{\partial^2.\omega}{\partial\gamma^2} + W\left[\frac{\partial^2.\omega}{\partial\alpha^2}\frac{\partial^2.\omega}{\partial\gamma^2} - \left(\frac{\partial^2.\omega}{\partial\alpha\partial\gamma}\right)^2\right] + V = 0.$$

En vertu de la remarque de l'article précédent sur la manière dont

Digitized by Google

les dérivées $\frac{\partial^2\eta}{\partial\alpha^2}$, $\frac{\partial^2\eta}{\partial\alpha\partial\gamma}$, $\frac{\partial^2\eta}{\partial\gamma^2}$ entrent dans $\frac{\partial^2.\omega}{\partial\alpha^2}$, $\frac{\partial^2.\omega}{\partial\alpha\partial\gamma}$, $\frac{\partial^2.\omega}{\partial\gamma^2}$, il est clair que D sera de la forme

$$D = a\left[\frac{\partial^2\eta}{\partial\alpha^2}\frac{\partial^2\eta}{\partial\gamma^2} - \left(\frac{\partial^2\eta}{\partial\alpha\partial\gamma}\right)^2\right] + b\frac{\partial^2\eta}{\partial\alpha^2} + c\frac{\partial^2\eta}{\partial\alpha\partial\gamma} + e\frac{\partial^2\eta}{\partial\gamma^2} + f,$$

a, b, c, e, f s'exprimant au moyen de α, γ, η, $\frac{\partial\eta}{\partial\alpha}$, $\frac{\partial\eta}{\partial\gamma}$. Par suite, l'équation transformée conserve le type général de l'équation (1).

§. 19.

132. La méthode de la variation des constantes arbitraires ramène le problème de l'intégration de l'équation (1) à l'intégration de l'équation (4). Les valeurs des coefficients de celle-ci dépendent de la forme de l'intégrale particulière $z = \omega$ de l'équation (1). Par conséquent toute la difficulté de l'application de cette méthode consiste à choisir, parmi les intégrales particulières de l'équation (1), celle pour laquelle (4) prend une des formes intégrables. Nous exposerons plus loin les caractères auxquels on peut recourir pour ce choix dans les cas connus. Maintenant, pour éclaircir les formules générales appliquons-les à un exemple particulier,

$$\frac{ax^2}{y^2}z'' + \frac{by^2}{x^2}z_{,,} + (lx+my+nxy)\left[z''z_{,,} - z'_{,}{}^2 - 2\left(\frac{z}{xy} - \frac{z'}{y} - \frac{z_{,}}{x}\right)\right.$$
$$\left. - \left(\frac{z}{xy} - \frac{z'}{y} - \frac{z_{,}}{x}\right)^2\right] = 0,$$

a, b, l, m, n désignant des constantes données.

En examinant la possibilité de satisfaire à l'équation proposée, par des valeurs de la forme générale

$$z = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + \mathrm{F},$$

on trouve sans difficulté, pour intégrale particulière de cette équation, l'expression

$$z = \alpha x + \gamma y - \eta xy = \omega,$$

contenant trois constantes arbitraires α, γ, η. Par suite, en considérant η comme une fonction de α et de γ, et joignant à l'équation précédente les deux suivantes,

$$\frac{\partial.\omega}{\partial\alpha} = x\left(1 - y\frac{\partial\eta}{\partial\alpha}\right) = 0,$$
$$\frac{\partial.\omega}{\partial\gamma} = y\left(1 - x\frac{\partial\eta}{\partial\gamma}\right) = 0,$$

on obtient l'intégrale générale de l'équation proposée, si l'on détermine la fonction η par la condition

$$R\frac{\partial^2.\omega}{\partial\alpha^2} + 2S\frac{\partial^2.\omega}{\partial\alpha\partial\gamma} + T\frac{\partial^2.\omega}{\partial\gamma^2} + U = 0.$$

Pour trouver les coefficients de cette équation, calculons

$\omega' = \alpha - \eta y$, $\quad \omega_{,} = \gamma - \eta x$, $\quad \omega'' = 0$, $\quad \omega'_{,} = -\eta$, $\quad \omega_{,,} = 0$,

Digitized by Google

par la différentiation de la fonction ω relativement à x et à y, considérées comme des variables indépendantes de α et de γ. En différentiant ensuite ω' et $\omega_{,}$ par rapport à α et à γ, considérées comme indépendantes de x et de y, il vient

$$\frac{\partial.\omega'}{\partial\gamma} = -y\frac{\partial\eta}{\partial\gamma}, \qquad \frac{\partial.\omega_{,}}{\partial\alpha} = -x\frac{\partial\eta}{\partial\alpha},$$
$$\frac{\partial.\omega'}{\partial\alpha} = 1-y\frac{\partial\eta}{\partial\alpha}, \qquad \frac{\partial.\omega_{,}}{\partial\gamma} = 1-x\frac{\partial\eta}{\partial\gamma}.$$

Les seconds membres des deux dernières équations se réduisent à zéro en vertu de la deuxième et de la troisième équation de l'intégrale générale. Maintenant, par les formules générales (5) du § précédent, on trouve

$$-R = H\left(\frac{\partial.\omega'}{\partial\gamma}\right)^2 = ax^2\left(\frac{\partial\eta}{\partial\gamma}\right)^2,$$

ou, en vertu de la troisième équation de l'intégrale générale,

$$-R = a.$$

On trouve ensuite

$$S = (K+N\eta)\frac{\partial.\omega'}{\partial\gamma}\frac{\partial.\omega_{,}}{\partial\alpha} = 0,$$

parce que le facteur $K+N\eta$, après l'élimination de η à l'aide des équation de l'intégrale et la substitution des valeurs des coefficients K et N tirées de l'équation proposée, se réduit à zéro. De plus,

$$-T = L\left(\frac{\partial.\omega_{,}}{\partial\alpha}\right)^2 = by^2\left(\frac{\partial\eta}{\partial\alpha}\right)^2,$$

ou, en vertu de la seconde équation de l'intégrale générale,

$$-T = b.$$

Enfin,

$$U = N\left(\frac{\partial.\omega'}{\partial\gamma}\right)^2\left(\frac{\partial.\omega_{,}}{\partial\alpha}\right)^2 = (lx+my+nz)x^2y^2\left(\frac{\partial\eta}{\partial\alpha}\right)^2\left(\frac{\partial\eta}{\partial\gamma}\right)^2,$$

ou, en vertu de la seconde et de la troisième équation de l'intégrale générale,

$$U = lx+my+nz.$$

D'après cela, l'équation (4) se réduit à la forme

$$a\frac{\partial^2.\omega}{\partial\alpha^2}+b\frac{\partial^2.\omega}{\partial\gamma^2}-(lx+my+nz) = 0.$$

Maintenant, en différentiant la fonction ω deux fois par rapport à chacune des variables α et γ, que l'on doit considérer ici comme indépendantes entre elles et des variables x et y, on a

$$\frac{\partial^2.\omega}{\partial\alpha^2} = -xy\frac{\partial^2\eta}{\partial\alpha^2}, \qquad \frac{\partial^2.\omega}{\partial\gamma^2} = -xy\frac{\partial^2\eta}{\partial\gamma^2}.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation précédente, et la divisant par xy, on trouve

$$a\frac{\partial^2\eta}{\partial\alpha^2}+b\frac{\partial^2\eta}{\partial\gamma^2}+\frac{l}{y}+\frac{m}{x}+n = 0.$$

Mais la deuxième et la troisième équation de l'intégrale générale donnent

Digitized by Google

$$\frac{1}{x} = \frac{\partial \eta}{\partial \gamma}, \quad \frac{1}{y} = \frac{\partial \eta}{\partial \alpha};$$

par conséquent, pour déterminer la fonction η, nous obtenons enfin l'équation linéaire à coefficients constants

$$a\frac{\partial^2 \eta}{\partial \alpha^2} + b\frac{\partial^2 \eta}{\partial \gamma^2} + l\frac{\partial \eta}{\partial \alpha} + m\frac{\partial \eta}{\partial \gamma} + n = 0,$$

dont l'intégrale générale peut toujours s'obtenir soit sous forme finie, soit au moyen d'intégrales définies, par la méthode de Laplace (*). En supposant donc la fonction η connue, on pourra exprimer, à l'aide de cette fonction et de ses dérivées partielles, l'intégrale générale de l'équation proposée, sous la forme suivante,

$$z = \frac{\alpha}{\frac{\partial \eta}{\partial \gamma}} + \frac{\gamma}{\frac{\partial \eta}{\partial \alpha}} + \frac{\eta}{\frac{\partial \eta}{\partial \alpha}\frac{\partial \eta}{\partial \gamma}}, \quad y = \frac{1}{\frac{\partial \eta}{\partial \alpha}}, \quad x = \frac{1}{\frac{\partial \eta}{\partial \gamma}}.$$

§ 20.

133. Comme on l'a déjà remarqué plus haut, Ampère a introduit un perfectionnement important dans la théorie de l'intégration de l'équation (1), en découvrant la possibilité d'appliquer la méthode de la variation des constantes arbitraires aux intégrales de cette équation, obtenues à l'aide des équations (A) et (B), lorsque chacun de ces deux systèmes n'admet qu'une combinaison intégrable. Toutefois, ayant fondé sa théorie sur cette idée vraie, mais pas assez générale, il n'a pas remarqué, en premier lieu, que la même méthode peut s'appliquer aux intégrales particulières de l'équation (1), obtenues à l'aide des systèmes (A) et (B), lorsque chacun d'eux admet plus d'une combinaison intégrable, et, en général, à toute intégrale particulière de l'équation (1) avec trois constantes arbitraires, par quelque moyen qu'elle ait été obtenue. En second lieu, les formules générales d'Ampère ont ce grave défaut, qu'elles ne permettent pas de se servir en même temps des intégrales des systèmes (A) et (B) de la manière la plus avantageuse. En troisième lieu, l'application même des formules d'Ampère pourrait être simplifiée par l'emploi de la méthode connue de Lagrange et de Charpit pour l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre qui se rencontrent dans cette théorie, au lieu de la méthode proposée par Ampère lui-même.

Nous tâcherons de démontrer ces propositions dans ce §. et dans les suivants; mais nous allons auparavant examiner quelle utilité particulière présente l'application de la méthode de la variation des

(*) Histoire de l'Académie des Sciences, année 1779. Mémoire sur les suites, par M. de la Place.

Digitized by Google

constantes arbitraires aux intégrales particulières, obtenues au moyen des systèmes d'équations (A) et (B).

134. Supposons que les équations (A) admettent une combinaison intégrable, dont nous représenterons l'intégrale sous la forme

$$f(x, y, z, z', z_{,}) = \alpha;$$

ce sera, par rapport à l'équation (1), une *intégrale particulière du premier ordre*. Mais, en la considérant comme une équation aux dérivées partielles du premier ordre, on pourra en déterminer, par la méthode de *Lagrange* et de *Charpit*, une intégrale complète

$$z = \omega(x, y, \alpha, \gamma, \eta),$$

renfermant, outre α, deux autres constantes arbitraires γ, η, et qui sera, par rapport à l'équation (1), une *intégrale particulière primitive*. En lui appliquant la méthode de la variation des constantes arbitraires, on devra considérer η comme une fonction de α et de γ, et pour la déterminer nous aurons une équation aux dérivées partielles du second ordre

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial\alpha^2}, \quad \frac{\partial^2\eta}{\partial\alpha\partial\gamma}, \quad \frac{\partial^2\eta}{\partial\gamma^2}.$$

La quantité α représente, comme on sait, l'argument de l'une des deux fonctions arbitraires de l'intégrale générale de l'équation (1) et cette dernière intégrale doit s'exprimer au moyen de η et des fonctions arbitraires que η renferme. Par conséquent, *une des fonctions arbitraires qui entrent dans l'intégrale générale qui représente la valeur de η, doit aussi avoir pour argument α*. Mais dans ce cas l'équation qui détermine la fonction η ne doit pas contenir la dérivée $\frac{\partial^2\eta}{\partial\alpha^2}$, comme nous l'avons démontré dans la théorie des intégrales des équations aux dérivées partielles du second ordre (Chap. I, §. 6). Cette dérivée $\frac{\partial^2\eta}{\partial\alpha^2}$ doit entrer exclusivement et nécessairement dans l'équation (4) au moyen de l'expression $\frac{\partial^2.\omega}{\partial\alpha^2}$; par suite, dans le cas considéré, on aura nécessairement $R = 0$.

En faisant usage de l'intégrale

$$F(x, y, z, z', z_{,}) = \beta,$$

déduite d'une combinaison intégrable des équations (B), et en calculant une intégrale complète de cette équation

$$z = \omega(x, y, \beta, \gamma, \eta),$$

appliquons à celle-ci la méthode de la variation des constantes arbitraires. Si l'on considère alors η comme fonction de β et de γ, on a, pour déterminer cette fonction, une équation selon la formule (4) où l'on devra seulement écrire β à la place de γ et γ à la place de α. Par le même raisonnement que dans le cas précédent, on en conclut que maintenant on doit avoir nécessairement $T = 0$.

Digitized by Google

135. Si l'on peut obtenir, au moyen des combinaisons intégrables des équations (A) et (B), les intégrales que nous représenterons respectivement par

$$f(x, y, z, z', z_{\prime}) = \alpha, \qquad F(x, y, z, z', z_{\prime}) = \beta,$$

les premiers membres de ces équations, qui satisfont, comme on sait (Chap. III, §. 16), à la condition d'intégrabilité

$$\left.\begin{array}{l} \left(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}z'\right)\frac{\partial F}{\partial z'}-\left(\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}z'\right)\frac{\partial f}{\partial z'} \\ +\left(\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}z_{\prime}\right)\frac{\partial F}{\partial z_{\prime}}-\left(\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}z_{\prime}\right)\frac{\partial f}{\partial z_{\prime}} \end{array}\right\} = 0,$$

fournissent les valeurs de z' et de $z_{\prime}$, par la substitution desquelles on obtient l'équation

$$dz = z'dx + z_{\prime}dy,$$

intégrable soit immédiatement, soit après la multiplication par le facteur d'intégrabilité. Comme résultat de cette intégration, on a la valeur

$$z = \omega(x, y, \alpha, \beta, \eta),$$

qui représente une intégrale particulière de l'équation (1). En considérant η comme une fonction de α et de β, et appliquant la méthode de la variation des constantes arbitraires à cette intégrale, on trouve, pour déterminer la fonction η, l'équation donnée par la formule (4), dans laquelle on écrira β au lieu de γ. L'intégrale générale qui représentera la valeur de z s'exprimera au moyen de l'intégrale générale qui représentera la valeur de η et des deux fonctions arbitraires renfermées dans cette intégrale. Or les arguments des fonctions arbitraires de la première intégrale doivent être α et β; par conséquent, α et β doivent être aussi les arguments des fonctions arbitraires de la seconde intégrale. Donc l'équation (4) ne peut, dans le cas actuel (Chap. I, §. 6), renfermer les dérivées partielles du second ordre

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial\alpha^2}, \quad \frac{\partial^2\eta}{\partial\beta^2},$$

d'où il suit nécessairement que l'on a $R = 0$ et $T = 0$.

136. Enfin, si dans l'équation (1) on a

$$G = K^2 - HL + MN = 0,$$

alors, comme on sait, les deux systèmes d'équations (A) et (B) cessent d'être distincts l'un de l'autre, et les arguments α et β deviennent égaux. Ayant, dans ce cas, une combinaison intégrable des équations (A), dont l'intégrale soit

$$f(x, y, z, z', z_{\prime}) = \alpha,$$

et intégrant cette équation aux dérivées partielles du premier ordre, on en obtient l'intégrale complète

$$z = \omega(x, y, \alpha, \gamma, \eta),$$

laquelle, par rapport à l'équation (1), sera une intégrale primitive particulière. En considérant η comme une fonction de α et de γ, et

appliquant à cette intégrale la méthode de la variation des constantes arbitraires, on obtiendra, pour la détermination de η, une équation selon la formule générale (4). L'intégrale générale représentant la valeur de z doit s'exprimer au moyen de l'intégrale générale représentant la valeur de η, et des fonctions arbitraires que cette intégrale renferme. Mais les arguments des fonctions arbitraires de l'intégrale en z doivent être égaux à α; par suite, α doit être l'argument commun des fonctions arbitraires de l'intégrale en η. Donc (Chap. I, §. 6) l'équation (4), dans le cas actuel, ne peut contenir les dérivées du second ordre

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial\alpha^2}, \qquad \frac{\partial^2\eta}{\partial\alpha\partial\gamma},$$

et de là il s'ensuit nécessairement que l'on a $R=0$ et $S=0$.

137. Ainsi l'avantage de l'application de la méthode de la variation des constantes arbitraires aux intégrales particulières de l'équation (1), obtenues à l'aide des équations (A) et (B), consiste en ce que l'équation générale

$$R\frac{\partial^2.\omega}{\partial\alpha^2}+2S\frac{\partial^2.\omega}{\partial\alpha\partial\gamma}+T\frac{\partial^2.\omega}{\partial\gamma^2}+U=0,$$

à laquelle se ramène finalement le problème de l'intégration de l'équation (1), admet, dans les quatre cas que nous venons de considérer, respectivement les formes simplifieés suivantes,

$$2S\frac{\partial^2.\omega}{\partial\alpha\partial\gamma}+T\frac{\partial^2.\omega}{\partial\gamma^2}+U=0,$$

$$2S\frac{\partial^2.\omega}{\partial\beta\partial\gamma}+R\frac{\partial^2.\omega}{\partial\gamma^2}+U=0,$$

$$2S\frac{\partial^2.\omega}{\partial\alpha\partial\beta}+U=0,$$

$$T\frac{\partial^2.\omega}{\partial\gamma^2}+U=0.$$

Si, dans l'équation (1), $N=0$, cas auquel Ampère s'est borné dans la théorie (*), alors, en vertu de la dernière des formules (5) du §. précédent, on a $U=0$, et les équations définitives prennent les formes encore plus simples

---

(*) Citons le passage du Mémoire d'Ampère où il est question de cette restriction:

„Je vais appliquer la méthode que j'emploie à l'équation

$$Hr+2Ks+Lt+M=0.$$

Cette méthode peut aussi être appliquée, avec quelques modifications, à l'équation

$$Hr+2Ks+Lt+M+N(rt-s^2)=0,$$

et servir à la ramener à l'une des deux formes

$$t=f(x,y,z,p,q), \qquad s=f(x,y,z,p,q),$$

suivant que la quantité $K^2-HL+MN$ est nulle ou ne l'est pas. Mais, pour

$$2S\frac{\partial^2.\omega}{\partial\alpha\partial\gamma}+T\frac{\partial^2.\omega}{\partial\gamma^2}=0,$$
$$2S\frac{\partial^2.\omega}{\partial\beta\partial\gamma}+R\frac{\partial^2.\omega}{\partial\gamma^2}=0,$$
$$S\frac{\partial^2.\omega}{\partial\alpha\partial\beta}=0,$$
$$T\frac{\partial^2.\omega}{\partial\gamma^2}=0.$$

Les deux dernières équations présentent les formes les plus simples parmi toutes celles que peut prendre l'équation (4). Ampère, à l'aide de sa méthode, obtient facilement la forme représentée par la dernière équation, dans le cas où a lieu l'égalité $G=0$. Mais il est beaucoup plus difficile d'obtenir par cette méthode la forme que présente l'avant-dernière équation, dans le cas général où G n'est pas égal à zéro, et où les systèmes (A) et (B) fournissent chacun des combinaisons intégrables, dont nous avons représenté (art. 135) les intégrales sous la forme

$$f(x,\ y,\ z,\ z',\ z_{,})=\alpha,\qquad \mathrm{F}(x,\ y,\ z,\ z',\ z_{,})=\beta.$$

La difficulté provient de ce qu'Ampère, n'appliquant sa méthode qu'à la première des deux intégrales précédentes, ramène de cette manière le problème à l'intégration d'une équation de la forme

$$2S\frac{\partial^2.\omega}{\partial\alpha\partial\gamma}+T\frac{\partial^2.\omega}{\partial\gamma^2}=0;$$

il faut ensuite procéder avec cette équation comme avec l'équation donnée (1), et démontrer que la nouvelle équation transformée sera de la forme

$$S\frac{\partial^2.\omega}{\partial\alpha\partial\beta}=0;$$

tandis que, en employant le procédé que nous avons proposé plus haut, on ramène tout d'une fois le problème à l'intégration d'une équation de cette dernière forme.

138. Remarquons encore que le premier membre de chacune des équations

$$S\frac{\partial^2.\omega}{\partial\alpha\partial\beta}=0,\qquad T\frac{\partial^2.\omega}{\partial\gamma^2}=0$$

se compose de deux facteurs, dont chacun peut, en général, être égalé séparément à zéro. Mais l'intégrale générale qui représente la valeur de η ne peut fournir que les seconds facteurs, parce qu'il n'y a

---

rendre plus simple l'exposition de cette méthode et les démonstrations qui y sont relatives, j'ai cru devoir me borner à la formule

$$Hr+2Ks+Lt+M=0,$$

où les dérivées du second ordre ne se trouvent qu'à la première puissance.“ (Journal de l'Ecole Polytechnique, XVIIIe Cahier, p. 106).

Digitized by Google

que ceux-ci qui contiennent les dérivées du second ordre de cette fonction. Les premiers facteurs S et T, séparément, peuvent donner seulement, dans certains cas, des intégrales particulières avec une seule fonction arbitraire, parce qu'ils ne renferment que des dérivées du premier ordre de η. En général, ces facteurs peuvent être négligés.

Ainsi, si $G = 0$, et que des équations (A) et (B) on tire une intégrale particulière de l'équation (1), de la forme

$$z = \omega(x, y, \alpha, \gamma, \eta),$$

on aura son intégrale générale, en joignant à l'équation précédente les trois équations

$$\frac{\partial.\omega}{\partial\alpha} = 0, \qquad \frac{\partial.\omega}{\partial\gamma} = 0, \qquad \frac{\partial^2.\omega}{\partial\gamma^2} = 0,$$

dont la dernière sert à déterminer η en fonction de α et de γ.

Si G n'est pas égal à zéro, et qu'au moyen des équations (A) et (B) on ait trouvé une intégrale particulière de (1),

$$z = \omega(x, y, \alpha, \beta, \eta),$$

on trouvera son intégrale générale en joignant à l'équation précédente les trois suivantes,

$$\frac{\partial.\omega}{\partial\alpha} = 0, \qquad \frac{\partial.\omega}{\partial\beta} = 0, \qquad \frac{\partial^2.\omega}{\partial\alpha\partial\beta} = 0,$$

dont la dernière sert à la détermination de η en α et β.

§. 21.

139. Pour donner une application des résultats théoriques que nous venons d'obtenir, prenons d'abord les exemples qu'Ampère a traités comme éclaircissements de sa méthode. Nous constaterons ainsi que, dans tous les cas de l'application de la méthode de la variation des constantes arbitraires, on peut se servir des mêmes formules (5), lesquelles fournissent, en outre, les résultats d'Ampère par une voie plus directe. Mais auparavant ramenons ces formules générales à une forme plus commode pour l'application. Pour cela, remarquons que les expressions de R et de T peuvent être décomposées en facteurs, puisque chacune d'elles représente une fonction homogène du second degré. En résolvant l'équation du second degré

$$m^2 + \frac{2(K - N\omega'_{,}}{H + N\omega_{,,}}m + \frac{L + N\omega''}{H + N\omega_{,,}} = 0,$$

on trouve

$$m = \frac{-K + N\omega'_{,} \pm \sqrt{(K - N\omega'_{,})^2 - (H + N\omega_{,,})(L + N\omega'')}}{H + N\omega_{,,}}.$$

Or, en désignant par P la quantité sous le radical, on a

$$P = K^2 - HL - N[H\omega'' + 2K\omega'_{,} + L\omega_{,,} + N(\omega''\omega_{,,} - \omega'^{2}_{,})],$$

et, en ajoutant l'égalité identique

$$0 = N[H\omega'' + 2K\omega'_{,} + L\omega_{,,} + M + N(\omega''\omega_{,,} - \omega'^{2}_{,})],$$

qui a lieu en vertu de la supposition que ω satisfait à l'équation (1), il vient

Digitized by Google

$$P = K^2 - HL + MN = G.$$

Par conséquent,

$$m = \frac{-K + N\omega'_{,} \pm \sqrt{G}}{H + N\omega_{,,}}.$$

Au moyen des deux valeurs de m que nous venons de trouver, les expressions de R, S, T pourront s'écrire comme il suit,

(6)

$$-R = (H + N\omega_{,,})$$

$$\times \left\{ \left(\frac{\partial\omega_{,}}{\partial\gamma}\right)^2 \cdot \left[\frac{\frac{\partial\omega'}{\partial\gamma}}{\frac{\partial\omega_{,}}{\partial\gamma}} + \frac{K - N\omega'_{,} + \sqrt{G}}{H + N\omega_{,,}}\right] \cdot \left[\frac{\frac{\partial\omega'}{\partial\gamma}}{\frac{\partial\omega_{,}}{\partial\gamma}} + \frac{K - N\omega'_{,} - \sqrt{G}}{H + N\omega_{,,}}\right] \right\},$$

$$S = (H + N\omega_{,,})$$

$$\times \left\{ \frac{\partial\omega_{,}}{\partial\alpha}\frac{\partial\omega'}{\partial\gamma} \cdot \left[\frac{\frac{\partial\omega'}{\partial\alpha}}{\frac{\partial\omega_{,}}{\partial\alpha}} \cdot \frac{\frac{\partial\omega'}{\partial\gamma}}{\frac{\partial\omega_{,}}{\partial\gamma}} + \frac{K - N\omega'_{,}}{H + N\omega_{,,}}\left(\frac{\frac{\partial\omega'}{\partial\alpha}}{\frac{\partial\omega_{,}}{\partial\alpha}} + \frac{\frac{\partial\omega'}{\partial\gamma}}{\frac{\partial\omega_{,}}{\partial\gamma}}\right) + \frac{L + N\omega''}{H + N\omega_{,,}}\right] \right\},$$

$$-T = (H + N\omega_{,,})$$

$$\times \left\{ \left(\frac{\partial\omega_{,}}{\partial\alpha}\right)^2 \cdot \left[\frac{\frac{\partial\omega'}{\partial\alpha}}{\frac{\partial\omega_{,}}{\partial\alpha}} + \frac{K + N\omega'_{,} + \sqrt{G}}{H + N\omega_{,,}}\right] \cdot \left[\frac{\frac{\partial\omega'}{\partial\alpha}}{\frac{\partial\omega_{,}}{\partial\alpha}} + \frac{K - N\omega'_{,} - \sqrt{G}}{H + N\omega_{,,}}\right] \right\}.$$

140. Occupons-nous maintenant des exemples d'Ampère.

I. $$x^4 z'' - 4x^2 z_{,} z'_{,} + 4z_{,}^2 z_{,,} + 2z' x^3 = 0.$$

On a ici

$$H = x^2, \qquad K = -2x^2 z_{,}, \qquad L = 4z_{,}^2, \qquad M = 2z' x^3, \qquad N = 0;$$

par conséquent

$$G = K^2 - L + MN = 0;$$

donc les deux systèmes d'équations (A) et (B) se confondent en un seul, savoir,

$$x^2 \frac{\partial y}{\partial x(\alpha} + 2z_{,} = 0,$$

$$x^2 \frac{\partial z'}{\partial x(\alpha} - 2z_{,} \frac{\partial z_{,}}{\partial x(\alpha} + 2z' x = 0,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x(\alpha} - z' - z' \frac{\partial y}{\partial x(\alpha} = 0.$$

La seconde de ces équations, satisfaisant à la condition d'intégrabilité, donne l'intégrale

$$x^2 z' - z_{,}^2 = 2\alpha.$$

Pour intégrer cette équation aux dérivées partielles du premier ordre par la méthode de Lagrange et de Charpit, formons le système d'équations simultanées

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{-2z_{,}} = \frac{-dz_{,}}{2xz'} = \frac{-dz'_{,}}{0},$$

Digitized by Google

dont une des intégrales est évidemment $z_1 =$ const. On a, par conséquen[t]

$$z' = \frac{2\alpha + \gamma^2}{x^2}, \qquad z_1 = \gamma,$$

et

$$dz = \frac{2\alpha + \gamma^2}{x^2} dx + \gamma dy.$$

En intégrant cette dernière équation, on a l'intégrale particulièr[e] de l'équation proposée,

$$z = \gamma y - \frac{2\alpha + \gamma^2}{x} + \eta = \omega,$$

dont il est facile de vérifier l'exactitude. En considérant η comm[e] une fonction de α et de γ, et joignant à l'équation précédente le[s] trois suivantes,

$$\frac{\partial . \omega}{\partial \alpha} = -\frac{2}{x} + \frac{\partial \eta}{\partial \alpha} = 0,$$

$$\frac{\partial . \omega}{\partial \gamma} = -\frac{2\gamma}{x} + y + \frac{\partial \eta}{\partial \gamma} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 . \omega}{\partial \gamma^2} = -\frac{2}{x} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial \gamma^2} = 0,$$

nous aurons l'intégrale générale, si nous déterminons la fonction [η] au moyen de la dernière équation. Or, si l'on en soustrait la second[e] équation de l'intégrale générale, on obtient l'équation

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial \gamma^2} = \frac{\partial \eta}{\partial \alpha},$$

dont l'intégrale a été donnée par Laplace, sous la forme

$$\eta = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} \varphi(\gamma + 2u\sqrt{\alpha}) du,$$

φ désignant une fonction arbitraire. Les dérivées partielles de cett[e] valeur de η, par rapport à α et à γ, sont

$$\frac{\partial \eta}{\partial \alpha} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} \varphi'(\gamma + 2u\sqrt{\alpha}) du, \qquad \frac{\partial \eta}{\partial \gamma} = \int_{0}^{\infty} e^{-u^2} \varphi'(\gamma + 2u\sqrt{\alpha}) du;$$

La valeur de la première, au moyen de l'intégration par parties, peut encore se ramener à la forme

$$\frac{\partial \eta}{\partial \alpha} = \int_{+\infty}^{+\infty} e^{-u^2} \varphi''(\gamma + 2u\sqrt{\alpha}) du.$$

En substituant ces valeurs, on obtient l'intégrale du problème, donné[e] par Ampère, sous la forme des trois équations

$$z = \gamma y - \frac{2\alpha + \gamma^2}{x} + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} \varphi(\gamma + 2u\sqrt{\alpha}) du,$$

$$y - \frac{2\gamma}{x} + \int_{+\infty}^{+\infty} e^{-u^2} \varphi'(\gamma + 2u\sqrt{\alpha}) du = 0,$$

$$\frac{2}{x} - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} \varphi''(\gamma + 2u\sqrt{\alpha}) du = 0.$$

Digitized by Google

Pour vérifier les conclusions de la théorie relativement aux valeurs de R, S, T, différentions la fonction ω par rapport à x et à y, en considérant α et γ comme des constantes; il viendra

$$\omega' = \frac{2\alpha + \gamma^2}{x^2}, \qquad \omega_{,} = \gamma.$$

De plus, en différentiant les fonctions ω' et $\omega_{,}$ par rapport à α et à γ, dans la supposition de x et y constantes, on trouve

$$\frac{\partial.\omega'}{\partial\alpha} = \frac{2}{x^2}, \quad \frac{\partial.\omega'}{\partial\gamma} = \frac{2\gamma}{x^2}, \quad \frac{\partial.\omega_{,}}{\partial\alpha} = 0, \quad \frac{\partial.\omega_{,}}{\partial\gamma} = 1.$$

Substituant ces valeurs dans les formules générales (§), où l'on fera $N = 0$, on trouvera, conformément à la théorie,

$$R = 0, \qquad S = 0, \qquad T = -1.$$

On intégrera absolument de la même manière les deux autres exemples

$$z'' + 2(z_{,} - x)z'_{,} + (z' - x)^2 z_{,,} - z_{,} = 0,$$

et

$$(x + z_{,})^2 z'' + 2(x + z_{,})(y + z')z'_{,} + (y + z')^2 z_{,,} + 2(x + z_{,})(y + z') = 0,$$

qui sont tous les deux de même nature que le précédent, la condition $G = 0$ ayant lieu aussi dans ces deux exemples.

141. Considérons maintenant des exemples dans lesquels cette condition n'est plus vérifiée.

II. $$x^2 z'' + 2x^2 z'_{,} + \left(x^2 - \frac{b^2}{x^2 z_{,}^2}\right) z_{,,} - 2z = 0.$$

On a ici

$$H = x^2, \quad K = x^2, \quad L = x^2 - \frac{b^2}{x^2 z_{,}^2}, \quad M = -2z, \quad N = 0, \quad \sqrt{G} = \frac{b}{z_{,}};$$

donc les équations (A) et (B) prendont les formes respectives

(A)	(B)
$x^2 \frac{\partial y}{\partial x(\alpha} - x^2 - \frac{b}{z_{,}} = 0,$	$x^2 \frac{\partial y}{\partial x(\beta} - x^2 + \frac{b}{z_{,}} = 0,$
$x^2 \frac{\partial z'}{\partial x(\alpha} + \left(x^2 - \frac{b}{z_{,}}\right)\frac{\partial z_{,}}{\partial x(\alpha} - 2z = 0,$	$x^2 \frac{\partial z'}{\partial x(\beta} + \left(x^2 + \frac{b}{z_{,}}\right)\frac{\partial z_{,}}{\partial x(\beta} - 2z = 0,$
$\frac{\partial z}{\partial x(\alpha} - z' - z_{,}\frac{\partial y}{\partial x(\alpha} = 0,$	$\frac{\partial z}{\partial x(\beta} - z' - z_{,}\frac{\partial y}{\partial x(\beta} = 0.$

Aucune de ces équations, prise séparément, ne satisfait à la condition d'intégrabilité; mais Ampère a indiqué une combinaison intégrable de ces équations, qui s'obtient en multipliant, dans les deux systèmes, la première équation par $-\frac{2z_{,}}{x}$, la seconde par -1, la troisième par $-2x$, et ajoutant ensuite séparément les équations de chaque système. Les deux sommes peuvent être représentées comme il suit,

$$\left.\begin{matrix} x^2\partial z' + 2xz'\partial x + x^2\partial z_{,} + 2xz_{,}\partial x \\ -2z\partial x - 2x\partial z \mp \frac{b\partial z_{,}}{z_{,}} \pm \frac{2b\partial x}{x} \end{matrix}\right\} = 0,$$

en se rappelant que l'équation avec les signes supérieurs se déduit du système (A), et celle avec les signes inférieurs du système (B).

Ces deux équations contiennent des différentielles partielles par rapport à x; mais pour 'seconde variable indépendante on sous-entend dans l'une α, dans l'autre β. On a donc pour intégrales les deux équations

$$x^2z'+x^2z_,-2zx-b\log z_,+2b\log x=\alpha,$$
$$x^2z'+x^2z_,-2zx+b\log z_,-2b\log x=\beta,$$

d'où l'on tire, par addition et soustraction,

$$2x^2(z'+z_,)-4zx=\alpha+\beta,$$

$$2b\log\frac{z_,}{x^2}=\beta-\alpha.$$

La seconde de ces équations donne

$$z_,=x^2e^{\frac{\beta-\alpha}{2b}},$$

et, en substituant cette valeur de $z_,$ dans la première, on aura

$$z'=\frac{\alpha+\beta}{2x^2}+\frac{2z}{x}-x^2e^{\frac{\beta-\alpha}{2b}}.$$

Par conséquent,

$$dz=\left(\frac{\alpha+\beta}{2x^2}+\frac{2z}{x}-x^2e^{\frac{\beta-\alpha}{2b}}\right)dx+e^{\frac{\beta-\alpha}{2b}}x^2dy.$$

En intégrant cette dernière équation, après l'avoir multipliée par $\frac{1}{x^2}$, on obtient l'intégrale particulière

$$z=-\frac{\alpha+\beta}{6x}+e^{\frac{\beta-\alpha}{2b}}(y-x)x^2-x^2\eta=\omega$$

de l'équation donnée, comme il est facile de le vérifier a posteriori.

En considérant maintenant η comme une fonction de α et de β, et joignant à l'équation précédente les deux suivantes,

$$\frac{\partial.\omega}{\partial\alpha}=-\frac{1}{6x}-\frac{1}{2b}e^{\frac{\beta-\alpha}{2b}}(y-x)x^2-x^2\frac{\partial\eta}{\partial\alpha}=0,$$

$$\frac{\partial.\omega}{\partial\beta}=-\frac{1}{6x}+\frac{1}{2b}e^{\frac{\beta-\alpha}{2b}}(y-x)x^2-x^2\frac{\partial\eta}{\partial\beta}=0,$$

on obtiendra l'intégrale générale de l'équation proposée en déterminant la fonction η au moyen de l'équation

$$\frac{\partial^2.\omega}{\partial\alpha\partial\beta}=-\frac{1}{4b^2}e^{\frac{\beta-\alpha}{2b}}(y-x)x^2-x^2\frac{\partial^2\eta}{\partial\alpha\partial\beta}=0.$$

Or, en retranchant la seconde équation de l'intégrale générale, de la troisième, on trouve

$$\frac{1}{b}e^{\frac{\beta-\alpha}{2b}}(y-x)x^2+x^2\left(\frac{\partial\eta}{\partial\alpha}-\frac{\partial\eta}{\partial\beta}\right)=0,$$

Ajoutant cette dernière équation, multipliée par $\frac{1}{4b}$, à l'avant-dernière et divisant la somme par x^2, on obtient l'équation

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial\alpha\partial\beta}-\frac{1}{4b}\left(\frac{\partial\eta}{\partial\alpha}-\frac{\partial\eta}{\partial\beta}\right)=0,$$

Digitized by Google

pour la détermination de la fonction η. Il est aisé de remarquer qu'elle ne s'intègre pas sous forme finie; mais son intégrale générale, d'après la méthode de Laplace, s'exprime au moyen d'intégrales définies.

Pour vérifier les valeurs de R, S, T, on trouve, en différentiant la fonction ω par rapport à x et à y, et considérant α et β comme constantes,

$$\omega' = \frac{\alpha+\beta}{6x^2} + e^{\frac{\beta-\alpha}{2b}}(2xy-3x^2) - 2x\eta, \qquad \omega_{\prime} = e^{\frac{\beta-\alpha}{2b}} x^2.$$

En différentiant ω' et $\omega_{\prime}$ par rapport à α et à β, et considérant x et y comme constantes, il vient

$$\frac{\partial\omega'}{\partial\alpha} = \frac{1}{6x^2} - \frac{1}{2b} e^{\frac{\beta-\alpha}{2b}}(2xy-3x^2) - 2x\frac{\partial\eta}{\partial\alpha}, \qquad \frac{\partial\omega_{\prime}}{\partial\alpha} = -\frac{1}{2b} e^{\frac{\beta-\alpha}{2b}} x^2,$$

$$\frac{\partial\omega'}{\partial\beta} = \frac{1}{6x^2} + \frac{1}{2b} e^{\frac{\beta-\alpha}{2b}}(2xy-3x^2) - 2x\frac{\partial\eta}{\partial\beta}, \qquad \frac{\partial\omega_{\prime}}{\partial\beta} = \frac{1}{2b} e^{\frac{\beta-\alpha}{2b}} x^2.$$

De la première et de la troisième de ces équations on peut éliminer $\frac{\partial\eta}{\partial\alpha}$ et $\frac{\partial\eta}{\partial\beta}$, en leur ajoutant la seconde et la troisième équation de l'intégrale générale, multipliées par $-\frac{2}{x}$. On trouve ainsi

$$\frac{\partial\omega'}{\partial\alpha} = \frac{1}{2x^2} \quad \frac{1}{2b} e^{\frac{\beta-\alpha}{2b}} x^2, \qquad \frac{\partial\omega'}{\partial\beta} = \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{2b} e^{\frac{\beta-\alpha}{2b}} x^2.$$

Mais, en ayant égard à l'équation

$$\omega_{\prime} = e^{\frac{\beta-\alpha}{2b}} x^2,$$

on peut encore écrire les équations précédentes de cette manière,

$$\frac{\partial\omega'}{\partial\alpha} = \frac{1}{2x^2} + \frac{\omega_{\prime}}{2b}, \qquad \frac{\partial\omega'}{\partial\beta} = \frac{1}{2x^2} - \frac{\omega_{\prime}}{2b},$$

$$\frac{\partial\omega_{\prime}}{\partial\alpha} = -\frac{\omega_{\prime}}{2b}, \qquad \frac{\partial\omega_{\prime}}{\partial\beta} = \frac{\omega_{\prime}}{2b}.$$

Ces valeurs doivent être portées dans les formules générales (6), où l'on fera $\gamma = \beta$ et $N = 0$. Pour cela, en divisant les deux premières équations précédentes respectivement par les deux dernières, il vient

$$\frac{\frac{\partial\omega'}{\partial\alpha}}{\frac{\partial\omega_{\prime}}{\partial\alpha}} = -\frac{b}{x^2\omega_{\prime}} - 1, \qquad \frac{\frac{\partial\omega'}{\partial\beta}}{\frac{\partial\omega_{\prime}}{\partial\beta}} = \frac{b}{x^2\omega_{\prime}} - 1.$$

On a d'autre part

$$\frac{K+\sqrt{G}}{H} = 1 + \frac{b}{x^2\omega_{\prime}}, \qquad \frac{K-\sqrt{G}}{H} = 1 - \frac{b}{x^2\omega_{\prime}}.$$

Par suite,

$$\frac{\frac{\partial\omega'}{\partial\alpha}}{\frac{\partial\omega_{\prime}}{\partial\alpha}} = -\frac{K+\sqrt{G}}{H}, \qquad \frac{\frac{\partial\omega'}{\partial\beta}}{\frac{\partial\omega_{\prime}}{\partial\beta}} = -\frac{K-\sqrt{G}}{H};$$

donc $R = 0$ et $T = 0$.

Digitized by Google

Multipliant et ajoutant les équations précédentes, on trouve

$$\frac{\frac{\partial\omega'}{\partial\alpha}}{\frac{\partial\omega_{\prime}}{\partial\alpha}}\cdot\frac{\frac{\partial\omega'}{\partial\beta}}{\frac{\partial\omega_{\prime}}{\partial\beta}}=\frac{K^2-G}{H^2}=\frac{L}{H}\qquad \frac{\frac{\partial\omega'}{\partial\beta}}{\frac{\partial\omega_{\prime}}{\partial\alpha}}+\frac{\frac{\partial\omega'}{\partial\alpha}}{\frac{\partial\omega_{\prime}}{\partial\beta}}=-\frac{2K}{H};$$

par conséquent la seconde des formules (6) donne

$$S=-2\frac{\partial\omega_{\prime}}{\partial\alpha}\cdot\frac{\partial\omega_{\prime}}{\partial\beta}\,\frac{K^2-HL}{H}=-2\frac{\partial\omega'}{\partial\alpha}\cdot\frac{\partial\omega_{\prime}}{\partial\beta}\,\frac{G}{H}.$$

Mais on a

$$\frac{\partial\omega_{\prime}}{\partial\alpha}\cdot\frac{\partial\omega_{\prime}}{\partial\beta}=-\frac{\omega_{\prime}^{2}}{4b^2},\qquad G=\frac{b^2}{\omega_{\prime}^{2}},\qquad H=x^2.$$

Donc

$$S=\frac{1}{2x^2}.$$

142. Nous nous servirons encore de cet exemple pour indiquer plus clairement la différence entre notre méthode de résolution et celle qu'a suivie Ampère. Comme on l'a déjà remarqué plus haut, au lieu de fonder la résolution à la fois sur les deux intégrales satisfaisant aux systèmes (A) et (B), Ampère n'a fait usage que de l'une d'elles

$$x^2z'+x^2z_{\prime}-2xz-b\log z_{\prime}+2b\log x=\alpha.$$

De cette équation aux dérivées partielles du premier ordre, il a d'abord fallu tirer son intégrale complète avec trois constantes arbitraires α, γ, η, intégrale que nous désignerons par

$$V=0;$$

puis son intégrale générale, que l'on obtient en considérant η comme une fonction de α et de γ, et joignant à l'équation précédente celle-ci

$$\frac{\partial.V}{\partial\gamma}=0.$$

Mais, au lieu d'employer pour ce but la méthode de Lagrange et de Charpit, qui donne l'intégrale générale précisément sous la forme voulue, Ampère s'est servi de sa propre méthode d'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre, laquelle ne donne pas, en général, l'intégrale sous la forme des équations

$$V=0,\qquad \frac{\partial.V}{\partial\gamma}=0;$$

de sorte que, pour la ramener à cette forme, il faut encore une transformation spéciale. Tout en rendant pleine justice à l'idée ingénieuse sur laquelle cette transformation est fondée (*), on ne peut toutefois s'empêcher de remarquer que l'application d'un tel procédé au cas actuel complique fort inutilement le calcul. En effet, si l'on forme le système des équations simultanées de Lagrange, correspondant à l'équation proposée aux dérivées partielles des premier ordre, on a

(*) Voy. p. 20 et suiv. du Mémoire d'Ampère.

Digitized by Google

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{x^2 - \frac{b}{z_i}} = \frac{dz}{z'x^2 + z_ix^2 - b} = \frac{-dz'}{2xz_i + \frac{2b}{x}} = \frac{dz_i}{2xz_i},$$

et si l'on égale le premier rapport au dernier, on trouve

$$2\frac{dx}{x} = \frac{dz_i}{z_i}, \qquad \text{d'où } z_i = x^2\gamma.$$

A l'aide de cette équation, on tire de la proposée

$$z' = \frac{2z}{x} + \frac{\alpha + b\log\gamma}{x^2} - x^2\gamma.$$

Enfin, en intégrant l'équation

$$dz = z'dx + z_idy,$$

après y avoir substitué les valeurs précédentes de z' et de z_i, on obtient précisément l'intégrale particulière

$$z = \gamma x^2 y - \gamma x^3 - \frac{\alpha + b\log\gamma}{3x} + x^2\eta = \omega,$$

pour la détermination de laquelle la méthode d'Ampère exige des calculs plus compliqués (*).

Ensuite, Ampère applique la méthode de la variation des constantes arbitraires à l'intégrale particulière précédente. On parvient aux mêmes résultats que lui, en suivant les procédés expliqués plus haut. En considérant η comme une fonction de α et de γ, et joignant à l'équation précédente les deux suivantes,

$$\frac{\partial.\omega}{\partial\alpha} = -\frac{1}{3x} + x^2\frac{\partial\eta}{\partial\alpha} = 0,$$

$$\frac{\partial.\omega}{\partial\gamma} = x^2y - x^3 - \frac{b}{3\gamma x} + x^2\frac{\partial\eta}{\partial\gamma} = 0,$$

on aura l'intégrale générale de l'équation proposée, en déterminant la fonction η au moyen de l'équation (4).

Or, en différentiant ω par rapport à x et à y, et considérant α et γ comme des constantes, on trouve

$$\omega' = 2\gamma xy - 3\gamma x^2 + \frac{\alpha + b\log\gamma}{3x^2} + 2x\eta, \qquad \omega_i = \gamma x^2.$$

En différentiant maintenant ω' et ω_i par rapport à α et à γ, et considérant x et y comme des constantes, il vient

$$\frac{\partial\omega'}{\partial\alpha} = 0, \qquad \frac{\partial\omega'}{\partial\gamma} = x^2,$$

$$\frac{\partial\omega'}{\partial\gamma} = 2xy - 3x^2 + \frac{b}{3\gamma x^2} + 2x\frac{\partial\eta}{\partial\gamma}, \qquad \frac{\partial\omega'}{\partial\alpha} = \frac{1}{3x} + 2x\frac{\partial\eta}{\partial\alpha}.$$

Les deux dernières équations, en vertu de la seconde et de la troisième équation de l'intégrale générale, prennent la forme

$$\frac{\partial\omega'}{\partial\gamma} = -x^2 + \frac{b}{\gamma x^2}, \qquad \frac{\partial\omega'}{\partial\alpha} = \frac{1}{x^2}$$

(*) Voy. p. 145—148 de son Mémoire.

Digitized by Google

En appliquant alors les formules générales (5) ou (6), on trouve très-simplement.

$$R = 0, \qquad S = \frac{b}{\gamma x^2}, \qquad T = \frac{1}{x^2};$$

par suite, l'équation pour la détermination de la fonction η prend la forme

$$\frac{2b}{\gamma}\frac{\partial^2.\omega}{\partial\alpha\partial\gamma} - \frac{\partial^2.\omega}{\partial^2\gamma} = 0,$$

comme la théorie le faisait prévoir. On trouve ensuite

$$\frac{\partial^2.\omega}{\partial\alpha\partial\gamma} = x^2\frac{\partial^2\eta}{\partial\alpha\partial\gamma}, \qquad \frac{\partial^2.\omega}{\partial\gamma^2} = \frac{b}{3\gamma^2 x} + x^2\frac{\partial^2\eta}{\partial\gamma^2},$$

et, en outre, la seconde équation de l'intégrale générale donne

$$\frac{1}{3x^2} = \frac{\partial\eta}{\partial\alpha}.$$

Donc, pour déterminer η, on a finalement l'équation

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial\gamma^2} - \frac{2b}{\gamma}\frac{\partial^2\eta}{\partial\alpha\partial\gamma} + \frac{b}{\gamma^2}\frac{\partial\eta}{\partial\alpha} = 0,$$

sous la forme même que lui a donnée Ampère.

Il faut ensuite soumettre cette équation à deux transformations pour la ramener à la forme plus simple que nous avons ci-dessus obtenue immédiatement. Pour la première transformation, en posant

$$\log\gamma = \varepsilon,$$

introduisons ε comme variable indépendante au lieu de γ; nous obtiendrons l'équation à coefficients constants

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial\varepsilon^2} - 2b\frac{\partial^2\eta}{\partial\alpha\partial\varepsilon} + b\frac{\partial\eta}{\partial\alpha} - \frac{\partial\eta}{\partial\varepsilon} = 0.$$

Pour la seconde transformation, en posant

$$\beta = \alpha + 2b\varepsilon,$$

introduisons β comme variable indépendante au lieu de ε; nous ramènerons enfin l'équation à la forme demandée

$$4b\frac{\partial^2\eta}{\partial\alpha\partial\beta} - \frac{\partial\eta}{\partial\alpha} + \frac{\partial\eta}{\partial\beta} = 0.$$

Ces dernières transformations s'effectuent assez simplement dans l'exemple considéré, parce que l'équation à transformer avait déjà une forme linéaire, non-seulement par rapport aux dérivées secondes, mais encore par rapport aux dérivées premières de la fonction η.

Mais la difficulté de ces transformations augmente, lorsque l'équation à transformer n'est linéaire que par rapport aux dérivées secondes de η. Il est aisé de s'en convaincre en traitant les exemples suivants,

$$z'' + 2z_{,}z'_{,} + (z_{,}^2 - x^2)z_{,,} - z_{,} = 0,$$
$$x^4z'' - 4x^2z_{,}z'_{,} + 3z_{,}z_{,,} + 2x^3z' = 0,$$
$$z'' + 2z_{,}z'_{,} + (z_{,}^2 - b^2)z_{,,} = 0,$$

pour lesquels on peut, au contraire parvenir aux résultats définitifs d'Ampère, de la manière la plus simple possible, en suivant notre méthode.

Digitized by Google

§. 22.

143. Nous avons supposé plus haut, pour l'application de la méthode de la variation des constantes arbitraires à l'intégration de l'équation (1), qu'il existait des intégrales primitives particulières de cette équation, renfermant trois constantes arbitraires. Mais on rencontre des cas particuliers dans lesquels il suffit d'avoir une intégrale particulière avec deux constantes arbitraires. Un cas semblable se présente dans les équations linéaires par rapport aux derivées du second ordre, dans lesquelles il n'entre que z'' et $z'_{,}$, ou que $z'_{,}$ et $z_{,,}$. Il faut remarquer que, dans la théorie d'Ampère, cette forme d'équations offre une importance spéciale, puisque, comme nous l'avons remarqué ci-dessus, on peut toujours ramener à ces formes les équatons complètes, linéaires par rapport à z'', $z'_{,}$ et $z_{,,}$. Dans notre exposition de cette méthode d'intégration, on peut regarder la forme en question comme un cas particulier; en conséquence, nous nous bornerons à la réduction d'un des exemples particulièrs traités par Ampère, pour donner une idée de la méthode d'intégration employée par ce géomètre.

Prenons l'équation

$$zz'_{,} + \frac{z}{z_{,}^2} z_{,,} + z'z_{,} = 0$$

D'après l'examen de sa forme, on en conclut (Ch. I, §. 6) que l'argument de l'une des deux fonctions arbitraires de l'intégrale générale est égal à x. En posant $\alpha = x$, l'autre argument β devra être considéré comme une certaine fonction de x et de y. Soit

$$\beta = f(x, y);$$

on pourra, en vertu de cette équation, introduire comme variables indépendantes x et β, au lieu de x et de y.

En différentiant, dans cette hypothèse, la relation entre β, x, y, partiellement par rapport à x et en regardant la quantité β comme constante, il vient

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x(\beta} = 0, \qquad \text{ou} \quad \frac{\partial \beta}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x(\beta} = 0.$$

On a, en outre,

$$\frac{\partial z_{,}}{\partial x(\beta} = z'_{,} + z_{,,}\frac{\partial y}{\partial x(\beta}, \qquad \frac{\partial z_{,}}{\partial x(\beta} = z_{,,}\frac{\partial y}{\partial x(\beta}.$$

En substituant dans l'équation proposée les valeurs de $z'_{,}$ et de $z_{,,}$ tirées de ces deux dernières équations, il vient

$$z\frac{\partial z_{,}}{\partial x(\beta} + z'z_{,} + z\left(\frac{1}{z_{,}^2} - \frac{\partial y}{\partial x(\beta}\right)\frac{\dfrac{\partial z_{,}}{\partial x(\beta}}{\dfrac{\partial y}{\partial x(\beta}} = 0.$$

Cette dernière équation doit se partager (Ch. III, §. 12) dans les deux suivantes;

$$z\frac{\partial z_{,}}{\partial x(\beta} + z'z_{,} = 0, \qquad \frac{\partial y}{\partial x(\beta} - \frac{1}{z_{,}^2} = 0,$$

auxquelles on en peut encore joindre une troisième,

$$\frac{\partial z}{\partial x(\beta} - z' - z_{,}\frac{\partial y}{\partial x(\beta} = 0.$$

Les trois équations précédentes ne contenant aucune dérivée de z', on ne pourra former avec elles une combinaison intégrable autrement que par l'élimination de z'. A cette fin, éliminons z' entre la première et la troisième, ce qui donne

Digitized by Google

$$z\frac{\partial z'}{\partial x(\beta}+z_{,}\frac{\partial z}{\partial x(\beta}-z_{,}^{2}\frac{\partial y}{\partial x(\beta}=0,$$

ou, en vertu de la seconde des trois mêmes équations,

$$z\frac{\partial z_{,}}{\partial x(\beta}+z_{,}\frac{\partial z}{\partial x(\beta}-1=0.$$

En intégrant cette dernière équation, on trouve

$$zz_{,}-x=\beta.$$

Si l'on considère ici β comme une quantité constante, et que l'on prenne de nouveau x et y comme variables indépendantes, l'équation précédente représentera une intégrale particulière du premier ordre de l'équation proposée. En effet, en la différentiant par rapport à x et à y, il viendra

$$zz'_{,}+z'z_{,}-1=0, \qquad zz_{,,}+z_{,}^{2}=0.$$

Ajoutant la première de ces équations à la seconde, multipliée par $\frac{1}{z_{,}^{2}}$, on retrouve l'équation proposée.

De l'intégrale particulière du premier ordre, en l'intégrant comme une équation différentielle ordinaire (puisqu'il n'y entre pas de dérivées par rapport à x), on tire l'intégrale particulière primitive

$$\omega=\frac{z^{2}}{2}-(x+\beta)y+\eta=0,$$

η désignant une fonction entièrement arbitraire de x. Mais, si l'on considère η comme une fonction de x et de β, la dernière équation continuera à être une intégrale de celle d'où on l'a déduite, pourvu qu'on y joigne la condition

$$\frac{\partial.\omega}{\partial\beta}=-y+\frac{\partial\eta}{\partial\beta}=0.$$

Il reste à trouver la condition qui doit être remplie pour que l'équation

$$zz_{,}-x=\beta$$

continue d'être une intégrale de la proposée. Pour cela, en différentiant la dernière équation par rapport à x et à y, on trouve

$$zz'_{,}+z'z_{,}-1=\frac{\partial\beta}{\partial x}, \qquad zz_{,,}+z_{,}^{2}=\frac{\partial\beta}{\partial y}.$$

Ajoutant la première de ces équations à la seconde, multipliée par $\frac{1}{z_{,}^{2}}$, il vient

$$zz'_{,}+\frac{z}{z_{,}^{2}}z_{,,}+z'z_{,}=\frac{\partial\beta}{\partial x}+\frac{1}{z_{,}^{2}}\frac{\partial\beta}{\partial y}.$$

Par conséquent, la condition cherchée est exprimée par l'équation

$$\frac{\partial\beta}{\partial x}+\frac{1}{z_{,}^{2}}\frac{\partial\beta}{\partial y}=0.$$

Or nous avions

$$\frac{\partial\beta}{\partial x}+\frac{\partial\beta}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x(\beta}=0;$$

donc l'équation de condition prend la forme

$$\frac{\partial y}{\partial x(\beta}-\frac{1}{z_{,}^{2}}=0.$$

Substituant dans cette équation les valeurs

$$y=\frac{\partial\eta}{\partial\beta}, \quad \text{d'où} \quad \frac{\partial y}{\partial x(\beta}=\frac{\partial^{2}\eta}{\partial x\partial\beta},$$

et

Digitized by Google

$$z_{,}^2 = \left(\frac{x+\beta}{z}\right)^2 = \frac{(x+\beta)^2}{2(x+\beta)y-2\eta} = \frac{(x+\beta)^2}{2(x+\beta)\frac{\partial\eta}{\partial\beta}-2\eta},$$

on a, pour déterminer la fonction η, l'équation

$$(x+\beta)^2\frac{\partial^2\eta}{\partial x\partial\beta}-2(x+\beta)\frac{\partial\eta}{\partial\beta}+2\eta=0,$$

intégrable par la méthode de Laplace.

§. 23.

144. La méthode de la variation des constantes arbitraires, sous la forme que nous lui avons donnée dans ce qui précède, constitue le plus général de tous les procédés que l'on ait proposés jusqu'ici pour l'intégration de l'équation

(1) $$Hz''+2Kz'_{,}+Lz_{,,}+M+N(z''z_{,,}-z'^2_{,})=0;$$

car elle seule embrasse tous les cas qui diffèrent par le nombre des intégrales possibles des équations (A) et (B).

En effet, dans ce Chapitre, nous avons considéré son application aux cas où nous ne connaissions pas même une seule intégrale des équations (A) et (B), et à ceux où chacun de ces deux systèmes n'admet par plus d'une intégrale. Nous avons indiqué plus haut (Chap. III, §. 13) l'application de cette méthode à l'autre cas extrême, celui où les deux systèmes (A) et (B) admettent jusqu'à trois intégrales, et se confondent en un seul, en vertu de la condition $G=0$. Mais comme nous avons fondé cette méthode sur la détermination préalable d'une intégrale particulière primitive quelconque de l'équation (1), avec trois constantes arbitraires, il est alors évident de soi-même que, si chacun des systèmes (A) et (B), ou seulement l'un d'entre eux admet deux intégrales, alors nous aurons même plusieurs moyens pour parvenir à l'intégrale particulière demandée de l'équation (1). Les plus avantageux de ces moyens seront évidemment ceux par lesquels on aura introduit dans l'équation (4) α et β comme variables indépendantes.

Pour éclaircir ce procédé, prenons pour exemple l'équation

$$z_{,}z''+(z'+x)z'_{,}+yz_{,,}+y(z''z_{,,}-z'^2_{,})+z_{,}=0,$$

que nous avons déjà intégrée précédemment (Chap. III, §. 17) par la méthode d'**Ampère**, fondée, comme celle de **Monge**, sur la détermination préalable d'une intégrale générale du premier ordre. On a ici

$$H=M=z_{,,}\qquad L=N=y,\qquad K=\sqrt{G}=\frac{z'+x}{2};$$

donc les systèmes (A) et (B) prennent la forme

$z_{,}\frac{\partial y}{\partial x(\alpha}+y\frac{\partial z_{,}}{\partial x(\alpha}-z'-x=0,$	$z_{,}\frac{\partial y}{\partial x(\beta}+y\frac{\partial z_{,}}{\partial x(\beta}=0,$
$\frac{\partial z'}{\partial x(\alpha}+1=0,$	$z_{,}\frac{\partial z'}{\partial x(\beta}+(x+z')\frac{\partial z_{,}}{\partial x(\beta}+z_{,}=0,$
$\frac{\partial z}{\partial x(\alpha}-z'-z_{,}\frac{\partial y}{\partial x(\alpha}=0;$	$\frac{\partial z}{\partial x(\beta}-z'-z_{,}\frac{\partial y}{\partial x(\beta}=0.$

Le premier de ces systèmes fournit l'intégrale

(a) $$z'+x=\text{const.};$$

du second on tire les deux intégrales

(b) $$yz_{,}=\text{const.},$$

(c) $$z_{,}(z'+x)=\text{const.}$$

Les équations (a) et (c), dans lesquelles on peut remplacer les constantes arbitraires respectivement par α et par β, donnent

Digitized by Google

$$z' = \alpha - x, \qquad z_{,} = \frac{\beta}{\alpha},$$

et

$$z = \alpha x - \frac{x^2}{2} + \frac{\beta}{\alpha} y + \eta = \omega.$$

Si l'on considère η comme une fonction de α et de β, et que l'on joigne à l'équation précédente ces deux-ci

$$\frac{\partial.\omega}{\partial\alpha} = x - \frac{\beta y}{\alpha^2} + \frac{\partial\eta}{\partial\alpha} = 0, \qquad \frac{\partial.\omega}{\partial\beta} = \frac{y}{\alpha} + \frac{\partial\eta}{\partial\beta} = 0,$$

on obtient l'intégrale générale de la proposée en déterminant η au moyen de l'équation

$$2S\frac{\partial^2.\omega}{\partial\alpha\partial\beta} + U = 0.$$

Or on a

$$\omega' = \alpha - x, \qquad \omega_{,} = \frac{\beta}{\alpha}, \qquad \omega'' = -1, \qquad \omega'_{,} = 0, \qquad \omega_{,,} = 0,$$

$$\frac{\partial.\omega'}{\partial\alpha} = 1, \qquad \frac{\partial.\omega'}{\partial\beta} = 0, \qquad \frac{\partial.\omega_{,}}{\partial\alpha} = -\frac{\beta}{\alpha^2}, \qquad \frac{\partial.\omega_{,}}{\partial\beta} = \frac{1}{\alpha}.$$

$$\frac{\partial^2.\omega}{\partial\alpha\partial\beta} = -\frac{y}{\alpha^2} + \frac{\partial^2\eta}{\partial\alpha\partial\beta}.$$

D'après cela, les formules générales (6) donnent

$$S = \tfrac{1}{2}, \qquad U = \frac{y}{\alpha^2}.$$

Donc on a, pour déterminer la fonction η, l'équation

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial\alpha\partial\beta} = 0,$$

d'où l'on tire

$$\eta = \varphi(\alpha) + \psi(\beta).$$

Donc l'intégrale générale de l'équation proposée s'exprime au moyen des trois équations

$$z = \left(\alpha - \frac{x}{2}\right)x + \frac{\beta y}{x} + \varphi(\alpha) + \psi(\beta), \quad y = -\alpha\psi'(\beta), \quad x = \frac{\beta y}{\alpha^2} + \varphi'(\alpha).$$

De même, en nous servant de l'intégrale (a) du système (A) et de l'intégrale (b) du système (B), nous exprimerons l'intégrale générale de l'équation proposée par les trois équations

$$z = \left(\alpha - \frac{x}{2}\right)x + \beta\log y + \beta\log\left(\log\frac{1}{\alpha}\right) - \varphi(\alpha) - \psi(\beta),$$

$$x = \varphi'(\alpha) + \frac{\beta}{\alpha\log\alpha}, \qquad y = \psi'(\beta) - \log\left(\log\frac{1}{\alpha}\right).$$

Après avoir montré l'application de la méthode de la variation des constantes arbitraires à tous les cas, en nous fondant toujours sur les mêmes formules générales, nous avons, ce nous semble, des raisons suffisantes pour l'appeler une méthode générale, et une méthode en grande partie nouvelle pour l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre, de celles du moins qui ne s'écartent pas de la forme générale, à laquelle nous avons limité le cadre de notre étude.

Page 224, ligne 3: Au lieu de „détermination" mettre „définition".

Digitized by Google

XIII.

Ueber einen merkwürdigen Satz von den Kegelschnitten.

Von

dem Herausgeber.

---

§. 1.

Zu den merkwürdigsten Sätzen von den Kegelschnitten gehört unstreitig der folgende:

Wenn um eine Ellipse oder eine Hyperbel ein Viereck beschrieben ist, so geht die durch die Mittelpunkte der beiden Diagonalen dieses Vierecks gehende Gerade jederzeit durch den Mittelpunkt der Ellipse oder der Hyperbel.

Diesen merkwürdigen Satz, von welchem schon Newton in seinem unsterblichen Werke: Philosophiae naturalis Principia mathematica wichtige Anwendungen gemacht hat*), werde ich in dieser Abhandlung einer analytischen Untersuchung unterwerfen, welche zu verschiedenen merkwürdigen analytischen Bestimmungen und Beziehungen geführt hat.

Ich werde der Kürze wegen übrigens bloss die Ellipse betrachten, weil aus den für diese Curve gefundenen Resultaten die entsprechenden Resultate für die Hyperbel unmittelbar erhalten werden, wenn man in jenen $-b^2$ für b^2 oder $b\sqrt{-1} = bi$ für b setzt. Ausserdem werde ich eine besondere Behandlung des analogen Satzes von der Parabel beifügen.

---

*) M. s. Lib. I. Sect. V. Prop. XXVII. Problema XIX.

Digitized by Google

§. 2.

Die Gleichung der Ellipse sei wie gewöhnlich:

$$1) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1,$$

und die Coordinaten von vier Punkten in dieser Curve seien:

$$x_0,\ y_0;\quad x_1,\ y_1;\quad x_2,\ y_2;\quad x_3,\ y_3;$$

so dass also:

2)

$$\left(\frac{x_0}{a}\right)^2+\left(\frac{y_0}{b}\right)^2=1,\qquad \left(\frac{x_1}{a}\right)^2+\left(\frac{y_1}{b}\right)^2=1,$$

$$\left(\frac{x_2}{a}\right)^2+\left(\frac{y_2}{b}\right)^2=1,\qquad \left(\frac{x_3}{a}\right)^2+\left(\frac{y_3}{b}\right)^2=1$$

ist. Legen wir nun durch diese vier Punkte Berührende an die Ellipse, so sind deren Gleichungen bekanntlich nach der Reihe:

$$3) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \begin{cases} \dfrac{x_0x}{a^2}+\dfrac{y_0y}{b^2}=1, \\[2ex] \dfrac{x_1x}{a^2}+\dfrac{y_1y}{b^2}=1, \\[2ex] \dfrac{x_2x}{a^2}+\dfrac{y_2y}{b^2}=1, \\[2ex] \dfrac{x_3x}{a^2}+\dfrac{y_3y}{b^2}=1. \end{cases}$$

Wir wollen diese Berührenden nach der Reihe die

1ste, 2te, 3te, 4te

Berührende nennen, und werden dann die Coordinaten der Durchschnittspunkte der

1sten und 2ten, 2ten und 3ten, 3ten und 4ten, 4ten und 1sten

Berührenden beziehungsweise durch

$$x_{01},\ y_{01};\quad x_{12},\ y_{12};\quad x_{23},\ y_{23};\quad x_{30},\ y_{30}$$

bezeichnen. Die Punkte $(x_{01}y_{01})$ und $(x_{23}y_{23})$, $(x_{12}y_{12})$ und $(x_{30}y_{30})$ sind die einander gegenüberstehenden Ecken des um die Ellipse be-

schriebenen Vierecks, und die diese Gegenecken verbindenden Geraden sind die beiden Diagonalen des Vierecks.

Zur Bestimmung der Coordinaten x_{01}, y_{01} des Durchschnittspunkts $(x_{01}y_{01})$ der 1sten und 2ten Berührenden haben wir nach 3) die beiden Gleichungen:

$$\frac{x_0}{a^2}x_{01}+\frac{y_0}{b^2}y_{01}=1,\qquad \frac{x_1}{a^2}x_{01}+\frac{y_1}{b^2}y_{01}=1;$$

aus denen man sogleich:

$$4)\ldots\ldots x_{01}=\frac{a^2(y_1-y_0)}{x_0y_1-y_0x_1},\qquad y_{01}=-\frac{b^2(x_1-x_0)}{x_0y_1-y_0x_1}$$

erhält.

Nun ist aber:

$$(y_1-y_0)(y_1+y_0)=y_1{}^2-y_0{}^2=\frac{b^2}{a^2}\{(a^2-x_1{}^2)-(a^2-x_0{}^2)\},$$

$$(x_1-x_0)(x_1+x_0)=x_1{}^2-x_0{}^2=\frac{a^2}{b^2}\{(b^2-y_1{}^2)-(b^2-y_0{}^2)\};$$

also:

$$(y_1-y_0)(y_1+y_0)=\frac{b^2}{a^2}(x_0-x_1)(x_0+x_1),$$

$$(x_1-x_0)(x_1+x_0)=\frac{a^2}{b^2}(y_0-y_1)(y_0+y_1).$$

Ferner ist:

$$(x_0y_1-y_0x_1)(y_1+y_0)=x_0y_1{}^2-y_0{}^2x_1+y_0y_1(x_0-x_1),$$

$$(x_0y_1-y_0x_1)(x_1+x_0)=y_1x_0{}^2-x_1{}^2y_0-x_0x_1(y_0-y_1)$$

und

$$x_0y_1{}^2-y_0{}^2x_1=\frac{b^2}{a^2}\{x_0(a^2-x_1{}^2)-x_1(a^2-x_0{}^2)\},$$

$$y_0x_1{}^2-x_0{}^2y_1=\frac{a^2}{b^2}\{y_0(b^2-y_1{}^2)-y_1(b^2-y_0{}^2)\};$$

also:

$$x_0y_1{}^2-y_0{}^2x_1=\frac{b^2}{a^2}\{a^2(x_0-x_1)+x_0x_1(x_0-x_1)\},$$

$$y_0x_1{}^2-x_0{}^2y_1=\frac{a^2}{b^2}\{b^2(y_0-y_1)+y_0y_1(y_0-y_1)\}$$

Digitized by Google

oder:

$$x_0{y_1}^2-{y_0}^2x_1=\frac{b^2}{a^2}(a^2+x_0x_1)(x_0-x_1),$$

$$y_0{x_1}^2-{x_0}^2y_1=\frac{a^2}{b^2}(b^2+y_0y_1)(y_0-y_1);$$

folglich nach dem Obigen:

$$(x_0y_1-y_0x_1)(y_1+y_0)=\frac{a^2b^2+b^2x_0x_1+a^2y_0y_1}{a^2}(x_0-x_1),$$

$$(x_0y_1-y_0x_1)(x_1+x_0)=-\frac{a^2b^2+b^2x_0x_1+a^2y_0y_1}{b^2}(y_0-y_1).$$

Daher ist, wie man sogleich übersieht:

$$5)\;\ldots\ldots\quad\begin{cases}x_{01}=\dfrac{a^2b^2(x_0+x_1)}{a^2b^2+b^2x_0x_1+a^2y_0y_1},\\[2ex] y_{01}=\dfrac{a^2b^2(y_0+y_1)}{a^2b^2+b^2x_0x_1+a^2y_0y_1}.\end{cases}$$

Durch gehörige Erhöhung der Indices oder Accente erhält n hieraus:

$$6)\;\ldots\ldots\quad\begin{cases}x_{12}=\dfrac{a^2b^2(x_1+x_2)}{a^2b^2+b_2x_1x_2+a^2y_1y_2},\\[2ex] y_{12}=\dfrac{a^2b^2(y_1+y_2)}{a^2b^2+b^2x_1x_2+a^2y_1y_2};\end{cases}$$

$$7)\;\ldots\ldots\quad\begin{cases}x_{23}=\dfrac{a^2b^2(x_2+x_3)}{a^2b^2+b^2x_2x_3+a^2y_2y_3},\\[2ex] y_{23}=\dfrac{a^2b^2(y_2+y_3)}{a^2b^2+b^2x_2x_3+a^2y_2y_3};\end{cases}$$

$$8)\;\ldots\ldots\quad\begin{cases}x_{30}=\dfrac{a^2b^2(x_3+x_0)}{a^2b^2+b^2x_3x_0+a^2y_3y_0},\\[2ex] y_{30}=\dfrac{a^2b^2(y_3+y_0)}{a^2b^2+b^2x_3x_0+a^2y_3y_0}.\end{cases}$$

Die Gleichung der durch die Mittelpunkte der beiden Diagon des umschriebenen Vierecks gehenden Geraden ist:

$$y-\tfrac{1}{2}(y_{01}+y_{23})=\frac{\frac{1}{2}(y_{01}+y_{23})-\frac{1}{2}(y_{12}+y_{30})}{\frac{1}{2}(x_{01}+x_{23})-\frac{1}{2}(x_{12}+x_{30})}\{x-\tfrac{1}{2}(x_{01}+x_{23})\},$$

Digitized by Google

also:

$$(x_{01}-x_{12}+x_{23}-x_{30})y-(y_{01}-y_{12}+y_{23}-y_{30})x$$
$$=\tfrac{1}{2}\{(x_{01}-x_{12}+x_{23}-x_{30})(y_{01}+y_{23})-(y_{01}-y_{12}+y_{23}-y_{30})(x_{01}+x_{23})\}.$$

Die Gleichung dieser Geraden ist aber auch:

$$y-\tfrac{1}{2}(y_{12}+y_{30})=\frac{\tfrac{1}{2}(y_{01}+y_{23})-\tfrac{1}{2}(y_{12}+y_{30})}{\tfrac{1}{2}(x_{01}+x_{23})-\tfrac{1}{2}(x_{12}+x_{30})}\{x-\tfrac{1}{2}(x_{12}+x_{30})\},$$

also:

$$(x_{01}-x_{12}+x_{23}-x_{30})y-(y_{01}-y_{12}+y_{23}-y_{30})x$$
$$=\tfrac{1}{2}\{(x_{01}-x_{12}+x_{23}-x_{30})(y_{12}+y_{30})-(y_{01}-y_{12}+y_{23}-y_{30})(x_{12}+x_{30})\}.$$

Durch Addition der beiden vorstehenden Gleichungen der in Rede stehenden Geraden erhält man für dieselbe die Gleichung:

9)
$$(x_{01}-x_{12}+x_{23}-x_{30})y-(y_{01}-y_{12}+y_{23}-y_{30})x$$
$$=\frac{1}{4}\left\{\begin{array}{l}\quad(x_{01}-x_{12}+x_{23}-x_{30})(y_{01}+y_{12}+y_{23}+y_{30})\\-(y_{01}-y_{12}+y_{23}-y_{30})(x_{01}+x_{12}+x_{23}+x_{30})\end{array}\right\},$$

oder, wie man leicht findet:

10)
$$(x_{01}-x_{12}+x_{23}-x_{30})y-(y_{01}-y_{12}+y_{23}-y_{30})x$$
$$=\tfrac{1}{2}\{(x_{01}+x_{23})(y_{12}+y_{30})-(x_{12}+x_{30})(y_{01}+y_{23})\}.$$

Nach 4) ist:

$$x_{01}+x_{23}=\frac{a^2(y_1-y_0)}{x_0y_1-y_0x_1}+\frac{a^2(y_3-y_2)}{x_2y_3-y_2x_3},$$

$$y_{01}+y_{23}=-\frac{b^2(x_1-x_0)}{x_0y_1-y_0x_1}-\frac{b^2(x_3-x_2)}{x_2y_3-y_2x_3};$$

und:

$$x_{12}+x_{30}=\frac{a^2(y_2-y_1)}{x_1y_2-y_1x_2}+\frac{a^2(y_0-y_3)}{x_3y_0-y_3x_0},$$

$$y_{12}+y_{30}=-\frac{b^2(x_2-x_1)}{x_1y_2-y_1x_2}-\frac{b^2(x_0-x_3)}{x_3y_0-y_3x_0};$$

also ist:

$$\frac{x_{01}+x_{23}}{y_{01}+y_{23}}=-\frac{a^2}{b^2}\cdot\frac{(y_1-y_0)(x_2y_3-y_2x_3)+(y_3-y_2)(x_0y_1-y_0x_1)}{(x_1-x_0)(x_2y_3-y_2x_3)+(x_3-x_2)(x_0y_1-y_0x_1)},$$

$$\frac{x_{12}+x_{30}}{y_{12}+y_{30}}=-\frac{a^2}{b^2}\cdot\frac{(y_2-y_1)(x_3y_0-y_3x_0)+(y_0-y_3)(x_1y_2-y_1x_2)}{(x_2-x_1)(x_3y_0-y_3x_0)+(x_0-x_3)(x_1y_2-y_1x_2)};$$

Digitized by Google

und folglich der Zähler von

$$\frac{x_{01}+x_{23}}{y_{01}+y_{23}}-\frac{x_{12}+x_{30}}{y_{12}+y_{30}}$$

$$=\frac{(x_{01}+x_{23})(y_{12}+y_{30})-(x_{12}+x_{30})(y_{01}+y_{23})}{(y_{01}+y_{23})(y_{12}+y_{30})}$$

ohne Rücksicht auf den Factor $-\frac{a^2}{b^2}$:

$$\begin{aligned}
&\{(y_1-y_0)(x_2y_3-y_2x_3)+(y_3-y_2)(x_0y_1-y_0x_1)\}\\
\times&\{(x_2-x_1)(x_3y_0-y_3x_0)+(x_0-x_3)(x_1y_2-y_1x_2)\}\\
-&\{(y_2-y_1)(x_3y_0-y_3x_0)+(y_0-y_3)(x_1y_2-y_1x_2)\}\\
\times&\{(x_1-x_0)(x_2y_3-y_2x_3)+(x_3-x_2)(x_0y_1-y_0x_1)\}.
\end{aligned}$$

Durch Entwickelung dieses Zählers erhält man leicht:

$$\begin{aligned}
&-\{(x_0y_1-y_0x_1)+(x_1y_2-y_1x_2)+(x_2y_0-y_2x_0)\}(x_2y_3-y_2x_3)(x_3y_0-y_3x_0)\\
&+\{(x_1y_2-y_1x_2)+(x_2y_3-y_2x_3)+(x_3y_1-y_3x_1)\}(x_3y_0-y_3x_0)(x_0y_1-y_0x_1)\\
&-\{(x_2y_3-y_2x_3)+(x_3y_0-y_3x_0)+(x_0y_2-y_0x_2)\}(x_0y_1-y_0x_1)(x_1y_2-y_1x_2)\\
&+\{(x_3y_0-y_3x_0)+(x_0y_1-y_0x_1)+(x_1y_3-y_1x_3)\}(x_1y_2-y_1x_2)(x_2y_3-y_2x_3),
\end{aligned}$$

also, wie man mittelst leichter Rechnung findet:

$$\begin{aligned}
&-(x_0y_1-y_0x_1)(x_0y_2-y_0x_2)(x_1y_2-y_1x_2)\\
&+(x_1y_2-y_1x_2)(x_1y_3-y_1x_3)(x_2y_3-y_2x_3)\\
&-(x_2y_3-y_2x_3)(x_2y_0-y_2x_0)(x_3y_0-y_3x_0)\\
&+(x_3y_0-y_3x_0)(x_3y_1-y_3x_1)(x_0y_1-y_0x_1)
\end{aligned}$$

und folglich nach weiterer Entwickelung:

$$\begin{aligned}
&x_0y_0\{x_1^2(y_2^2-y_3^2)+x_2^2(y_3^2-y_1^2)+x_3^2(y_1^2-y_2^2)\}\\
&-x_1y_1\{x_2^2(y_3^2-y_0^2)+x_3^2(y_0^2-y_2^2)+x_0^2(y_2^2-y_3^2)\}\\
&+x_2y_2\{x_3^2(y_0^2-y_1^2)+x_0^2(y_1^2-y_3^2)+x_1^2(y_3^2-y_0^2)\}\\
&-x_3y_3\{x_0^2(y_1^2-y_2^2)+x_1^2(y_2^2-y_0^2)+x_2^2(y_0^2-y_1^2)\},
\end{aligned}$$

also, weil

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$$

ist:

Digitized by Google

$$\frac{b^2}{a^2}\cdot x_0y_0\{x_1{}^2(x_3{}^2-x_2{}^2)+x_2{}^2(x_1{}^2-x_3{}^2)+x_3{}^2(x_2{}^2-x_1{}^2)\}$$

$$-\frac{b^2}{a^2}\cdot x_1y_1\{x_2{}^2(x_0{}^2-x_3{}^2)+x_3{}^2(x_2{}^2-x_0{}^2)+x_0{}^2(x_3{}^2-x_2{}^2)\}$$

$$+\frac{b^2}{a^2}\cdot x_2y_2\{x_3{}^2(x_1{}^2-x_0{}^2)+x_0{}^2(x_3{}^2-x_1{}^2)+x_1{}^2(x_0{}^2-x_3{}^2)\}$$

$$-\frac{b^2}{a^2}\cdot x_3y_3\{x_0{}^2(x_2{}^2-x_1{}^2)+x_1{}^2(x_0{}^2-x_2{}^2)+x_2{}^2(x_1{}^2-x_0{}^2)\},$$

woraus sich ergiebt, dass unser obiger Zähler verschwindet.

Also verschwindet der Bruch

$$\frac{(x_{01}+x_{23})(y_{12}+y_{30})-(x_{12}+x_{30})(y_{01}+y_{23})}{(y_{01}+y_{23})(y_{12}+y_{30})},$$

und es ist folglich:

11) . . . $(x_{01}+x_{23})(y_{12}+y_{30})-(x_{12}+x_{30})(y_{01}+y_{23})=0,$

oder:

12) . . . . $(x_{01}+x_{23})(y_{12}+y_{30})=(x_{12}+x_{30})(y_{01}+y_{23}),$

also:

13) . . . . $\frac{y_{01}+y_{23}}{x_{01}+x_{23}}=\frac{y_{12}+y_{30}}{x_{12}+x_{30}}.$

Folglich ist die Gleichung 10) der durch die Mittelpunkte der beiden Diagonalen des umschriebenen Vierecks gehenden Geraden:

14) . . $(x_{01}-x_{12}+x_{23}-x_{30})y-(y_{01}-y_{12}+y_{23}-y_{30})x=0,$

oder:

15) . . . . $y=\frac{y_{01}-y_{12}+y_{23}-y_{30}}{x_{01}-x_{12}+x_{23}-x_{30}}x,$

und diese Gerade geht folglich durch den Anfang der Coordinaten, also durch den Mittelpunkt des Kegelschnitts, welches der zu beweisende Satz war.

§. 3.

Weil nach 12)

$$y_{12}+y_{30}=\frac{x_{12}+x_{30}}{x_{01}+x_{23}}(y_{01}+y_{23}$$

Digitized by Google

ist, so ist, wie man sogleich übersieht:

$$\frac{y_{01}-y_{12}+y_{23}-y_{30}}{x_{01}-x_{12}+x_{23}-x_{30}}=\frac{x_{01}-x_{12}+x_{23}-x_{30}}{x_{01}-x_{12}+x_{23}-x_{30}}\cdot\frac{y_{01}+y_{23}}{x_{01}+x_{23}},$$

folglich:

$$\frac{y_{01}-y_{12}+y_{23}-y_{30}}{x_{01}-x_{12}+x_{23}-x_{30}}=\frac{y_{01}+y_{23}}{x_{01}+x_{23}}=\frac{y_{12}+y_{30}}{x_{12}+x_{30}},$$

und daher nach 15) die Gleichung der durch die Mittelpunkte der beiden Diagonalen des umschriebenen Vierecks gehenden Geraden:

$$16) \ldots\ldots\quad y=\frac{y_{01}+y_{23}}{x_{01}+x_{23}}x=\frac{y_{12}+y_{30}}{x_{12}+x_{30}}x.$$

Nach 4) ist:

$$x_{01}=\frac{a^2(y_1-y_0)}{x_0y_1-y_0x_1},\qquad y_{01}=-\frac{b^2(x_1-x_0)}{x_0y_1-y_0x_1};$$

und durch Erhöhung der Indices:

$$x_{23}=\frac{a^2(y_3-y_2)}{x_2y_3-y_2x_3},\qquad y_{23}=-\frac{b^2(x_3-x_2)}{x_2y_3-y_2x_3};$$

also ist offenbar:

$$\frac{y_{01}+y_{23}}{x_{01}+x_{23}}=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{(x_1-x_0)(x_2y_3-y_2x_3)+(x_3-x_2)(x_0y_1-y_0x_1)}{(y_1-y_0)(x_2y_3-y_2x_3)+(y_3-y_2)(x_0y_1-y_0x_1)}$$

und durch Erhöhung der Indices:

$$\frac{y_{12}+y_{30}}{x_{12}+x_{30}}=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{(x_2-x_1)(x_3y_0-y_3x_0)+(x_0-x_3)(x_1y_2-y_1x_2)}{(y_2-y_1)(x_3y_0-y_3x_0)+(y_0-y_3)(x_1y_2-y_1x_2)};$$

folglich ist die Gleichung der durch die Mittelpunkte der beiden Diagonalen des umschriebenen Vierecks gehenden Geraden:

$$17) \ldots\quad y=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{(x_1-x_0)(x_2y_3-y_2x_3)+(x_3-x_2)(x_0y_1-y_0x_1)}{(y_1-y_0)(x_2y_3-y_2x_3)+(y_3-y_2)(x_0y_1-y_0x_1)}x$$

oder:

$$18) \ldots\quad y=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{(x_2-x_1)(x_3y_0-y_3x_0)+(x_0-x_3)(x_1y_2-y_1x_2)}{(y_2-y_1)(x_3y_0-y_3x_0)+(y_0-y_3)(x_1y_2-y_1x_2)}x.$$

Nach 5) und 7) ist:

Digitized by Google

$$x_{01}=\frac{a^2b^2(x_0+x_1)}{a^2b^2+b^2x_0x_1+a^2y_0y_1},\qquad y_{01}=\frac{a^2b^2(y_0+y_1)}{a^2b^2+b^2x_0x_1+a^2y_0y_1}$$

und

$$x_{23}=\frac{a^2b^2(x_2+x_3)}{a^2b^2+b^2x_2x_3+a^2y_2y_3},\qquad y_{23}=\frac{a^2b^2(y_2+y_3)}{a^2b^2+b^2x_2x_3+a^2y_2y_3};$$

also ist, wie man leicht findet:

$$x_{01}+x_{23}$$
$$=a^2b^2.\frac{\left\{\begin{array}{l}a^2b^2(x_0+x_1+x_2+x_3)\\+(x_0+x_1)(a^2y_2y_3+b^2x_2x_3)+(x_2+x_3)(a^2y_0y_1+b^2x_0x_1)\end{array}\right\}}{(a^2b^2+b^2x_0x_1+a^2y_0y_1)(a^2b^2+b^2x_2x_3+a^2y_2y_3)},$$

$$y_{01}+y_{23}$$
$$=a^2b^2.\frac{\left\{\begin{array}{l}a^2b^2(y_0+y_1+y_2+y_3)\\+(y_0+y_1)(a^2y_2y_3+b^2x_2x_3)+(y_2+y_3)(a^2y_0y_1+b^2x_0x_1)\end{array}\right\}}{(a^2b^2+b^2x_0x_1+a^2y_0y_1)(a^2b^2+b^2x_2x_3+a^2y_2y_3)};$$

und durch Erhöhung der Indices:

$$x_{12}+x_{30}$$
$$=a^2b^2.\frac{\left\{\begin{array}{l}a^2b^2(x_0+x_1+x_2+x_3)\\+(x_1+x_2)(a^2y_3y_0+b^2x_3x_0)+(x_3+x_0)(a^2y_1y_2+b^2x_1x_2)\end{array}\right\}}{(a^2b^2+b^2x_1x_2+a^2y_1y_2)(a^2b^2+b^2x_3x_0+a^2y_3y_0)},$$

$$y_{12}+y_{30}$$
$$=a^2b^2.\frac{\left\{\begin{array}{l}a^2b^2(y_0+y_1+y_2+y_3)\\+(y_1+y_2)(a^2y_3y_0+b^2x_3x_0)+(y_3+y_0)(a^2y_1y_2+b^2x_1x_2)\end{array}\right\}}{(a^2b^2+b^2x_1x_2+a^2y_1y_2)(a^2b^2+b^2x_3x_0+a^2y_3y_0)}.$$

Folglich kann die Gleichung der durch die Mittelpunkte der beiden Diagonalen des umschriebenen Vierecks gehenden Geraden auch auf folgende Art ausgedrückt werden:

19)

$$y=\frac{\left\{\begin{array}{l}a^2b^2(y_0+y_1+y_2+y_3)\\+(y_0+y_1)(a^2y_2y_3+b^2x_2x_3)+(y_2+y_3)(a^2y_0y_1+b^2x_0x_1)\end{array}\right\}}{\left\{\begin{array}{l}a^2b^2(x_0+x_1+x_2+x_3)\\+(x_0+x_1)(a^2y_2y_3+b^2x_2x_3)+(x_2+x_3)(a^2y_0y_1+b^2x_0x_1)\end{array}\right\}}x$$

oder:

20)

$$y=\frac{\left\{\begin{array}{l}a^2b^2(y_0+y_1+y_2+y_3)\\+(y_1+y_2)(a^2y_3y_0+b^2x_3x_0)+(y_3+y_0)(a^2y_1y_2+b^2x_1x_2)\end{array}\right\}}{\left\{\begin{array}{l}a^2b^2(x_0+x_1+x_2+x_3)\\+(x_1+x_2)(a^2y_3y_0+b^2x_3x_0)+(x_3+x_0)(a^2y_1y_2+b^2x_1x_2)\end{array}\right\}}x.$$

Digitized by Google

Im Falle des Kreises, wo $a=b$ ist, werden diese Gleichungen:

21)

$$y=\frac{\left\{\begin{matrix}a^2(y_0+y_1+y_2+y_3)\\+(y_0+y_1)(y_2y_3+x_2x_3)+(y_2+y_3)(y_0y_1+x_0x_1)\end{matrix}\right\}}{\left\{\begin{matrix}a^2(x_0+x_1+x_2+x_3)\\+(x_0+x_1)(y_2y_3+x_2x_3)+(x_2+x_3)(y_0y_1+x_0x_1)\end{matrix}\right\}}x$$

oder:

22)

$$y=\frac{\left\{\begin{matrix}a^2(y_0+y_1+y_2+y_3)\\+(y_1+y_2)(y_3y_0+x_3x_0)+(y_3+y_0)(y_1y_2+x_1x_2)\end{matrix}\right\}}{\left\{\begin{matrix}a^2(x_0+x_1+x_2+x_3)\\+(x_1+x_2)(y_3y_0+x_3x_0)+(x_3+x_0)(y_1y_2+x_1x_2)\end{matrix}\right\}}x.$$

Setzt man im Falle der Ellipse *):

$$x_0=a\cos u_0,\qquad y_0=b\sin u_0;$$
$$x_1=a\cos u_1,\qquad y_1=b\sin u_1;$$
$$x_2=a\cos u_2,\qquad y_2=b\sin u_2;$$
$$x_3=a\cos u_3,\qquad y_3=b\sin u_3;$$

so wird der Zähler des Bruchs in der Gleichung 19) mit Weglassung des Factors a^2b^3:

$$\sin u_0+\sin u_1+\sin u_2+\sin u_3+(\sin u_0+\sin u_1)\cos(u_2-u_3)$$
$$+(\sin u_2+\sin u_3)\cos(u_0-u_1)$$
$$=(\sin u_0+\sin u_1)\{1+\cos(u_2-u_3)\}+(\sin u_2+\sin u_3)\{1+\cos(u_0-u_1)\}$$
$$=4\sin\tfrac{1}{2}(u_0+u_1)\cos\tfrac{1}{2}(u_0-u_1)\cos\tfrac{1}{2}(u_2-u_3)^2$$
$$+4\sin\tfrac{1}{2}(u_2+u_3)\cos\tfrac{1}{2}(u_2-u_3)\cos\tfrac{1}{2}(u_0-u_1)^2,$$

und der Nenner des in Rede stehenden Bruchs wird nach Weglassung des Factors a^2b^3:

$$\cos u_0+\cos u_1+\cos u_2+\cos u_3+(\cos u_0+\cos u_1)\cos(u_2-u_3)$$
$$+(\cos u_2+\cos u_3)\cos(u_0-u_1)$$
$$=(\cos u_0+\cos u_1)\{1+\cos(u_2-u_3)\}+(\cos u_2+\cos u_3)\{1+\cos(u_0-u_1)\}$$
$$=4\cos\tfrac{1}{2}(u_0+u_1)\cos\tfrac{1}{2}(u_0-u_1)\cos\tfrac{1}{2}(u_2-u_3)^2$$
$$+4\cos\tfrac{1}{2}(u_2+u_3)\cos\tfrac{1}{2}(u_2-u_3)\cos\tfrac{1}{2}(u_0-u_1)^2.$$

Also ist der in Rede stehende Bruch:

---

*) M. s. die Abhandlung Thl. XXIV. Nr. XXIX.

Digitized by Google

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(u_0+u_1)\cos\frac{1}{2}(u_2-u_3)+\sin\frac{1}{2}(u_2+u_3)\cos\frac{1}{2}(u_0-u_1)}{\cos\frac{1}{2}(u_0+u_1)\cos\frac{1}{2}(u_2-u_3)+\cos\frac{1}{2}(u_2+u_3)\cos\frac{1}{2}(u_0-u_1)},$$

für dessen Zähler und Nenner sich offenbar auch beziehungsweise die Ausdrücke

$$\begin{aligned}&\sin\tfrac{1}{2}(-u_0+u_1+u_2+u_3)\\ +&\sin\tfrac{1}{2}(u_0-u_1+u_2+u_3)\\ +&\sin\tfrac{1}{2}(u_0+u_1-u_2+u_3)\\ +&\sin\tfrac{1}{2}(u_0+u_1+u_2-u_3)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}&\cos\tfrac{1}{2}(-u_0+u_1+u_2+u_3)\\ +&\cos\tfrac{1}{2}(u_0-u_1+u_2+u_3)\\ +&\cos\tfrac{1}{2}(u_0+u_1-u_2+u_3)\\ +&\cos\tfrac{1}{2}(u_0+u_1+u_2-u_3)\end{aligned}$$

setzen lassen.

Es würden sich hier noch manche weitere Entwickelungen anschliessen lassen, die ich aber für jetzt übergehe, um nun im folgenden Paragraphen die Parabel zu betrachten.

§. 4.

Die Gleichung der Parabel sei wie gewöhnlich:

$$1) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad y^2 = px,$$

und

$$x_0,\ y_0;\quad x_1,\ y_1;\quad x_2,\ y_2;\quad x_3,\ y_3$$

seien die Coordinaten von vier Punkten in derselben.

Bekanntlich ist die Gleichung der Berührenden in dem Punkte (x_0y_0):

$$y-y_0=\frac{y_0}{2x_0}(x-x_0)$$

oder:

$$y-y_0=\frac{p}{2y_0}(x-x_0);$$

oder:

$$2x_0y-y_0x=x_0y_0$$

oder:

$$2y_0y-px=px_0.$$

Digitized by Google

Bezeichnen wir nun die Coordinaten des Durchschnittspunkts der beiden Berührenden in den Punkten $(x_0 y_0)$ und $(x_1 y_1)$ wie früher durch x_{01}, y_{01}; so haben wir zu deren Bestimmung die Gleichungen:

$$2x_0 y_{01} - y_0 x_{01} = x_0 y_0, \qquad 2x_1 y_{01} - y_1 x_{01} = x_1 y_1$$

oder:

$$2y_0 y_{01} - p x_{01} = p x_0, \qquad 2y_1 y_{01} - p x_{01} = p x_1,$$

aus denen sich

$$x_{01} = \frac{(y_0 - y_1) x_0 x_1}{x_0 y_1 - y_0 x_1}, \qquad y_{01} = \frac{(x_0 - x_1) y_0 y_1}{2(x_0 y_1 - y_0 x_1)}$$

oder:

$$x_{01} = \frac{x_0 y_1 - y_0 x_1}{y_0 - y_1}, \qquad y_{01} = \frac{p(x_0 - x_1)}{2(y_0 - y_1)}$$

ergiebt.

Wir haben also jetzt überhaupt die folgenden Formeln:

2)

$$x_{01} = \frac{(y_0 - y_1) x_0 x_1}{x_0 y_1 - y_0 x_1}, \qquad y_{01} = \frac{(x_0 - x_1) y_0 y_1}{2(x_0 y_1 - y_0 x_1)};$$

$$x_{12} = \frac{(y_1 - y_2) x_1 x_2}{x_1 y_2 - y_1 x_2}, \qquad y_{12} = \frac{(x_1 - x_2) y_1 y_2}{2(x_1 y_2 - y_1 x_2)};$$

$$x_{23} = \frac{(y_2 - y_3) x_2 x_3}{x_2 y_3 - y_2 x_3}, \qquad y_{23} = \frac{(x_2 - x_3) y_2 y_3}{2(x_2 y_3 - y_2 x_3)};$$

$$x_{30} = \frac{(y_3 - y_0) x_3 x_0}{x_3 y_0 - y_3 x_0}, \qquad y_{30} = \frac{(x_3 - x_0) y_3 y_0}{2(x_3 y_0 - y_3 x_0)};$$

oder:

3)

$$x_{01} = \frac{x_0 y_1 - y_0 x_1}{y_0 - y_1}, \qquad y_{01} = \frac{p(x_0 - x_1)}{2(y_0 - y_1)};$$

$$x_{12} = \frac{x_1 y_2 - y_1 x_2}{y_1 - y_2}, \qquad y_{12} = \frac{p(x_1 - x_2)}{2(y_1 - y_2)};$$

$$x_{23} = \frac{x_2 y_3 - y_2 x_3}{y_2 - y_3}, \qquad y_{23} = \frac{p(x_2 - x_3)}{2(y_2 - y_3)};$$

$$x_{30} = \frac{x_3 y_0 - y_3 x_0}{y_3 - y_0}, \qquad y_{30} = \frac{p(x_3 - x_0)}{2(y_3 - y_0)}.$$

Ganz ebenso wie in §. 2. ist die Gleichung der durch d

Mittelpunkte der Diagonalen des umschriebenen Vierecks gehenden Geraden:

4)

$$(x_{01}-x_{12}+x_{23}-x_{30})y-(y_{01}-y_{12}+{}_{23}-y_{30})x$$
$$=\tfrac{1}{2}\{(x_{01}+x_{23})(y_{12}+y_{30})-(x_{12}+x_{30})(y_{01}+y_{23})\}.$$

Nach 3) ist aber, wie man leicht findet, wenn man Zähler und Nenner der Brüche in 3) nach der Reihe mit

$$y_0+y_1,\quad y_1+y_2,\quad y_2+y_3,\quad y_3+y_0$$

multiplicirt:

5)

$$x_{01}=\frac{y_0y_1}{p},\qquad y_{01}=\frac{y_0+y_1}{2};$$

$$x_{12}=\frac{y_1y_2}{p},\qquad y_{12}=\frac{y_1+y_2}{2};$$

$$x_{23}=\frac{y_2y_3}{p},\qquad y_{23}=\frac{y_2+y_3}{2};$$

$$x_{30}=\frac{y_3y_0}{p},\qquad y_{30}=\frac{y_3+y_0}{2};$$

also, wie man leicht findet:

6) . . . . . $$\left\{\begin{array}{l} x_{01}-x_{12}+x_{23}-x_{30}=\dfrac{(y_0-y_2)(y_1-y_3)}{p},\\ y_{01}-y_{12}+y_{23}-y_{30}=0. \end{array}\right.$$

Nach der zweiten dieser beiden Gleichungen ist:

$$y_{12}+y_{30}=y_{01}+y_{23},$$

also:

$$(x_{01}+x_{23})(y_{12}+y_{30})-(x_{12}+x_{30})(y_{01}+y_{23})$$
$$=(x_{01}-x_{12}+x_{23}-x_{30})(y_{01}+y_{23}),$$

und nach 4) und 6) ist folglich die Gleichung der durch die Mittelpunkte der beiden Diagonalen des umschriebenen Vierecks gehenden Geraden offenbar:

7) . . . . $y=\frac{1}{2}(y_{01}+y_{23})$

oder:

8) . . . . $y=\frac{1}{2}(y_{12}+y_{30})$.

Digitized by Google

Folglich ist nach 5) die Gleichung dieser Geraden:

$$9) \ldots\ldots\ldots \quad y=\tfrac{1}{4}(y_0+y_1+y_2+y_3),$$

und dieselbe ist also der Axe der Parabel parallel oder ein Durchmesser dieser Curve, dessen Scheitel durch die Coordinaten

$$\frac{(y_0+y_1+y_2+y_3)^2}{16p}, \qquad \tfrac{1}{4}(y_0+y_1+y_2+y_3)$$

bestimmt wird.

Die Gleichung der Berührenden der Parabel in dem Scheitel dieses Durchmessers ist, wie man leicht findet:

$$10) \ldots \quad y=\frac{2p}{y_0+y_1+y_2+y_3}\left\{x+\frac{(y_0+y_1+y_2+y_3)^2}{16p}\right\}$$

oder:

$$11) \ldots\ldots \quad y=\frac{2p}{y_0+y_1+y_2+y_3}x+\frac{y_0+y_1+y_2+y_3}{8}.$$

Für $x=0$ ist:

$$12) \ldots\ldots\ldots \quad y=\frac{y_0+y_1+y_2+y_3}{8},$$

und für $y=0$ ist:

$$13) \ldots\ldots\ldots \quad x=-\frac{(y_0+y_1+y_2+y_3)^2}{16p}.$$

Bezeichnen wir den auf bekannte Weise zu nehmenden Winkel, welchen die Berührende mit der Axe der Parabel einschliesst, durch φ; so ist:

$$14) \ldots\ldots \quad \operatorname{tang}\varphi=\frac{2p}{y_0+y_1+y_2+y_3},$$

woran sich noch manche andere weitere Betrachtungen anschliessen lassen würden, die ich aber füglich dem Leser überlassen kann, indem ich nur noch auf die beiden unmittelbar aus 5) sich ergebenden Formeln:

15)

$$x_{01}+x_{12}+x_{23}+x_{30}=\frac{(y_0+y_2)(y_1+y_3)}{p},$$

$$y_{01}+y_{12}+y_{23}+y_{30}=y_0+y_1+y_2+y_3$$

aufmerksam machen will.

Digitized by Google

XIV.

Ueber einen merkwürdigen Satz von den Kegelschnitten.

Von

dem Herausgeber.

Vier Punkte einer Ellipse*) seien:

$$(x_0y_0),\quad (x_1y_1),\quad (x_2y_2),\quad (x_3y_3);$$

durch welche wir Berührende an die Ellipe legen, die wir nach der Ordnung der vorstehenden Punkte die

1ste, 2te, 3te, 4te

Berührende nennen wollen. Für die Coordinaten der Durchschnittspunkte dieser Berührenden haben wir die folgenden Formeln, rücksichtlich welcher wir, so wie auch wegen der gebrauchten Bezeichnung, auf die Abhandlung Nr. XIII. verweisen.

Die Coordinaten des Durchschnittspunkts der 1sten und 3ten Berührenden sind:

$$x_{02} = \frac{a^2(y_2 - y_0)}{x_0y_2 - y_0x_2},\qquad y_{02} = -\frac{b^2(x_2 - x_0)}{x_0y_2 - y_0x_2}.$$

---

*) Wie man von der Ellipse unmittelbar zur Hyperbel übergehen kann, ist bekannt. Von der Parabel gelten die folgenden Betrachtungen nicht ohne Weiteres, weil an die Parabel nicht zwei einander parallele Berührende gezogen werden können, wenn diese Berührenden nicht zusammenfallen sollen.

Digitized by Google

Die Coordinaten des Durchschnittspunkts der 2ten und 3ten Berührenden sind:

$$x_{12}=\frac{a^2(y_2-y_1)}{x_1y_2-y_1x_2},\qquad y_{12}=-\frac{b^2(x_2-x_1)}{x_1y_2-y_1x_2}.$$

Die Coordinaten des Durchschnittspunkts der 1sten und 4ten Berührenden sind:

$$x_{03}=\frac{a^2(y_3-y_0)}{x_0y_3-y_0x_3},\qquad y_{03}=-\frac{b^2(x_3-x_0)}{x_0y_3-y_0x_3}.$$

Die Coordinaten des Durchschnittspunkts der 2ten und 4ten Berührenden sind:

$$x_{13}=\frac{a^2(y_3-y_1)}{x_1y_3-y_1x_3},\qquad y_{13}=-\frac{b^2(x_3-x_1)}{x_1y_3-y_1x_3}.$$

Die Gleichung der Geraden durch $(x_{02}y_{02})$ und $(x_{13}y_{13})$ ist:

$$\left.\begin{array}{c} y-y_{02}=\dfrac{y_{02}-y_{13}}{x_{02}-x_{13}}(x-x_{02}) \\ \text{oder} \\ y-y_{13}=\dfrac{y_{02}-y_{13}}{x_{02}-x_{13}}(x-x_{13}) \end{array}\right\}\ \ldots\ldots\ldots\ \text{I.}$$

Die Gleichung der Geraden durch $(x_{03}y_{03})$ und $(x_{12}y_{12})$ ist:

$$\left.\begin{array}{c} y-y_{03}=\dfrac{y_{03}-y_{12}}{x_{03}-x_{12}}(x-x_{03}) \\ \text{oder} \\ y-y_{12}=\dfrac{y_{03}-y_{12}}{x_{03}-x_{12}}(x-x_{12}) \end{array}\right\}\ \ldots\ldots\ldots\ \text{II.}$$

Die Gleichung der Geraden durch (x_0y_0) und (x_1y_1) ist:

$$\left.\begin{array}{c} y-y_0=\dfrac{y_0-y_1}{x_0-x_1}(x-x_0) \\ \text{oder} \\ y-y_1=\dfrac{y_0-y_1}{x_0-x_1}(x-x_1) \end{array}\right\}\ \ldots\ldots\ldots\ \text{III.}$$

Sollen nun aber die durch die Punkte (x_0y_0) und (x_1y_1) gelegten Berührenden der Ellipse, wie wir jetzt annehmen wollen, einander parallel sein, ohne zusammenzufallen, so muss die durch (x_0y_0) und (x_1y_1) gelegte Gerade III. ein Durchmesser der Ellipse, und (x_0y_0) und (x_1y_1) müssen dessen Endpunkte sein, woraus sich unmittelbar

Digitized by Google

ergiebt, dass in diesem Falle, wo $x_1 = -x_0$ und $y_1 = -y_0$ ist, die Gleichung der durch die Punkte $(x_0 y_0)$ und $(x_1 y_1)$ gehenden Geraden III. die folgende ist:

$$y = \frac{y_0}{x_0}x \text{ oder } y = \frac{y_1}{x_1}x \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{III*.}$$

Zur Bestimmung der Coordinaten X, Y des Durchschnittspunkts der Geraden I. und III*. haben wir die Gleichungen:

$$Y - y_{02} = \frac{y_{02} - y_{13}}{x_{02} - x_{13}}(X - x_{02}),$$

$$Y = \frac{y_0}{x_0}X;$$

woraus sich mittelst leichter Rechnung:

$$X = \frac{x_{02}y_{13} - y_{02}x_{13}}{y_0(x_{02} - x_{13}) - x_0(y_{02} - y_{13})}x_0,$$

$$Y = \frac{x_{02}y_{13} - y_{02}x_{13}}{y_0(x_{02} - x_{13}) - x_0(y_{02} - y_{13})}y_0$$

ergiebt.

Zur Bestimmung der Coordinaten X', Y' des Durchschnittspunkts der Graden II. und III*. haben wir die Gleichungen:

$$Y' - y_{03} = \frac{y_{03} - y_{12}}{x_{02} - x_{12}}(X' - x_{02}),$$

$$Y' = \frac{y_0}{x_0}X';$$

woraus sich mittelst leichter Rechnung:

$$X' = \frac{x_{03}y_{12} - y_{03}x_{12}}{y_0(x_{03} - x_{12}) - x_0(y_{03} - y_{12})}x_0,$$

$$Y' = \frac{x_{03}y_{12} - y_{03}x_{12}}{y_0(x_{03} - x_{12}) - x_0(y_{03} - y_{12})}y_0$$

ergiebt.

Aus den oben für

$$x_{02},\ y_{02};\ x_{12},\ y_{12};\ x_{03},\ y_{03};\ x_{13},\ y_{13}$$

gefundenen Formeln erhält man nun, mit Rücksicht darauf, dass $x_1 = -x_0$, $y_1 = -y_0$ ist, nach leichter Rechnung die folgenden Formeln:

Digitized by Google

$$x_{02}y_{13}-y_{02}x_{13}=a^2b^2.\frac{(x_0y_2-y_0x_2)+(x_0y_3-y_0x_3)-(x_2y_3-y_2x_3)}{(x_0y_2-y_0x_2)(x_0y_3-y_0x_3)},$$

$$x_{03}y_{12}-y_{03}x_{12}=a^2b^2.\frac{(x_0y_2-y_0x_2)+(x_0y_3-y_0x_3)+(x_2y_3-y_2x_3)}{(x_0y_2-y_0x_2)(x_0y_3-y_0x_3)}$$

und

$$y_0(x_{02}-x_{13})-x_0(y_{02}-y_{13})$$

$$=a^2y_0.\frac{(y_2-y_0)(x_0y_3-y_0x_3)+(y_3+y_0)(x_0y_2-y_0x_2)}{(x_0y_2-y_0x_2)(x_0y_3-y_0x_3)}$$

$$+b^2x_0.\frac{(x_2-x_0)(x_0y_3-y_0x_3)+(x_3+x_0)(x_0y_2-y_0x_2)}{(x_0y_2-y_0x_2)(x_0y_3-y_0x_3)},$$

$$y_0(x_{03}-x_{12})-x_0(y_{03}-y_{12})$$

$$=a^2y_0.\frac{(y_3-y_0)(x_0y_2-y_0x_2)+(y_2+y_0)(x_0y_3-y_0x_3)}{(x_0y_2-y_0x_2)(x_0y_3-y_0x_3)}$$

$$+b^2x_0.\frac{(x_3-x_0)(x_0y_2-y_0x_2)+(x_2+x_0)(x_0y_3-y_0x_3)}{(x_0y_2-y_0x_2)(x_0y_3-y_0x_3)}.$$

Setzen wir nun:

$$Z=(x_0y_2-y_0x_2)+(x_0y_3-y_0x_3)-(x_2y_3-y_2x_3),$$

$$Z'=(x_0y_2-y_0x_2)+(x_0y_3-y_0x_3)+(x_2y_3+y_2x_3);$$

ferner:

$$N=a^2y_0\{(y_2-y_0)(x_0y_3-y_0x_3)+(y_3+y_0)(x_0y_2-y_0x_2)\}$$
$$+b^2x_0\{(x_2-x_0)x_0y_3-y_0x_3)+(x_3+x_0)(x_0y_2-y_0x_2)\},$$

$$N'=a^2y_0\{(y_3-y_0)(x_0y_2-y_0x_2)+(y_2+y_0)(x_0y_3-y_0x_3)\}$$
$$+b^2x_0\{(x_3-x_0)(x_0y_2-y_0x_2)+(x_2+x_0)(x_0y_3-y_0x_3)\};$$

und:

$$U=\frac{Z}{N},\qquad U'=\frac{Z'}{N'};$$

so ist:

$$X=a^2b^2Ux_0,\qquad Y=a^2b^2Uy_0;$$

$$X'=a^2b^2U'x_0,\qquad Y'=a^2b^2U'y_0.$$

Entwickelt man nun die Grösse

Digitized by Google

$$ZN' - NZ'$$

$$= \{(x_0y_2 - y_0x_2) + (x_0y_3 - y_0x_3) - (x_2y_3 - y_2x_3)\}$$

$$\times \left\{\begin{array}{l} \quad a^2y_0[(y_3 - y_0)(x_0y_2 - y_0x_2) + (y_2 + y_0)(x_0y_3 - y_0x_3)] \\ + b^2x_0[(x_3 - x_0)(x_0y_2 - y_0x_2) + (x_2 + x_2)(x_0y_3 - y_0x_3)] \end{array}\right\}$$

$$- \{(x_0y_2 - y_0x_2) + (x_0y_3 - y_0x_3) + (x_2y_3 - y_2x_3)\}$$

$$\times \left\{\begin{array}{l} \quad a^2y_0[(y_2 - y_0)(x_0y_3 - y_0x_3) + (y_3 + y_0)(x_0y_2 - y_0x_2)] \\ + b^2x_0[(x_2 - x_0)(x_0y_3 - y_0x_3) + (x_3 + x_0)(x_0y_2 - y_0x_2)] \end{array}\right\}$$

so erhält man leicht für die Factoren von

$$a^2y_0 \text{ und } b^2x_0$$

beziehungsweise die folgenden Ausdrücke:

$$-2(x_0y_2 - y_0x_2)\{y_2(x_0y_0 - x_3y_3) - x_2(y_0{}^2 - y_3{}^2\}$$
$$+2(x_0y_3 - y_0x_3)\{y_3(x_0y_0 - x_2y_2) - x_3(y_0{}^2 - y_2{}^2\}$$

und

$$-2(x_0y_2 - y_0x_2)\{y_2(x_0{}^2 - x_3{}^2) - x_2(x_0y_0 - x_3y_3)\}$$
$$+2(x_0y_3 - y_0x_3)\{y_3(x_0{}^2 - x_2{}^2) - x_3(x_0y_0 - x_2y_2)\};$$

nun ist aber

$$y_0{}^2 - y_3{}^2 = -\frac{b^2}{a^2}(x_0{}^2 - x_3{}^2), \quad y_0{}^2 - y_2{}^2 = -\frac{b^2}{a^2}(x_0{}^2 - x_2{}^2)$$

und

$$x_0{}^2 - x_3{}^2 = -\frac{a^2}{b^2}(y_0{}^2 - y_3{}^2), \quad x_0{}^2 - x_2{}^2 = -\frac{a^2}{b^2}(y_0{}^2 - y_2{}^2);$$

also sind die Factoren von

$$a^2y_0 \text{ und } b^2x_0$$

beziehungsweise:

$$-2(x_0y_2 - y_0x_2)\{y_2(x_0y_0 - x_3y_3) + \frac{b^2}{a^2}x_2(x_0{}^2 - x_3{}^2)\}$$

$$+2(x_0y_3 - y_0x_3)\{y_3(x_0y_0 - x_2y_2) + \frac{b^2}{a^2}x_3(x_0{}^2 - x_2{}^2)\}$$

und

$$2(x_0y_2 - y_0x_2)\{x_2(x_0y_0 - x_3y_3) + \frac{a^2}{b^2}y_2(y_0{}^2 - y_3{}^2)\}$$

$$-2(x_0y_3 - y_0x_3)\{x_3(x_0y_0 - x_2y_2) + \frac{a^2}{b^2}y_3(y_0{}^2 - y_2{}^2)\}.$$

Also ist:

Digitized by Google

$$x_{02}y_{13}-y_{02}x_{13}=a^2b^2.\frac{(x_0y_2-y_0x_2)+(x_0y_3-y_0x_3)-(x_2y_3-y_2x_3)}{(x_0y_2-y_0x_2)(x_0y_3-y_0x_3)},$$

$$x_{03}y_{12}-y_{03}x_{12}=a^2b^2.\frac{(x_0y_2-y_0x_2)+(x_0y_3-y_0x_3)+(x_2y_3-y_2x_3)}{(x_0y_2-y_0x_2)(x_0y_3-y_0x_3)}$$

und

$$y_0(x_{02}-x_{13})-x_0(y_{02}-y_{13})$$

$$=a^2y_0.\frac{(y_2-y_0)(x_0y_3-y_0x_3)+(y_3+y_0)(x_0y_2-y_0x_2)}{(x_0y_2-y_0x_2)(x_0y_3-y_0x_3)}$$

$$+b^2x_0.\frac{(x_2-x_0)(x_0y_3-y_0x_3)+(x_3+x_0)(x_0y_2-y_0x_2)}{(x_0y_2-y_0x_2)(x_0y_3-y_0x_3)},$$

$$y_0(x_{03}-x_{12})-x_0(y_{03}-y_{12})$$

$$=a^2y_0.\frac{(y_3-y_0)(x_0y_2-y_0x_2)+(y_2+y_0)(x_0y_3-y_0x_3)}{(x_0y_2-y_0x_2)(x_0y_3-y_0x_3)}$$

$$+b^2x_0.\frac{(x_3-x_0)(x_0y_2-y_0x_2)+(x_2+x_0)(x_0y_3-y_0x_3)}{(x_0y_2-y_0x_2)(x_0y_3-y_0x_3)}.$$

Setzen wir nun:

$$Z=(x_0y_2-y_0x_2)+(x_0y_3-y_0x_3)-(x_2y_3-y_2x_3),$$

$$Z'=(x_0y_2-y_0x_2)+(x_0y_3-y_0x_3)+(x_2y_3+y_2x_3);$$

ferner:

$$N=a^2y_0\{(y_2-y_0)(x_0y_3-y_0x_3)+(y_3+y_0)(x_0y_2-y_0x_2)\}$$
$$+b^2x_0\{(x_2-x_0)x_0y_3-y_0x_3)+(x_3+x_0)(x_0y_2-y_0x_2)\},$$

$$N'=a^2y_0\{(y_3-y_0)(x_0y_2-y_0x_2)+(y_2+y_0)(x_0y_3-y_0x_3)\}$$
$$+b^2x_0\{(x_3-x_0)(x_0y_2-y_0x_2)+(x_2+x_0)(x_0y_3-y_0x_3)\};$$

und:

$$U=\frac{Z}{N},\qquad U'=\frac{Z'}{N'};$$

so ist:

$$X=a^2b^2Ux_0,\qquad Y=a^2b^2Uy_0;$$

$$X'=a^2b^2U'x_0,\qquad Y'=a^2b^2U'y_0.$$

Entwickelt man nun die Grösse

$$ZN' - NZ'$$

$$= \{(x_0y_2 - y_0x_2) + (x_0y_3 - y_0x_3) - (x_2y_3 - y_2x_3)\}$$

$$\times \begin{Bmatrix} a^2y_0[(y_3 - y_0)(x_0y_2 - y_0x_2) + (y_2 + y_0)(x_0y_3 - y_0x_3)] \\ + b^2x_0[(x_3 - x_0)(x_0y_2 - y_0x_2) + (x_2 + x_2)(x_0y_3 - y_0x_3)] \end{Bmatrix}$$

$$- \{(x_0y_2 - y_0x_2) + (x_0y_3 - y_0x_3) + (x_2y_3 - y_2x_3)\}$$

$$\times \begin{Bmatrix} a^2y_0[(y_2 - y_0)(x_0y_3 - y_0x_3) + (y_3 + y_0)(x_0y_2 - y_0x_2)] \\ + b^2x_0[(x_2 - x_0)(x_0y_3 - y_0x_3) + (x_3 + x_0)(x_0y_2 - y_0x_2)] \end{Bmatrix}$$

so erhält man leicht für die Factoren von

$$a^2y_0 \text{ und } b^2x_0$$

beziehungsweise die folgenden Ausdrücke:

$$-2(x_0y_2 - y_0x_2)\{y_2(x_0y_0 - x_3y_3) - x_2(y_0{}^2 - y_3{}^2\}$$
$$+2(x_0y_3 - y_0x_3)\{y_3(x_0y_0 - x_2y_2) - x_3(y_0{}^2 - y_2{}^2\}$$

und

$$-2(x_0y_2 - y_0x_2)\{y_2(x_0{}^2 - x_3{}^2) - x_2(x_0y_0 - x_3y_3)\}$$
$$+2(x_0y_3 - y_0x_3)\{y_3(x_0{}^2 - x_2{}^2) - x_3(x_0y_0 - x_2y_2)\};$$

nun ist aber

$$y_0{}^2 - y_3{}^2 = -\frac{b^2}{a^2}(x_0{}^2 - x_3{}^2), \quad y_0{}^2 - y_2{}^2 = -\frac{b^2}{a^2}(x_0{}^2 - x_2{}^2)$$

und

$$x_0{}^2 - x_3{}^2 = -\frac{a^2}{b^2}(y_0{}^2 - y_3{}^2), \quad x_0{}^2 - x_2{}^2 = -\frac{a^2}{b^2}(y_0{}^2 - y_2{}^2);$$

also sind die Factoren von

$$a^2y_0 \text{ und } b^2x_0$$

beziehungsweise:

$$-2(x_0y_2 - y_0x_2)\{y_2(x_0y_0 - x_3y_3) + \frac{b^2}{a^2}x_2(x_0{}^2 - x_3{}^2)\}$$

$$+2(x_0y_3 - y_0x_3)\{y_3(x_0y_0 - x_2y_2) + \frac{b^2}{a^2}x_3(x_0{}^2 - x_2{}^2)\}$$

und

$$2(x_0y_2 - y_0x_2)\{x_2(x_0y_0 - x_3y_3) + \frac{a^2}{b^2}y_2(y_0{}^2 - y_3{}^2)\}$$

$$-2(x_0y_3 - y_0x_3)\{x_3(x_0y_0 - x_2y_2) + \frac{a^2}{b^2}y_3(y_0{}^2 - y_2{}^2)\}.$$

Also ist:

Digitized by Google

$$x_{02}y_{13}-y_{02}x_{13}=a^2b^2.\frac{(x_0y_2-y_0x_2)+(x_0y_3-y_0x_3)-(x_2y_3-y_2x_3)}{(x_0y_2-y_0x_2)(x_0y_3-y_0x_3)},$$

$$x_{03}y_{12}-y_{03}x_{12}=a^2b^2.\frac{(x_0y_2-y_0x_2)+(x_0y_3-y_0x_3)+(x_2y_3-y_2x_3)}{(x_0y_2-y_0x_2)(x_0y_3-y_0x_3)}$$

und

$$y_0(x_{02}-x_{13})-x_0(y_{02}-y_{13})$$

$$=a^2y_0.\frac{(y_2-y_0)(x_0y_3-y_0x_3)+(y_3+y_0)(x_0y_2-y_0x_2)}{(x_0y_2-y_0x_2)(x_0y_3-y_0x_3)}$$

$$+b^2x_0.\frac{(x_2-x_0)(x_0y_3-y_0x_3)+(x_3+x_0)(x_0y_2-y_0x_2)}{(x_0y_2-y_0x_2)(x_0y_3-y_0x_3)},$$

$$y_0(x_{03}-x_{12})-x_0(y_{03}-y_{12})$$

$$=a^2y_0.\frac{(y_3-y_0)(x_0y_2-y_0x_2)+(y_2+y_0)(x_0y_3-y_0x_3)}{(x_0y_2-y_0x_2)(x_0y_3-y_0x_3)}$$

$$+b^2x_0.\frac{(x_3-x_0)(x_0y_2-y_0x_2)+(x_2+x_0)(x_0y_3-y_0x_3)}{(x_0y_2-y_0x_2)(x_0y_3-y_0x_3)}.$$

Setzen wir nun:

$$Z=(x_0y_2-y_0x_2)+(x_0y_3-y_0x_3)-(x_2y_3-y_2x_3),$$

$$Z'=(x_0y_2-y_0x_2)+(x_0y_3-y_0x_3)+(x_2y_3+y_2x_3);$$

ferner:

$$N=a^2y_0\{(y_2-y_0)(x_0y_3-y_0x_3)+(y_3+y_0)(x_0y_2-y_0x_2)\}$$
$$+b^2x_0\{(x_2-x_0)x_0y_3-y_0x_3)+(x_3+x_0)(x_0y_2-y_0x_2)\},$$

$$N'=a^2y_0\{(y_3-y_0)(x_0y_2-y_0x_2)+(y_2+y_0)(x_0y_3-y_0x_3)\}$$
$$+b^2x_0\{(x_3-x_0)(x_0y_2-y_0x_2)+(x_2+x_0)(x_0y_3-y_0x_3)\};$$

und:

$$U=\frac{Z}{N},\qquad U'=\frac{Z'}{N'};$$

so ist:

$$X=a^2b^2Ux_0,\qquad Y=a^2b^2Uy_0;$$

$$X'=a^2b^2U'x_0,\qquad Y'=a^2b^2U'y_0.$$

Entwickelt man nun die Grösse

Digitized by Google

$$ZN'-NZ'$$

$$\begin{aligned}
= \;& \{(x_0y_2-y_0x_2)+(x_0y_3-y_0x_3)-(x_2y_3-y_2x_3)\} \\
& \times\left\{\begin{array}{l} \quad a^2y_0[(y_3-y_0)(x_0y_2-y_0x_2)+(y_2+y_0)(x_0y_3-y_0x_3)] \\ +b^2x_0[(x_3-x_0)(x_0y_2-y_0x_2)+(x_2+x_2)(x_0y_3-y_0x_3)] \end{array}\right\} \\
& -\{(x_0y_2-y_0x_2)+(x_0y_3-y_0x_3)+(x_2y_3-y_2x_3)\} \\
& \times\left\{\begin{array}{l} \quad a^2y_0[(y_2-y_0)(x_0y_3-y_0x_3)+(y_3+y_0)(x_0y_2-y_0x_2)] \\ +b^2x_0[(x_2-x_0)(x_0y_3-y_0x_3)+(x_3+x_0)(x_0y_2-y_0x_2)] \end{array}\right\}
\end{aligned}$$

so erhält man leicht für die Factoren von

$$a^2y_0 \text{ und } b^2x_0$$

beziehungsweise die folgenden Ausdrücke:

$$\begin{aligned}
& -2(x_0y_2-y_0x_2)\{y_2(x_0y_0-x_3y_3)-x_2(y_0{}^2-y_3{}^2\} \\
& +2(x_0y_3-y_0x_3)\{y_3(x_0y_0-x_2y_2)-x_3(y_0{}^2-y_2{}^2\}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
& -2(x_0y_2-y_0x_2)\{y_2(x_0{}^2-x_3{}^2)-x_2(x_0y_0-x_3y_3)\} \\
& +2(x_0y_3-y_0x_3)\{y_3(x_0{}^2-x_2{}^2)-x_3(x_0y_0-x_2y_2)\};
\end{aligned}$$

nun ist aber

$$y_0{}^2-y_3{}^2=-\frac{b^2}{a^2}(x_0{}^2-x_3{}^2), \quad y_0{}^2-y_2{}^2=-\frac{b^2}{a^2}(x_0{}^2-x_2{}^2)$$

und

$$x_0{}^2-x_3{}^2=-\frac{a^2}{b^2}(y_0{}^2-y_3{}^2), \quad x_0{}^2-x_2{}^2=-\frac{a^2}{b^2}(y_0{}^2-y_2{}^2);$$

also sind die Factoren von

$$a^2y_0 \text{ und } b^2x_0$$

beziehungsweise:

$$\begin{aligned}
& -2(x_0y_2-y_0x_2)\{y_2(x_0y_0-x_3y_3)+\frac{b^2}{a^2}x_2(x_0{}^2-x_3{}^2)\} \\
& +2(x_0y_3-y_0x_3)\{y_3(x_0y_0-x_2y_2)+\frac{b^2}{a^2}x_3(x_0{}^2-x_2{}^2)\}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
& 2(x_0y_2-y_0x_2)\{x_2(x_0y_0-x_3y_3)+\frac{a^2}{b^2}y_2(y_0{}^2-y_3{}^2)\} \\
& -2(x_0y_3-y_0x_3)\{x_3(x_0y_0-x_2y_2)+\frac{a^2}{b^2}y_3(y_0{}^2-y_2{}^2)\}.
\end{aligned}$$

Also ist:

Digitized by Google

$$\frac{ZN' - NZ'}{2}$$

$$= -a^2y_0(x_0y_2 - y_0x_2)\{y_2(x_0y_0 - x_3y_3) + \frac{b^2}{a^2}x_2(x_0^2 - x_3^2)\}$$

$$+ a^2y_0(x_0y_3 - y_0x_3)\{y_3(x_0y_0 - x_2y_2) + \frac{b^2}{a^2}x_3(x_0^2 - x_2^2)\}$$

$$+ b^2x_0(x_0y_2 - y_0x_2)\{x_2(x_0y_0 - x_3y_3) + \frac{a^2}{b^2}y_2(y_0^2 - y_3^2)\}$$

$$- b^2x_0(x_0y_3 - y_0x_3)\{x_3(x_0y_0 - x_2y_2) + \frac{a^2}{b^2}y_3(y_0^2 - y_2^2)\},$$

und hierin sind die Factoren von

$$a^2 \text{ und } b^2$$

beziehungsweise:

$$\begin{aligned}
&- y_0y_2(x_0y_2 - y_0x_2)(x_0y_0 - x_3y_3) + y_0y_3(x_0y_3 - y_0x_3)(x_0y_0 - x_2y_2)\\
&+ x_0y_2(x_0y_2 - y_0x_2)(y_0^2 - y_3^2) - x_0y_3(x_0y_3 - y_0x_3)(y_0^2 - y_2^2)\\
&= \left.\begin{aligned} &-(x_0y_2 - y_0x_2)(x_0y_3 - y_0x_3)y_2y_3\\ &+(x_0y_3 - y_0x_3)(x_0y_2 - y_0x_2)y_2y_3\end{aligned}\right\} = 0
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
&- y_0x_2(x_0y_2 - y_0x_2)(x_0^2 - x_3^2) + y_0x_3(x_0y_3 - y_0x_3)(x_0^2 - x_2^2)\\
&+ x_0x_2(x_0y_2 - y_0x_2)(x_0y_0 - x_3y_3) - x_0x_3(x_0y_3 - y_0x_3)(x_0y_0 - x_2y_2)\\
&= \left.\begin{aligned} &-(x_0y_2 - y_0x_2)(x_0y_3 - y_0x_3)x_2x_3\\ &+(x_0y_3 - y_0x_3)(x_0y_2 - y_0x_2)x_2x_3\end{aligned}\right\} = 0.
\end{aligned}$$

Folglich ist:

$$ZN' - NZ' = 0,$$

und weil nun nach dem Obigen

$$U - U' = \frac{Z}{N} - \frac{Z'}{N'} = \frac{ZN' - NZ'}{NN'}$$

ist, so ist

$$U - U' = 0, \text{ also } U = U'.$$

Nach dem Obigen war aber:

$$X = a^2b^2Ux_0, \quad Y = a^2b^2Uy_0;$$
$$X' = a^2b^2U'x_0, \quad Y' = a^2b^2U'y_0;$$

also ist:

$$X = X', \quad Y = Y';$$

und die Durchschnittspunkte (XY) und $(X'Y')$ fallen folglich mit einander zusammen.

Digitized by Google

Hieraus ergiebt sich der folgende merkwürdige Satz:

Wenn durch die beiden Endpunkte A_0 und A_1 eines Durchmessers einer Ellipse oder Hyperbel zwei einander parelle Berührende der Curve, und durch zwei andere beliebige Punkte A_2 und A_3 derselben gleichfalls zwei Berührende gezogen sind, und die Durchschnittspunkte der durch A_2 an die Curve gelegten Berührenden mit den durch A_0 und A_1 gezogenen einander parellen Berührenden beziehungsweise durch A_{02} und A_{12}, die Durchnittspunkte der durch A_3 an die Curve gelegten Berührenden mit den durch A_0 und A_1 gezogenen einander parellen Berührenden beziehungsweise durch A_{03} und A_{13} bezeichnet worden; so schneiden die beiden Graden $A_{02}A_{13}$ und $A_{03}A_{12}$ jederzeit den Durchmesser A_0A_1 in einem und demselben Punkte.

Von diesem merkwürdigen Satze hat Newton in seinem unsterblichen Werke: Philosophiae naturalis Principia mathematica. Lib. I. Sect. V. Prop. XXVII. Problema XIX. eine wichtige Anwendung gemacht.

Digitized by Google

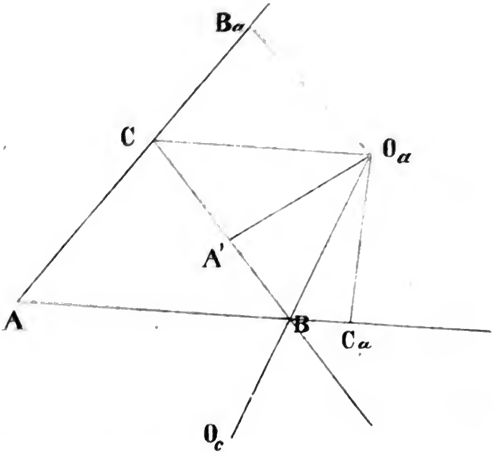
XV.

Bemerkungen über einige Punkte der äusseren Berührungskreise eines Dreieckes.

Von

Emil Hain

Lehrer am Communal-Realgymnasium in der Leopoldstadt in Wien.



ABC sei ein beliebiges Dreieck, O_a, O_b, O_c seien die Mittelpunkte der drei äusseren Berührungskreise; $A'B'C'$ die Berührungspunkte, die nicht in der Verlängerung der Seiten liegen; B_aC_a, B_cA_c, A_bC_b die Berührungspunkte in den Verlängerungen, so dass:

$$O_aA' = O_aB_a = O_aC_a = \varrho_a$$
$$O_bB' = O_bC_b = O_bA_b = \varrho_b$$
$$O_cC' = O_cA_c = O_cB_c = \varrho_c$$

Wir haben dann:

Digitized by Google

$$\angle B_a O_a C_a = 180^0 - \alpha$$
$$\angle A' O_a B_a = \gamma$$
$$\angle A' O_a C = \frac{\gamma}{2}$$
$$A'C = A'O_a \operatorname{tang} \frac{\gamma}{2} = \varrho_a \operatorname{tang} \frac{\gamma}{2}$$
$$A'B = \varrho_a \operatorname{tang} \frac{\beta}{2}$$
$$a = \varrho_a \left(\operatorname{tang} \frac{\beta}{2} + \operatorname{tang} \frac{\gamma}{2}\right)$$
$$\frac{a}{\varrho_a} = \operatorname{tang} \frac{\beta}{2} + \operatorname{tang} \frac{\gamma}{2}$$
$$\frac{b}{\varrho_b} = \operatorname{tang} \frac{\gamma}{2} + \operatorname{tang} \frac{\alpha}{2}$$
$$\frac{c}{\varrho_c} = \operatorname{tang} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tang} \frac{\beta}{2}$$
$$\operatorname{tang} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tang} \frac{\beta}{2} + \operatorname{tang} \frac{\gamma}{2} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{a}{\varrho_a} + \frac{b}{\varrho_b} + \frac{c}{\varrho_c}\right)$$
$$\operatorname{tang} \frac{\beta}{2} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{a}{\varrho_a} + \frac{c}{\varrho_b} - \frac{b}{\varrho_c}\right)$$
$$A'B = \varrho_a \cdot \frac{1}{4F}[a(b+c-a) + c(a+b-c) - b(a+c-b)]$$
$$= \frac{a+b-c}{2} = s - c$$
$$A'C = s - b$$
$$AB_a = AC_a = BC_b = BA_b = CA_c = CB_c = s$$
$$AO_a^2 = s^2 + \varrho_a^2$$
$$BO_c^2 = s^2 + \varrho_c^2$$
$$CO_c^2 = s^2 + \varrho_c^2$$

Die Linien AO_a, BO_b, CO_c treffen sich in einem Punkt, nemlich im Mittelpunkt des Inkreises des Urdreiecks.

$$BO_a^2 = (s-c)^2 + \varrho_a^2$$
$$CO_a^2 = (s-b)^2 + \varrho_a^2$$

$$BO_a^2 - CO_a^2 = a(b-c)$$
$$CO_b^2 - AO_b^2 = b(c-a)$$
$$AO_c^2 - BO_c^2 = c(a-b)$$

$$BO_a^2 + CO_b^2 + AO_c^2 = CO_a^2 + AO_b^2 + BO_c^2$$

Digitized by Google

$$\angle O_aBC = 90^0 - \frac{\beta}{2} = \angle O_cBA$$

$$\angle O_aBO_c = 180^0$$

$$O_aO_c = O_aB + BO_c$$

$$O_aB = \frac{\varrho_a}{\cos\frac{\beta}{2}}$$

$$O_cB = \frac{\varrho_c}{\cos\frac{\beta}{2}}$$

$$O_aO_c = \frac{\varrho_a+\varrho_c}{\cos\frac{\beta}{2}} = (\varrho_a+\varrho_c)\sqrt{\frac{ac}{s(s-b)}}$$

$$= b\sqrt{\frac{ac}{(s-a)(s-c)}}$$

$$= \sqrt{b(s-b)} \cdot \sqrt{\frac{abc}{(s-a)(s-b)(s-c)}}$$

$$O_bO_c = \sqrt{a(s-a} \cdot \sqrt{\frac{abc}{(s-a)(s-b)(s-c)}}$$

$$O_aO_b = \sqrt{c(s-c)} \cdot \sqrt{\frac{abc}{(s-a)(s-b)(s-c)}}$$

$$\angle O_a = 90^0 - \frac{\alpha}{2}$$

$$2\,\Delta O_aO_bO_c = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \cdot \frac{abc}{(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$\Delta\, O_aO_bO_c = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{abc}{(s-a)(s-b)(s-c)} \cdot \Delta ABC$$

Man findet in ähnlicher Weise noch einige andere Ausdrücke für das Dreieck $O_aO_bO_c$, das wie man sieht dem Urdreieck umschrieben ist und dessen Höhen parallel sind den Winkelhalbirenden des Urdreieckes. Ist F der Flächeninhalt des Urdreieckes, r der Radius des Umkreises für dasselbe Dreieck und r' derselbe Radius für das Dreieck $O_aO_bO_c$; so findet man

$$r' = \frac{abc}{2F} = 2r.$$

Digitized by Google

XVI.

Ueber die Farben.

Von

Herrn Dr. *Josef Kudelka*,
k. k. Lyceal-Professor zu Linz in Ober-Oesterreich.

(Figuren s. Taf. VI.)

Einleitung.

Unzählige Versuche, die ich mit dem Prisma und allerhand gefärbten Papieren angestellt habe, Anfangs ein abschreckendes Chaos bildend, später aber durch eine immer deutlicher hervortretende Gesetzmässigkeit anziehend, führten mich zu der folgenden Theorie der Farben, welche zwar keine ausführliche Darstellung meiner Forschung ist, aber doch die hauptsächlichsten Resultate derselben enthält.

Obgleich es für mich eine Hauptsorge war, diese Ergebnisse so deutlich, als möglich zu behandeln, so muss ich doch den freundlichen Leser bitten, bevor er sich anschickt, diese Abhandlung zu lesen, sich zuvor mit einem Prisma zu versehen und sich auch einen Vorrath von gefärbten Papieren, so wie man sie im Handel bekommt, zu verschaffen, um sofort jeden Versuch, der zur Sprache kommt, machen zu können.

Die Farben der Papiere sind zwar keine reinen prismatischen Farben; allein die Gesetze, welche wir kennen lernen werden, haben einen so allgemeinen Charakter, dass sich bei ihrer Erforschung

Digitized by Google

nirgends die Nothwendigkeit herausgestellt hat, darauf zu reflektiren, ob irgend eine bestimmte Farbe rein oder unrein sei. Eine Farbe, z. B. die gelbe, befolgt eben ein bestimmtes Gesetz, weil sie überhaupt diesen Charakter hat, d. h. weil sie überhaupt gelb ist und es kommen dabei die Umstände, welche bei der Erzeugung des Gelb etwa konkurriren, gar nicht in Betracht. Von diesem Gesichtspunkte ausgehend, gewinnen wir die Ueberzeugung, dass wenn die Farben der Papiere, mit denen experimentirt wurde, reine prismatische gewesen wären, wir ganz die nämlichen Gesetze erhalten hätten, — vielleicht nur mit dem alleinigen Unterschiede, dass die Schwierigkeiten ihrer Entdeckung geringer gewesen wären.

§. 1.

Es giebt zwei Farben-Skalen.

Man lege einen weissen, etwa $^3/_4$ Zoll breiten Papierstreif *W* (Fig. 1.) quer über einen schwarzen *SS'* und betrachte ihn durch ein Prisma im gewöhnlichen Tageslichte von oben herab. Die Betrachtung in directem Sonnenlichte würde das Auge zu sehr angreifen. Am besten wird es sein, die Streifen auf einen, nahe am Fenster stehenden Tisch zu legen und zwar so, dass die Längen-Dimension des aufliegenden Streifs *W* die Fensterfläche senkrecht trifft. In diesem Falle wird das Tageslicht parallel zu den Kanten *ab* und *cd* einfallen und es wird keine dieser Kanten einen Schatten auf den darunter befindlichen Streif werfen können, was bei einer anderen Lage der Streifen, selbst wenn das Papier recht dünn wäre, nothwendig eintreten müsste und in gewissen Fällen, namentlich wenn die Farbe des unteren Streifs nicht schwarz, sondern eine solche ist, die den Schatten zu erkennen gestattet, das Resultat beirren könnte.

Um die Erscheinungen in diesem und allen folgenden Fällen vergleichen zu können, müssen wir dem Prisma immer die nämliche Lage geben, also etwa die, dass sich der brechende Winkel zur linken Hand des Beobachters befinde, wie diess aus der Fig. 2. zu ersehen ist, wo *C* als brechender Winkel fungirt. Liegt das zu betrachtende Objekt an dem Orte *M* des oben erwähnten Tisches, so wird ein in *O* befindliches Auge es etwa in *m* sehen.

Die Axe des Prisma ist dann horizontal und parallel zu den Kanten des Streifs *W*.

Die Farben-Erscheinung, die wir beim Hindurchsehen durch das

Digitized by Google

Prisma beobachten, entfaltet sich bekanntlich nur an diesen Kanten oder Scheidegrenzen *ab* und *cd*. Diese Scheidegrenzen wollen wir kurzweg mit (1) und (2) bezeichnen.

Obgleich nun an diesen beiden Scheidegrenzen die kontrastirenden Farben die nemlichen sind, so ist doch insofern ein Unterschied vorhanden, als ihre Anordnung verschieden ist. An der Scheidegrenze (1) liegt nemlich Schwarz rechts, Weiss links; an der Scheidegrenze (2) ist es aber gerade umgekehrt, — hier liegt Weiss rechts, Schwarz links.

Um nun die Anordnung der kontrastirenden Farben in jedem besonderen Falle ersichtlich zu machen, ist es nothwendig, sie auf eine bestimmte, stets beizubehaltende Richtung zu beziehen. Diese Richtung sei die von Rechts nach Links. Wenn es daher heisst: „wir gehen von einer gewissen Farbe zu einer anderen über" so findet dieser Uebergang immer in der angegebenen Richtung Statt. An der Scheidegrenze (1) geht man demnach in dem speziellen Falle der Fig. 1. von Schwarz zu Weiss über und an der Scheidegrenze (2) von Weiss zu Schwarz. Diese beiden Bedingungen, bezüglich der Lage der brechenden Kante und dann der Richtung des Ueberganges, müssen demnach bei allen Versuchen, die wir machen, stets eingehalten werden.

Die Erscheinung nun, die sich uns in dem vorausgesetzten Falle darbietet, ist eine längst bekannte. Der weisse Streif *W* erscheint an seinen beiden Kanten oder Seiten von farbigen Säumen eingefasst. An der Scheidegrenze (1) wird ein farbiger Saum wahrgenommen, in welchem man die 3 Farben: Roth, Orange und Gelb unterscheiden kann, und an der Scheidegrenze (2) ebenso ein Saum, der die Farben: Blau, Indigo und Violet enthält. Die Ordnung, in welcher ich die Farben hier genannt habe, bezieht sich auf die festgesetzte Richtung von Rechts nach Links. Zwischen beiden ist ein Mittelfeld, das noch weiss ist.

Die Fig. 3, in welcher die genannten sechs Farben, so wie auch Weiss und Schwarz, in der Ordnung, wie sie auf einander folgen, mit ihren Anfangsbuchstaben bezeichnet sind, möge diesen Fall versinnlichen.

Wird aber der aufliegende, weisse Papierstreif nicht zu breit genommen und bringt man auch das Prisma in eine etwas grössere Entfernung von demselben, so verschwindet dieses weisse Mittelfeld. Die mit zunehmender Entfernung des Prisma breiter werdenden Säume greifen nemlich alsdann mit ihren inneren, einander zuge-

Digitized by Google

kehrten Rändern in einander und es entsteht dann in der Mitte Grün. So erhält man im Kleinen, wie diess zur Genüge bekannt ist, ein vollständiges Newton'sches Spektrum. Die grüne Farbe werden wir, um sie von der gelben zu unterscheiden, mit *Gr* bezeichnen.

An diesen einfachen Versuch knüpfen sich folgende Reflexionen:

1. Das Objekt an der Scheidegrenze (2) ist der gerade Gegensatz von dem Objekte an der Scheidegrenze (1). Der Gegensatz besteht in der umgekehrten Anordnung der kontrastirenden Farben. Indem nun das Prisma von jedem dieser Objekte unzählige, gegen einander verschobene Bilder liefert, wird man unmöglich erwarten können, dass die Resultate dieser Verschiebungen, d. h. die Erscheinungen oder die Farben, die man an den beiden Scheidegrenzen wahrnimmt, identisch seien; — sie müssen vielmehr ebenfalls entgegengesetzt oder polar sein. Dieser Gegensatz ist ganz so aufzufassen, wie er z. B. zwischen den Polen eines Magneten oder überhaupt zwischen positiven und negativen Grössen gedacht wird.

Also schon a priori lässt sich dieser Gegensatz erkennen. Später werde ich jedoch hiefür auch einen experimentellen Beweis liefern, der, wie ich dafür halte, die nöthige Evidenz haben dürfte.

Dem Gesagten zu Folge werden wir daher keinen Anstand nehmen, die bei (1) entstehenden Farben (Roth, Orange und Gelb) nördliche oder positive — und demgemäss die bei (2) auftretenden (Blau, Indigo und Violet) südliche oder negative zu nennen.

2. Der stärkste Gegensatz, der uns zu Gebote stehet, ist der zwischen Schwarz und Weiss und die Säume, die er erzeuget, besitzen ein jeder drei Farben. Wir wollen sie daher die dreifarbigen nennen. Die Farben sowohl des einen als des anderen Saumes sind als blosse Abstufungen zu betrachten, welche die Kluft dieses Kontrastes ausfüllen.

Werden nun die Farben des nördlichen Saumes, die beim Uebergange von Schwarz zu Weiss entstehen, auf Schwarz bezogen oder, was dasselbe ist, mit Schwarz verglichen; so müssen die Farben des südlichen Saumes, die beim Uebergange von Weiss zu Schwarz sich bilden, schon des blossen Gegensatzes wegen, auf Weiss bezogen oder mit Weiss verglichen werden. Die nördlichen Farben sind also als helle aufzufassen. Ihre Helligkeit wächst von Schwarz zu Weiss. Die südlichen Farben hingegen sind als dunkle aufzufassen. Ihre Dunkelheit wächst in der Richtung von Weiss zu Schwarz.

3. Die Farben der nördlichen Gruppe sind unter einander gleich-

Digitized by Google

artig und unterscheiden sich bloss durch den Grad ihrer Helligkeit; ebenso sind die Farben der südlichen Gruppe unter einander gleichartig und unterscheiden sich bloss durch den Grad ihrer Dunkelheit.

In der einen Gruppe ändert sich die Farbe mit dem Grade der Helligkeit, in der anderen mit dem Grade der Dunkelheit. Die Farben sind also nichts anderes als Grade der Helligkeit oder Dunkelheit.

4. Da Schwarz in dem nördlichen Saume, wie aus Fig. 3 zu entnehmen ist, an das äusserste Roth grenzt, so kann man es als Roth von der Helligkeit = Null betrachten. Da es wiederum in dem südlichen Saume auf das äusserste Violet folgt, so kann man es auch als das dunkelste Violet betrachten. Schwarz kann daher sowohl zu der nördlichen als südlichen Gruppe gezählt werden. Insofern ist es eine unbestimmte oder zweideutige Farbe.

Dasselbe gilt auch von Weiss, denn einerseits grenzt das weisse Mittelfeld an das innerste Gelb und anderseits an das innerste Blau. Weiss kann also bald als das hellste Gelb betrachtet werden, bald auch als Blau von der Dunkelheit = Null.

5. Die Aufeinanderfolge der Farben in Fig. 3. stellt eine Farbenleiter vor, die wir als die erste betrachten und mit I. bezeichnen wollen.

Die beiden parallelen Scheidegrenzen *ab* und *cd* in Fig. 1. haben einen gewissen Abstand von einander, welcher gleich ist der Breite des aufliegenden weissen Streifs *W*. Wird dieser Abstand gleich Null gesetzt, so fallen die gedachten Scheidegrenzen zusammen und es findet dann ein direkter Uebergang von Schwarz zu Schwàrz Statt.

Ist nun aber von den beiden quer übereinander liegenden Streifen der Fig. 1. der untere weiss, der obere schwarz, so wird man, indem man sie mittelst des Prisma betrachtet, jetzt bei (1) einen südlichen und bei (2) einen nördlichen Saum wahrnehmen.

Die Säume haben somit ihre Plätze vertauscht; aber in jedem ist die Anordnung der Farben noch dieselbe, wie vorhin. Die Fig. 4. versinnlicht diesen Fall. Die Farben folgen darin in der Richtung von Rechts nach Links in der Ordnung: *B*, *J*, *V*, *S*, *R*, *O*, *G* aufeinander und sie sind auf beiden Seiten von Weiss eingeschlossen.

Diese Aufeinanderfolge bildet die zweite Farbenleiter, die wir mit II. bezeichnen wollen.

Beide Säume trennt noch ein schwarzes Mittelfeld, das jedoch

Digitized by Google

ebenfalls verschwindet, wenn der obere schwarze Streif nicht zu breit genommen und gleichzeitig das Prisma hinreichend weit entfernt wird. Alsdann greifen wieder die einander zugekehrten Ränder der beiden Säume, der violette des einen und der rothe des anderen ineinander und es entstehet dort, wo sich die Säume theilweise decken, die Rosafarbe, deren Zeichen zum Unterschiede von der rothen Farbe, *Ro* sein mag.

Wir erhalten demnach wiederum ein Spektrum im Kleinen, das jedoch das Gegenstück des Newton'schen ist. Darin ist kein Grün enthalten, statt dessen aber Rosa. Die letztere Farbe wird im gemeinen Leben häufig mit Roth oder auch mit Violet verwechselt. Ihre genaue Kenntniss verschafft man sich am Besten durch den eben beschriebenen Versuch.

Unwillkührlich drängt sich hier der Gedanke auf, dass wenn man bei diesem zweiten Versuche, auf ähnliche Art, wie es Newton bei dem ersten gethan hat, einen Schluss in Betreff der Konstitution des weissen Lichtes ziehen wollte, man jetzt nicht die grüne, sondern die Rosafarbe als integrirenden Bestandtheil dieses Lichtes bekäme.

Denkt man sich auch bei diesem Versuche die Breite des aufliegenden schwarzen Streifs gleich Null, fallen also die Scheidegrenzen zusammen, so erhält man einen direkten Uebergang von Weiss zu Weiss.

§. 2.

Räumliche Beschaffenheit der Säume.

Man stelle auf einer weissen Unterlage zwei schwarze Streifen *S* und *S'* (Fig. 5.) stufenartig zusammen, d. h. so, dass ihre Kanten *bc* und *ab* Verlängerungen von einander seien und betrachte nun dieses Objekt mit dem Prisma. Da man nun an der Scheidegrenze *ab* von Schwarz zu Weiss übergehet, so entstehet daselbst ein nördlicher Saum, der in Fig. 6. abgebildet und mit *GOR* bezeichnet ist. Da ferner an der Scheidegrenze *bc* von Weiss zu Schwarz übergegangen wird, so entstehet daselbst ein südlicher Saum, der in eben dieser Fig. 6. mit *VJB* bezeichnet ist.

Beide diese Säume sind rechteckig und liegen, wie der Versuch lehret, ihrer Breite nach parallel neben einander. Da beide zusammen in ihrer Coexistenz ebenfalls ein Rechteck *pqsr* bilden, so ist daraus

Digitized by Google

zu schliessen, dass sie beide genau die nemliche Breite = *mn* haben. Die Parthie *RO* des nördlichen Saumes, welche die rothen und orangegelben Abstufungen umfasst und dann die blaue Parthie *B* des südlichen Saumes kann man die Vordertheile der Säume nennen; die gelbe Parthie *G* des nördlichen und die Indigo-violette *VJ* des südlichen aber die Hintertheile. Der Versuch lehret, dass die Vordertheile beider Säume gleiche Breite haben und ebenso ihre Hintertheile; aber bei jedem Saum ist der Hintertheil etwas breiter, als sein Vordertheil.

§. 3.

Darstellung der Farbensäume mittelst der Intensitätslinie.

Die Farbensäume, wie sie die Figuren 3. und 4. darstellen, sind eine blosse Nachbildung oder Nachzeichnung der Erscheinungen, wie sie das Prisma thatsächlich darbietet. In dieser Form sind sie nicht geeignet, um daraus weitere Folgerungen zu ziehen. Zu diesem Behufe müssen wir sie auf eine, den in §. 1. gewonnenen Begriffen, entsprechende Weise konstruiren.

Es wird nun am zweckmässigsten sein, die Abstufungen der Helligkeit und Dunkelheit durch Ordinaten auszudrücken. Nimmt man demnach die Gerade *Xx* (Fig. 7.) als Abszissenaxe an, so kann uns diese in Bezug auf den nördlichen Saum die Linie für Schwarz oder Helligkeit = Null vorstellen. Die Breite des Saumes kann durch ein Stück *bs* dieser Axe ausgedrückt werden und die oberhalb derselben liegenden Ordinaten werden Helligkeits-Abstufungen bedeuten z. B. *ab* die Helligkeit des äussersten, bereits an Weiss grenzenden Gelb, d. h. die Helligkeit derjenigen Abstufung, welche der nördliche Saum im Punkte *b* besitzt, und da die Helligkeit von *b* gegen *s* abnimmt, so wird für diesen letzteren Punkt, der bereits in der Axe liegt, die Ordinate = Null sein. Die Linie *as*, welche die Endpunkte der Ordinaten verbindet, wollen wir Helligkeitslinie nennen. Alles deutet darauf, dass diese Linie eine Kurve sei. Da jedoch ihre Beschaffenheit auf die Resultate, die in dieser Abhandlung zur Sprache kommen, keinen Einfluss hat, so werde ich sie der Einfachheit wegen als gerade voraussetzen.

In dem südlichen Saume nimmt in der Richtung von Rechts nach Links die Dunkelheit zu. Die Ordinaten, welche die Dunkelheits-Abstufungen bedeuten, werden unterhalb der Abszissenaxe

Digitized by Google

liegen, welche aber in diesem Falle, nemlich in Bezug auf den südlichen Saum, die Linie für Weiss oder Dunkelheit = Null bedeutet.

Ist demnach *wf* (Fig. 7.) die Breite des südlichen Saumes, so drückt die Ordinate *ef* die Dunkelheit des äussersten, an der Stelle *f* vorhandenen, bereits an Schwarz grenzenden Violet aus; von da an wird die Dunkelheits-Ordinate gegen *w* zu allmählig kleiner und sie wird in diesem letzteren Punkte gleich Null oder was dasselbe ist, der südliche Saum endet daselbst in Weiss. Die Linie *ew*, welche die Endpunkte der Dunkelheits-Ordinaten verbindet, wird man wiederum die Dunkelheitslinie nennen könnnen.

Helligkeit und Dunkelheit schliessen sich wohl aus, da sie entgegengesetzt sind; allein sie haben ein gemeinsames Merkmal, nemlich die Intensität, und sind folglich bezüglich dieser letzteren vergleichbar. Die Ordinaten bedeuten also eigentlich die Intensitäten der Helligkeit und Dunkelheit und wir können daher beide obige Linien auch unter den höheren Begriff „Intensitätslinie“ subsumiren.

Denkt man sich die Fig. 3. in einer horizontalen Ebene liegend, wie das bei der in §. 1. vorausgesetzten Beobachtungsweise wirklich der Fall ist, so ergibt sich die Fig. 7. aus dem Durchschnitt der erst gedachten Figur mit einer gegen die brechende Kante des Prisma senkrecht gelegten Ebene. Alsdann ist *wb* (Fig. 7.) die Breite des weissen Mittelfeldes.

Die Ordinaten hat man sich eigentlich senkrecht auf die Ebene des Saumes oder der Figuren-Tafel zu denken, also in einer Lage, die sich durch die Zeichnung nicht wiedergeben lässt.

Ein Saum, der seiner ganzen Breite nach die nämliche Farbe besitzt, wird eine zur Abszissenaxe parallele Intensitätslinie haben und es wird diese oberhalb oder unterhalb der Abszissenaxe liegen, jenachdem die Farbe des Saumes nördlich oder südlich ist.

Bevor ich weiter gehe, scheint es mir nothwendig einen Begriff einzuführen, der die Orientirung wesentlich erleichtern und auch eine präzisere Form des Ausdrucks ermöglichen dürfte.

So wie Schwarz und Weiss in den bereits beschriebenen Versuchen, so können auch je zwei andere Farben zu einem Kontraste zusammengestellt werden. Je näher zwei Farben in der einen oder anderen Gruppe aneinander liegen, desto schwächer ist ihr Kontrast oder desto kleiner die Kluft, die sie trennt.

Gehören beide Farben, die den Kontrast bilden, zur nördlichen

Digitized by Google

Gruppe, so unterscheiden sie sich bloss durch den Grad ihrer Helligkeit. Ich werde nun die weniger helle die „Oreose“ nennen; die hellere aber die „Vorlage“ der ersteren. Stellt man also, um einen bestimmten Fall vor Augen zu haben, Roth und Gelb zu einem Kontraste zusammen, so wird man wie schon oben festgesetzt wurde, die Farben mit ihren Anfangsbuchstaben, den Kontrast aber auf die Weise bezeichnen, dass man zwischen diese Buchstaben einen Strich setzt. Demgemäss erhält man für den eben angedeuteten Kontrast das Zeichen: $G \mid R$. Dabei ist R als Oreose und G als Vorlage zu betrachten.

Sind jedoch die Farben südlich, so ist wiederum die dunklere als Oreose zu nehmen, die weniger dunkle als Vorlage. In dem Kontraste $V \mid B$ ist also V die Oreose, B die Vorlage.

Diese Bezeichnung eines Kontrastes ist jedoch nicht ganz genau, denn die Farbe soll eigentlich nicht durch ihren Anfangsbuchstaben, sondern durch ihre Ordinate ausgedrückt werden. Letzteres dürfte sich in der Folge öfters als nothwendig herausstellen.

Sind die Farben, die den Kontrast bilden, beide nördlich oder beide südlich und ist auch ihre relative Lage die nemliche, wie in den Farbenleitern, so ist der Kontrast ein einfacher. Nur auf diesen finden die Begriffe der Oreose und Vorlage eine Anwendung und es liegt daher, falls der einfache Kontrast nördlich ist, die Oreose rechts von der Vorlage; ist er aber südlich, so liegt sie links von der Vorlage; von dieser Art sind die eben betrachteten Kontraste: $G \mid R$ und $V \mid B$. Ebenso stellt $W \mid S$ einen einfachen nördlichen und $S \mid W$ einen einfachen südlichen Kontrast vor.

Sind jedoch die Farben, die aneinander grenzen, heterogen, also die eine nördlich, die andere südlich; so geben sie schon einen zusammengesetzten Kontrast. Von dieser Art sind z. B. die Kontraste $J \mid O$ oder $O \mid J$. Bei dem ersteren haben die Farben dieselbe relative Lage, wie in der Skala I. und bei dem letzteren entspricht ihre Anordnung der Skala II.

Heterogene Farben lassen sich, wie schon an einer früheren Stelle angedeutet worden, nicht in Bezug auf Helligkeit vergleichen, denn da müsste dieses Prädikat beiden zukommen, was nicht der Fall ist, da bloss die eine hell, die andere aber dunkel ist. Aus demselben Grunde lassen sie sich auch nicht in Bezug auf Dunkelheit vergleichen. Man kann von solchen Farben im Allgemeinen nur sagen: die Helligkeit der einen ist gleich, grösser oder kleiner als die Dunkelheit der anderen.

Digitized by Google

Gehören die Farben, die den Kontrast bilden, wohl in die nemliche Gruppe, ist jedoch ihre Anordnung umgekehrt zu derjenigen, die sie in der einen oder anderen Farbenleiter haben, so bilden sie ebenfalls einen zusammengesetzten Kontrast. Von dieser Art sind die Kontraste *R* | *G* oder *B* | *V*.

Die beiden Species des zusammengesetzten Kontrastes lassen sich, wie wir später sehen werden, auf einfache Kontraste zurückführen.

Noch muss ich bemerken, dass man beim Aussprechen der Kontrastzeichen, gemäss der gleich Anfangs festgesetzten Richtung des Ueberganges von einer Farbe zur anderen, immer zuerst die rechtsliegende zu nennen habe und hierauf erst die links liegende.

§. 4.

Die Natur der grünen und der Rosafarbe.

Wir wollen nun zurückkehren zu den Farbensäumen, welche in §. 1. besprochen wurden und zuerst jene vornehmen, welche die Farbenleiter I. konstituiren.

Denkt man sich diese Säume in der Art gegen einander verschoben, dass das weisse Mittelfeld verschwindet und auch noch eine partielle Deckung derselben Platz greift, so wird man, wenn man sich zur Versinnlichung dieses Falles der Intensitätslinien bedient, die Figur 8. erhalten.

Darin stellt *as* die Helligkeitslinie des nördlichen und *ew* die Dunkelheitslinie des südlichen Saumes vor. Beide Säume interferiren somit auf der Strecke *bw*, und die Farben, die hier zunächst zur Interferenz kommen, sind Gelb und Blau. Aber das Gelb umfasst schon sehr viele nördliche und das Blau sehr viele südliche Abstufungen, die hier somit auf einander einwirken; und es wird sich die Zahl dieser Abstufungen gewiss auch noch vermehren lassen, wenn man die Ueberdeckung soweit treibt, als es unter den obwaltenden Umständen nur möglich ist. Aber wie weit wir auch die Ueberdeckung treiben, das Resultat der Interferenz ist Grün.

Wir sehen ferner, dass in jedem beliebigen Punkte *h* der Interferenzstrecke *bw*, die Helligkeit *mh* der nördlichen Farbe grösser ist als die Dunkelheit *nh* der südlichen.

Digitized by Google

Dadurch ist aber die Bedingung angezeigt, unter welcher hier überhaupt die grüne Farbe zu Stande kommt.

Wenden wir uns nun zu der Farbenleiter II. Fig. 4. und nehmen wir auch hier an, dass sich die beiden Säume theilweise decken, wodurch das schwarze Mittelfeld verschwindet. Für diesen Fall bekommen wir wieder, wenn wir die Säume ebenfalls durch Intensitätslinien ausdrücken, die Fig. 9., wo *as* die Helligkeitslinie des nördlichen und *ew* die Dunkelheitslinie des südlichen bezeichnet. Die Farben, die hier zunächst zur Interferenz gelangen, sind Roth und Violet und das Resultat ist bekanntlich die Rosafarbe.

Da nun wiederum in jedem beliebigen Punkte *h* der Interferenzstrecke *fs* stets die Helligkeit *mh* der nördlichen Farbe kleiner ist, als die Dunkelheit *nh* der südlichen, so ist hiedurch wiederum die Bedingung gegeben, unter welcher überhaupt die Rosafarbe zu Stande kommt.

Das Gesetz, welches sich in den eben betrachteten zwei Fällen, nemlich bei der Interferenz von Gelb und Blau und dann bei der Interferenz von Roth und Violet kund giebt, umfasst jedoch, wie uns ein späterer Versuch lehren wird, nicht bloss diese, sondern überhaupt alle nördlichen und südlichen Farben, und wir können es daher jetzt schon in folgenden Worten aussprechen: „Wenn irgend eine nördliche Farbe mit irgend einer südlichen interferirt, so entsteht Grün, sobald die Helligkeit der ersteren grösser ist, als die Dunkelheit der letzteren; hingegen Rosa, sobald die Helligkeit der ersteren kleiner ist, als die Dunkelheit der letzteren.“

Was wäre wohl die Wirkung, wenn die Farbensäume sich vollständig decken würden? Auf diese Frage können die Versuche des §. 1, welche den Farbenleitern zu Grunde liegen, keinen Aufschluss geben, da sie eine vollständige Deckung der Säume nicht gestatten, so lange der aufliegende Streif Fig. 1. eine messbare Breite hat, oder was dasselbe ist, so lange der Abstand der beiden Scheidegrenzen *ab* und *cd* nicht gleich Null ist.

Drückt man jedoch die Säume für diesen Fall, wo eine vollständige Ueberdeckung Statt findet, ebenfalls durch die Intensitätslinien aus, wie Fig. 10. zeigt, so lässt sich die Wahrheit leicht errathen, denn es wird alsdann in jedem beliebigen Punkte *h* der Interferenzstrecke *bs* stets die Helligkeitsordinate *hm* der nördlichen Farbe gleich sein der Dunkelheitsordinate *hn* der südlichen, und da unter solchen Umständen die interferirenden Farben in jedem Punkte gleiche Stärke haben, — müssen sie sich nicht vollständig tilgen?

Digitized by Google

Um diesen Schluss in Bezug auf seine Richtigkeit zu prüfen, habe ich vorläufig folgende Versuche gemacht.

Setzt man eine vollständige Ueberdeckung der beiden Säume voraus, so fällt nothwendig die gelbe Parthie des einen mit der violetten des anderen zusammen. Ist also der obige Schluss richtig, so müssten sich Gelb und Violet tilgen, wenn sie gleich stark sind.

Ich nahm somit aufs Gerathewohl einen violetten, jedoch nur sehr wenig dunklen Stoff und betrachtete ihn durch ein hellgelbes Glas — und in der That, der Stoff erschien mir ganz schwarz.

Ebenso und aus demselben Grunde müssten sich Roth und Blau aufheben, sobald sie gleich stark sind. Ich verschaffte mir somit verschiedene Lösungen von Indigo, durch welche ich rothe Gegenstände betrachtete. Durch eine davon erschien mir Siegellack fast ganz schwarz.

Diese Versuche sind also nicht zu Ungunsten des obigen Schlusses ausgefallen. Auch die Folge wird lehren, dass er richtig ist.

Die grüne und die Rosafarbe sind dem Gesagten zu Folge als zusammengesetzte zu betrachten. Jede bestehet aus einer nördlichen und einer südlichen Farbe, und falls der nördliche Bestandtheil der einen dieselbe Stärke besitzt, wie der südliche der anderen, werden sich auch diese zusammengesetzten Farben tilgen müssen.

Um sich davon zu überzeugen, braucht man nur ein grünes und ein rosafarbiges Glas übereinander zu legen und hindurch zu schauen.

§. 5.

Unvollständige Farbensäume.

Der Kontrast zwischen Schwarz und Weiss gibt als der stärkste von allen uns zu Gebote stehenden Veranlassung zur Entstehung dreifarbiger Säume und es mögen solche Säume, in wiefern sie alle möglichen Abstufungen der Helligkeit und Dunkelheit enthalten, vollständige heissen.

Nun wollen wir auch aus verschiedenen anderen Farben, die einander näher stehen, als Schwarz und Weiss, Kontraste zusammenstellen. Diese Art Kontraste werden natürlich einfache sein, da die Farben der nemlichen Gruppe entnommen werden und da wir auch

Digitized by Google

voraussetzen, dass sie in der Zusammensetzung dieselbe relative Lage erhalten, die ihnen in der Farbenleiter zukommt; dass also bei nördlichen Farben die Oreose rechts, bei südlichen hingegen links von der Vorlage lozirt werde.

Bilden nun aber zwei solche Farben, die einander näher stehen, als Schwarz und Weiss, einen Kontrast, so ist nicht zu erwarten, dass durch die prismatische Aktion ebenfalls auch noch alle die Abstufungen, wie wir sie bei dem vollständigen dreifarbigen Saume kennen gelernt haben, hervorgerufen werden. Gewisse Abstufungen werden fehlen und die Säume, die wir bekommen, werden somit unvollständige sein. Beginnen wir mit einem speziellen Falle.

Gesetzt wir vertauschen in Fig. 1. den unteren schwarzen Streif *S* mit einem rothen, während der obere weiss verbleibt. Wir haben dann an der Uebergangsstelle (1) den Kontrast: $W \mid R$, d. h. einen direkten Uebergang von Roth zu Weiss. Diese Farben gehören der nördlichen Gruppe an und es liegt *R* als Oreose rechts von der Vorlage *W*.

Man betrachte nun diesen Kontrast mit dem Prisma. Das was man sieht, ist nichts anderes, als ein Rest, der von dem dreifarbigen nördlichen Saume übrig bleibt, wenn man alle Abstufungen, die minder hell sind, als das Roth der Oreose, daraus weglässt, d. h. man wird nur jene Farbenabstufungen bemerken, welche zwischen dem Weiss der Vorlage und dem Roth der Oreose enthalten sind.

Es ist ein durch alle Versuche, die ich angestellt habe, sich bestätigendes Gesetz, dass durch die prismatische Aktion immer nur jene Abstufungen hervorgerufen werden, welche zwischen den beiden Farben, die den Kontrast bilden — also in unserem speziellen Falle zwischen dem Roth der Oreose und dem Weiss der Vorlage in der einen oder anderen Farbenleiter enthalten sind.

Wollen wir nun den Saum in diesem speziellen Falle konstruiren, so müssen wir zuerst dem Roth der Oreose einen bestimmten Helligkeitsgrad z. B. $= dc$ (Fig. 11.) beilegen. Kommt nun dem Weiss die Helligkeit $= ab$ zu, so werden hier durch die prismatische Aktion nur jene Abstufungen hervorgerufen, die zwischen *cd* und *ab* liegen, oder es wird, wenn wir uns der Kürze wegen erlauben, den Saum mit seiner Intensitätslinie zu identifiziren, von dem dreifarbigen Saume *as* nur das Stück *ac* erzeugt und dieses Stück ist es nun auch, das man bei Betrachtung des Kontrastes $W \mid R$ mittelst des Prisma wirklich sieht.

Digitized by Google

Das Stück *cs* des dreifarbigen Saumes fehlt also, d. h. es fehlen alle Abstufungen, die weniger hell sind, als das Roth der Oreose.

Wenn also durch einen Kontrast nur irgend ein Stück des dreifarbigen Saumes, wie z. B. hier, nur das Stück *ac* geliefert wird, so wollen wir einen solchen Saum einen gekürzten nennen, da er nicht mehr die Breite des dreifarbigen hat.

Indem nun solchergestalt der dreifarbige Saum an seiner rechten Seite um das Stück *cs* verkürzt wird, muss der Rest desselben, nemlich *ac*, genau an dem Platze erscheinen, der ihm im dreifarbigen Saume angewiesen ist. Davon überzeugt man sich leicht, wenn man parallel neben einem rothen Streif *R* (Fig. 12.) zur Vergleichung auch noch einen schwarzen *S* und quer über beide einen weissen *W* legt und hierauf die Scheidegrenze (1) mit dem Prisma beobachtet.

Das fehlende Stück *cs* des dreifarbigen Saumes wird nun aber in Wirklichkeit ersetzt und zwar durch ein entsprechendes Stück von der Oreose. In der Fig 11. stellt *cg* das von der Oreose hergenommene Stück vor. Dieses Stück *cg* ist natürlich parallel zur Abszissenaxe zu denken, da es in allen Punkten dieselbe Farbe, nemlich die der Oreose besitzt. Wir wollen *cg* die gleichförmige Ergänzung oder das Complement nennen. Indem wir nun aber zu dem gekürzten Saume das Complement hinzuschlagen, stellt das Ganze einen Saum vor, der wohl die Breite des dreifarbigen, aber nicht alle seine Abstufungen enthält, und daher mit Recht ein unvollständiger genannt werden kann.

Der Begriff des Complements wird hier nicht etwa ganz unnöthiger Weise eingeführt. Das Complement ist ein Ersatz für das fehlende Saumstück *cs*. Das Prisma muss doch an der Stelle, wo die dem Saumstücke *cs* entsprechenden Abstufungen wegfallen, etwas erzeugen und das, was es daselbst reproduzirt, kann in der That nichts anderes sein, als die Farbe der Oreose. Das Complement ist also jedenfalls als integrirender Bestandtheil des unvollständigen Saumes zu betrachten. Seine wahre Bedeutung wird uns aber erst bei Gelegenheit der zusammengesetzten Kontraste klar werden.

Es ist für sich klar, dass je heller bei ungeänderter Vorlage, die Oreose genommen wird, je mehr sich also ihre Farbe der weissen nähert, desto grösser das Complement und desto kleiner das restirende, noch sichtbare Stück *ac* des dreifarbigen Saumes d. i. der gekürzte Saum werden müsse.

In dem eben beschriebenen Beispiele wurde das Complement

Digitized by Google

von der Oreose genommen. Wir wollen nun auch den Fall kennen lernen, wo es die Vorlage liefert. Wird demnach von den beiden Streifen Fig. 1. der untere wiederum schwarz, der obere hellgelb genommen, etwa von der Helligkeit $= fh$ (Fig. 13.), so erhält man bei (1) den Kontrast $G \mid S$. Durch die prismatische Aktion können hier nur jene Abstufungen hervorgerufen werden, die zwischen dem Gelb der Vorlage (Helligkeit $= fh$) und dem Schwarz der Oreose (Helligkeit = Null) liegen. Diese aber geben den gekürzten Saum *fs*. Es werden somit alle jene Farbentöne fehlen, die heller sind, als das Gelb der Vorlage, d. h. es fehlt das Stück *af* des dreifarbigen Saumes und dieses muss nun durch das Complement *fi*, welches die Farbe der Vorlage hat, ersetzt werden.

Dieses Complement wird nun wiederum desto grösser, je weniger hell die Vorlage ist, je mehr sich also ihre Farbe dem Schwarz der Oreose, die konstant verbleibt, nähert.

Ist von den beiden Farben, die zu einem Kontraste zusammengestellt werden, keine weiss und auch keine schwarz; sind demnach beide Farben solche, die zwischen Schwarz und Weiss liegen, z. B. Gelb von der Helligkeit $= fh$ (Fig. 14.) und Roth von der Helligkeit $= dc$; hat man somit den Kontrast $G \mid R$, wobei R als Oreose zu betrachten ist, so werden durch die prismatische Aktion nur jene Abstufungen hervorgerufen, die zwischen *fh* und *dc* liegen, und diese geben den gekürzten Saum *df*. Dieser wird nun auf jeder Seite ein Complement haben und zwar auf der rechten das Complement *dg*, welches die Oreose liefert, und auf der linken das Complement *fi*, das wiederum von der Vorlage hergenommen ist. Diesem unvollständigen Saume werden alle Farbentöne fehlen, die heller sind, als das Gelb der Vorlage und weniger hell, als das Roth der Oreose, da von dem dreifarbigen Saume die Stücke *af* und *ds* wegfallen.

Die Farben, aus denen wir in den eben beschriebenen drei Versuchen Kontraste gebildet haben, gehörten der nördlichen Farbengruppe an. Man kann nun auf gleiche Weise auch mit südlichen Farben verfahren und wird zu den nemlichen Resultaten gelangen.

Ich erlaube mir am Schlusse dieses Paragrafen in Kürze noch Folgendes zu wiederholen. Für jeden gegebenen einfachen Kontrast ist der ihm entsprechende Saum sehr leicht zu konstruiren. Man braucht nemlich nur die den Kontrastfarben zugehörigen Ordinaten zu ziehen und ihre Endpunkte zu verbinden.

Indem der dreifarbige Saum beim Uebergange zu schwächeren

Digitized by Google

Kontrasten auf einer oder auch auf beiden Seiten gewisse Abstufungen einbüsst, behält der Rest desselben ganz die ursprüngliche Beschaffenheit und Lage.

Die Farbe eines Complements ist stets identisch mit der gleichliegenden Kontrastfarbe. Liegt demnach ein Complement z. B. rechts, so hat es dieselbe Farbe, wie der Kontrast auf seiner rechten Seite.

§. 6.

Erster Fall des zusammengesetzten Kontrastes.

Den ersten Fall des zusammengesetzten Kontrastes erhält man, wenn man, wie bereits oben gesagt wurde, heterogene Farben, also irgend eine nördliche mit irgend einer südlichen zusammenstellt. Diese Kontraste sind nicht nur wegen der eigenthümlichen Erscheinungen, die sie bei prismatischer Betrachtung entfalten, merkwürdig, sondern ganz besonders wegen der Folgerungen, die sich daraus ergeben, von hohem Werthe für die Optik.

Man lege nur zwei derlei heterogen gefärbte Streifen nach Art der Fig. 1. übereinander, und es sei z. B., um einen ganz speziellen Fall vor Augen zu haben, der untere Streif orangefarbig, der obere Indigoblau.

Was sieht man nun, wenn man ein solches Objekt mit dem Prisma betrachtet? Wie sind die Säume an den Scheidegrenzen (1) und (2) beschaffen?

Man wird finden, dass jeder Saum nur eine Farbe besitzt; der bei (1) besitzt nur die grüne Farbe und der bei (2) nur die Rosafarbe. Dabei hat aber jeder genau die Breite des dreifarbigen.

Das ist eine Thatsache, die zuerst in die Augen springt, und gewiss sehr auffallen muss.

Wir wollen nun versuchen die Natur dieser zusammengesetzten Kontraste zu erforschen und hierauf auch ihre Säume einer näheren Betrachtung unterziehen.

Wir haben demnach bei (1) den Kontrast: $J \mid O$ und bei (2) den Kontrast: $O \mid J$. Bei dem ersten haben die Farben dieselbe relative Lage, wie in der Skala I., und bei dem zweiten dieselbe, wie in der Skala II., nur mit dem Unterschiede, dass in den Skalen zwischen diesen Farben noch andere liegen, während sie in den

Digitized by Google

Kontrasten unmittelbar auf einander folgen. Zwischen ihnen ist somit eine Kluft und diese wird hier ganz so, wie diess bei den einfachen Kontrasten der Fall war, durch die Aktion des Prisma ausgefüllt, indem dieses alle fehlenden Abstufungen hervorruft und so gleichsam einen stetigen Uebergang von der einen Kontrastfarbe zur anderen herstellt.

Nach diesen Andeutungen wollen wir uns zuerst mit dem Kontraste *J* | *O* an der Uebergangsstelle (1) befassen.

Aus der Farbenleiter I. kann man ersehen, welche und wieviele Abstufungen man durchwandern muss, um von *O* zu *J* zu gelangen. Man muss zuerst einen Theil des nördlichen Saumes, nemlich dessen gelbe Parthie zurücklegen, um zum Weiss zu kommen und dann noch die ganze blaue Parthie des südlichen Saumes.

Alle diese Abstufungen müssen durch die prismatische Aktion hervorgerufen werden.

Zuerst also alle nördlichen Abstufungen, die zwischen *O* und *W* liegen, und dazu ist der Kontrast: *W* | *O* erforderlich; hierauf aber auch alle südlichen Abstufungen, die zwischen *W* und *J* liegen, und zu diesem Ziele führt wiederum der Kontrast: *J* | *W*.

Der Kontrast *J* | *O* ist also in der That zusammengesetzt aus diesen zwei einfachen Kontrasten *W* | *O* und *J* | *W*. Von diesen ist der erste offenbar ein nördlicher, der zweite ein südlicher.

Wie diese Zusammensetzung zu denken sei und welches ihre wesentlichen Momente seien, dürfte aus Folgendem erhellen.

Zuerst wollen wir uns jeden der beiden komponirenden Kontraste abgesondert vorstellen, und zwar im Sinne der Fig. 5. Wir wollen also für den Streifen *S* einen orangefarbigen und für *S'* einen indigoblauen substituiren und beide, wie es Fig. 5. verlangt, stufenartig zusammenstellen. Die Unterlage sei für beide Streifen weiss. Alsdann hat man an der Scheidegrenze *ab* den einfachen nördlichen Kontrast *W* | *O* und an der anderen *bc* den einfachen südlichen Kontrast *J* | *W*.

Man verschiebe nun die beiden Streifen in der Art, dass die beiden Scheidegrenzen *ab* und *bc* sich vollständig decken, wie diess die Fig. 15. versinnlicht, wo *xy* die Linie vorstellt, in welcher sich die Scheidegrenzen der beiden einfachen Kontraste decken. Diese Fig. 15. repräsentirt uns also schon den zusammengesetzten Kontrast *J* | *O*, bei welchem ein direkter Uebergang von Orange zu Indigo Statt findet.

Digitized by Google

Ich muss es als ein wesentliches Merkmal dieses zusammengesetzten Kontrastes hervorheben, dass sich dabei die Scheidegrenzen der komponirenden einfachen Kontraste decken oder mit anderen Worten, dass beide komponirenden Kontraste eine gemeinsame Scheidegrenze besitzen.

Aber noch mehr, jede Farbe eines solchen zusammengesetzten Kontrastes tritt als Oreose auf, während gleichzeitig die andere die Rolle einer weissen Vorlage spielt.

Es tritt daher zuerst *O* (Fig. 15.) als nördliche Oreose auf, während *J* dabei die Rolle einer weissen Vorlage spielt, und zu gleicher Zeit tritt *J* als südliche Oreose auf, während wiederum *O* die Rolle einer weissen Vorlage spielt.

Das Verhalten der Farben bei dem zusammengesetzten Kontraste ist daher in der That wunderbar. Jede bezüglich der andern ihre Natur verläugnend, jede bezüglich der andern eine weisse Maske anlegend, geben sie bei prismatischer Betrachtung Veranlassung zur Entstehung von zusammengesetzten Farbensäumen, deren Beschaffenheit wir jetzt näher untersuchen wollen.

Wir haben die Streifen zuerst stufenartig zusammengestellt, wie in Fig. 5, wo für *S* ein orangefarbiger, für *S'* ein Indigoblauer substituirt wurde. Betrachtet man dieses Objekt mit dem Prisma, so sieht man die komponirenden Säume parallel neben einander liegend.

Geht man nun aber von der stufenartigen Zusammenstellung zu der direkten über, wie in Fig. 15, so decken sich schon die komponirenden Säume und zwar vollständig, weil die ihnen zu Grunde liegenden einfachen Kontraste eine gemeinsame Scheidegrenze haben.

Der resultirende Saum hat nun folgende Eigenschaften, die als besonders merkwürdig hervorgehoben zu werden verdienen.

1. Er hat, wie schon Anfangs gesagt wurde, die nemliche Breite, wie der dreifarbige;

2. Er besitzt nur eine Farbe, nemlich die grüne;

3. Das Grün ist jedoch nicht gleichförmig, sondern es zeigt Abstufungen und zwar in der Art, dass seine Intensität von den Rändern des Saumes nach Innen abnimmt;

4. Vertauschen wir bei unserem Kontraste die Farbe *O* mit verschiedenen anderen nördlichen Farben und ebenso *J* mit anderen südlichen, so werden wir leicht solche Fälle entdecken, wo der resul-

Digitized by Google

tirende Saum an einer mittleren Stelle mit einem schwarzen Streifen behaftet erscheint, der bald breiter, bald weniger breit ist und selbst zu einer schwarzen Linie zusammenschrumpfen kann — und wiederum auch solche Fälle, wo kein schwarzer Streif vorkommt, dafür aber eine Parthie von gleichförmigem Grün. In diesem letzteren Falle ist alsdann der resultirende Saum in seiner ganzen Ausdehnung grün. Auch diese Parthie von gleichförmigem Grün kann eine verschiedene Breite besitzen.

5. Sowohl jener schwarze Streif, als auch die zuletzt gedachte Parthie von gleichförmigem Grün kann bald genau in die Mitte des Saumes fallen, bald dem einen oder anderen Rande desselben näher liegen.

Nachdem wir nun die wesentlichen Eigenschaften des resultirenden Saumes kennen gelernt haben, wollen wir denselben konstruiren und hierauf untersuchen, ob sich genannte Eigenschaften ungezwungen daraus ergeben.

Setzen wir demnach die Helligkeit des Orange = *dc* (Fig. 16.) und die Dunkelheit des Indigo = *ch*, so dass *ch* = *dc* ist. Demgemäss wird von den komponirenden Kontrasten der eine *W* | *O* den unvollständigen nördlichen Saum *gda*, der andere *J* | *W* aber den ebenfalls unvollständigen südlichen Saum *shf* liefern.

Bei dem ersteren hat das Komplement *dg* die Orangefarbe der Oreose, während *da* als restirendes Stück des dreifarbigen nördlichen Saumes alle jene gelben Abstufungen umfasst, die zwischen Orange und Weiss oder zwischen *dc* und *ab* enthalten sind.

Bei dem anderen Saume *shf* hat das Komplement *hf* ebenfalls die Farbe der Oreose, also Indigo, während *hs* die zwischen Indigo und Weiss, d. h. zwischen den Dunkelheits-Ordinaten *hc* und Null enthaltenen Abstufungen umfasst.

Beide komponirenden Säume decken sich aus dem schon oben angegebenen Grunde vollständig und es ist somit die Breite des resultirenden Saumes die nemliche, wie bei dem dreifarbigen Saume, nemlich = *bs*.

Da für den Ort *c* die Ordinaten gleich sind *dc* = *ch*, da also an dieser Stelle des Saumes die interferirenden Farben gleiche Stärke besitzen, so wird es diese Stelle sein, die schwarz erscheinen muss.

Da sich ferner für jede beliebige nördliche Farbenabstufung stets eine südliche angeben lässt, die mit der ersteren gleich stark ist, so wird man die beiden Farben *O* und *J* unseres Kontrastes nur

Digitized by Google

mit beliebigen andern, jedoch gleich starken zu vertauschen brauchen, um eine Verschiebung des Punktes *c*, wo das Resultat der Interferenz Schwarz ist, gegen den einen oder anderen Rand des Saumes zu bewirken.

Dadurch dürfte aber auch der in §. 4. ausgesprochene Satz: dass sich heterogene Farben von gleicher Stärke tilgen, in seiner Allgemeinheit als bewiesen zu betrachten sein.

Auch sehen wir, dass mit Ausnahme des Punktes *c*, für alle übrigen Punkte des resultirenden Saumes die Helligkeitsordinaten stets grösser sind, als die Dunkelheitsordinaten, z. B. $rm > rn$ und $r'm' > r'n'$ und da unter diesen Umständen der Saum die grüne Farbe annimmt und grün verbleibt, man mag die Kontrastfarben mit beliebigen anderen vertauschen, wenn man nur dieselbe Anordnung beobachtet, d. h. die nördliche Farbe rechts, die südliche links lozirt, so dürfte auch über die Bedingung, unter welcher Grün entsteht, kein Zweifel obwalten. Wenn heterogene Farben interferiren, wird also immer Grün entstehen müssen, sobald die Helligkeit der nördlichen grösser ist, als die Dunkelheit der südlichen.

Es wurde oben bei der Aufzählung der Eigenschaften des resultirenden Saumes gesagt, dass das Grün kein gleichförmiges sei, sondern ein abgestuftes. Auch hierfür lässt sich der Grund aus der Fig. 16. erkennen.

Indem sich nemlich die unvollständigen Säume *adg* und *fhs* zusammensetzen, muss sich in dem resultirenden Saume nothwendig der Charakter der Componenten ausprägen.

Nun wachsen aber bei dem Theile *sh* der Dunkelheitslinie die Ordinaten von Rechts nach Links und bei dem Theile *ad* der Helligkeitslinie nehmen sie von Links nach Rechts ab; es wird also nothwendig auf der Strecke *sc* des resultirenden Saumes die Dunkelheit vom rechten Rande gegen *c* zunehmen und auf der Strecke *bc* wiederum die Helligkeit gegen *c* abnehmen, oder, was dasselbe ist, die Intensität des grünen Saumes wird von seinen beiden Rändern gegen die mittlere Stelle *c* abnehmen.

Schliesslich sind noch jene Parthien zu erklären, welche entweder schwarz oder gleichförmig grün sind und eine verschiedene Breite haben können.

Nehmen wir an, die Kontrastfarben seien ungleich stark, die Helligkeit der nördlichen sei $= dc$ (Fig. 17.) und die Dunkelheit der

Digitized by Google

südlichen $= hf$, und es sei auch $dc < hf$. Unter diesen Voraussetzungen stellt uns *adg* den komponirenden nördlichen und *ifs* den komponirenden südlichen Saum vor. Man bemerkt nun alsogleich, dass in allen Punkten der Strecke *hc* des resultirenden Saumes sich die interferirenden Farben tilgen müssen, weil für jeden Punkt dieser Strecke die Helligkeitsordinate gleich ist der Dunkelheitsordinate. Die Parthien *sc* und *bh* werden hingegen, wie sich nun von selbst versteht, abgestuftes Grün besitzen.

Ist jedoch die Helligkeit *dc* der nördlichen Kontrastfarbe grösser als die Dunkelheit *fh* der südlichen (Fig. 18.), wo wiederum *adg* und *ifs* die komponirenden Säume sind, so muss die Strecke *ch* des resultirenden Saumes gleichförmig grün erscheinen, weil sich daselbst die Komplementtheile *dq* und *pf* zusammensetzen und die Helligkeit des ersteren Komplements grösser ist als die Dunkelheit des letzteren. In diesem Falle erstreckt sich also die grüne Farbe über den ganzen Saum ohne Unterbrechung. Die Theile *sh* und *bc* werden jedoch auch hier abgestuft sein.

Nachdem ich nun den grünen Saum ziemlich umständlich behandelt habe, werde ich mich bei dem Rosafarbigen, der bei (2) entstehet, und zu dem ich jetzt übergehe, kürzer fassen können, da die zu erklärenden Erscheinungen zum grossen Theile die nemlichen sind.

An der Scheidegrenze (2) haben wir den Kontrast $O \mid J$. In diesem Kontraste haben die Farben eine solche relative Lage, wie in der Skala II. Man wird daher aus dieser Skala entnehmen können, welche Abstufungen zwischen J und O liegen. Alle diese müssen durch die prismatische Aktion hervorgerufen werden; also zuerst die südlichen zwischen J und S, wozu der einfache Kontrast $S \mid J$ erforderlich ist, der den unvollständigen südlichen Saum *gfi* (Fig. 19.) liefert; hierauf die nördlichen, zwischen S und O liegenden, wozu wiederum der einfache Kontrast $O \mid S$ erfordert wird, der den unvollständigen nördlichen Saum *sdp* liefert. Die Fig. 19. setzt wiederum den Fall voraus, wo beide Farben gleich stark sind, also $dc = fc$.

Der Kontrast $O \mid J$ ist daher ebenfalls zusammengesetzt, wie der vorige $J \mid O$; nur mit dem Unterschiede, dass dabei jede Farbe, indem sie ihre Natur verläugnet, die Rolle einer schwarzen Oreose bezüglich der anderen spielt. Stellt man sich diesen Kontrast in Fig. 20. abgesondert vor, so tritt zuerst O, schwarz maskirt, als südliche Oreose auf, während J unverändert die Vorlage abgibt, so dass man also den einfachen Kontrast $S \mid J$ erhält; dann aber tritt

Digitized by Google

wiederum auch J, schwarz maskirt, als nördliche Oreose auf, während O unverändert die Vorlage bildet, so dass man den anderen einfachen Kontrast $O \mid S$ erhält.

Auch diese komponirenden Kontraste $S \mid J$ und $O \mid S$ kann man sich zuerst abgesondert im Sinne der Fig. 5. zusammensetzen, indem man S mit einem Indigo, und S' mit einem orangefarbigen Streifen vertauscht und beiden eine schwarze Unterlage gibt.

Gehet man dann von dieser Zusammenstellung zu der direkten, der Fig. 20. über, so erhalten die komponirenden Kontraste eine gemeinsame Scheidegrenze xy und desshalb müssen ihre respektiven Säume sdp und gfi (Fig. 19.) sich vollständig decken.

Als Wirkung dieser Ueberdeckung erscheint jetzt aber nicht die grüne, sondern die Rosafarbe und zwar in allen Punkten des resultirenden Saumes, mit Ausnahme des Punktes c. Dieser letztere Punkt, für welchen die interferirenden Farben gleich stark sind, weil $cd = cf$, und sich somit tilgen, erscheint jedoch nicht schwarz, sondern weiss.

Man bemerkt alsogleich, dass auf der rechten Seite von c die Ordinaten des Komplements fg sämmtlich grösser sind, als jene von ds und dass ebenso auf der linken Seite von c die Ordinaten von fi grösser sind, als von pd. Man kann also in der That allgemein behaupten: die Rosafarbe entstehet, wenn die Dunkelheit der südlichen Farbe grösser ist, als die Helligkeit der nördlichen.

Die Rosafarbe hat natürlich ebenfalls Abstufungen, wie die grüne, weil sich der Charakter der Componenten ds und fi in dem resultirenden Saume ausprägen muss. Desshalb wird die Helligkeit des Rosa von s gegen c zunehmen und ebenso die Dunkelheit von b gegen c abnehmen. Die Breite des Rosasaumes ist ganz dieselbe, wie die des dreifarbigen, nemlich $= bs$.

Der Rosasaum kann übrigens auch Parthien besitzen, die von gleichförmigem Rosa sind und auch solche, die ganz weiss sind, wie man sich leicht überzeugt, wenn man die Kontrastfarben O und J mit verschiedenen anderen Abstufungen vertauscht, jedoch immer dieselbe Ordnung beibehält, also die südliche rechts, die nördliche links lozirt.

Vergleichen wir nun den grünen Saum mit dem Rosafarbigen, so springt es als ein wesentlicher Unterschied in die Augen, dass

Digitized by Google

dort, wo die interferirenden Farben sich tilgen, bei dem grünen Saume ein schwarzer, bei dem Rosafarbigen hingegen ein weisser Streifen entsteht. Allein auch hierfür lässt sich der Grund angeben.

§. 7.

Ursache, warum bald Schwarz bald Weiss entsteht, wenn sich heterogene Farben tilgen.

Wir wollen auf einer schwarzen Papierfläche in Gedanken eine gerade Linie ziehen, parallel zu der brechenden Kante des Prisma, womit wir eben diese schwarze Fläche betrachten. Das Schwarz, welches sich rechts von der Linie befindet, kann als ein Roth von der Helligkeit = Null betrachtet werden und das Schwarz, welches links davon liegt, als das dunkelste Violet. Wir haben somit den Kontrast $S' \mid S$ und es müssen durch die prismatische Aktion alle jene Abstufungen, die zwischen S und S' liegen und die man aus der Skala I. erkennt, hervorgerufen werden.

Also zuerst alle nördlichen, zwischen S und W liegenden, und dazu ist der Kontrast $W \mid S$ erforderlich, der den vollständigen dreifarbigen Saum *sa* Fig. 17. liefert; dann aber auch alle südlichen zwischen W und S' liegenden, wozu wiederum der Kontrast $S' \mid W$ erfordert wird, der den vollständigen dreifarbigen Saum *sk* liefert. Da diese Säume sich vollständig decken und in jedem Interferenzpunkte die Farben gleich stark sind, so werden sie sich allenthalben tilgen, und es ist nun in unserem Falle kein Zweifel, dass das Resultat dieser Tilgung Schwarz sein müsse. Die schwarze Papierfläche kann ja durch das Prisma nicht anders, als schwarz erscheinen. Dem Kontraste $S' \mid S$ entspricht also ein Saum, der die Breite des dreifarbigen hat und ganz schwarz ist.

Vertauschen wir nun aber in diesem Kontraste $S' \mid S$ das S mit einer anderen nördlichen Farbe z. B. mit R (= *dc*), so dass wir also jetzt den Kontrast $S' \mid R$ haben, so wird dadurch bloss der nördliche komponirende Saum geändert. Dieser wird nemlich unvollständig, indem er das Komplement *gd* erhält, das die Farbe von R hat. Das Komplement *gd* wird sich nun mit *sp* zusammensetzen und Grün geben, während die Theile *da* und *pk* auch jetzt sich tilgen und somit Schwarz geben müssen.

Würden wir in unserem Kontraste $S' \mid S$ nicht nur S mit R,

Digitized by Google

sondern auch S' z. B. mit V (= hf) vertauschen, so bekämen wir den Kontrast $V \mid R$ und dadurch werden schon beide komponirenden Säume unvollständig. Der nördliche wird das Komplement gd bekommen, wie vorhin. Der südliche das Komplement fi von der Farbe des V. Alles andere bleibt beim Alten, wie es dem Kontraste $S' \mid S$ entspricht.

Jetzt wird auch durch Zusammensetzung des Komplements fi mit qa Grün resultiren und es wird diese grüne Parthie von der ersteren noch durch ein schwarzes Intervall von der Breite hc geschieden sein. Wenn also in dem grünen Saume eine schwarze Parthie vorkommt, so ist sie als ein Rest des dem Kontraste $S' \mid S$ entsprechenden schwarzen Saumes zu betrachten.

Denkt man sich nun auf ähnliche Weise auf einer weissen Fläche eine Linie gezogen, so kann man das rechts davon befindliche Weiss als eine südliche Farbe und das links davon liegende als eine nördliche betrachten. Man hat somit den Kontrast $W' \mid W$ und dieser bestehet, wie uns die Skala II. lehret, aus den komponirenden Kontrasten $S \mid W$ und $W' \mid S$. Die diesen letzteren entsprechenden Säume sk und sa Fig. 21. sind dreifarbig und somit vollständige. Der resultirende Saum wird hier, wie sich von selbst verstehet, ebenfalls dieselbe Breite = bs haben, wie der dreifarbige, er wird aber jetzt in seiner ganzen Ausdehnung weiss sein.

Vertauscht man nun aber in dem Kontraste $W' \mid W$ das W mi einer blauen Abstufung B (= fh), so dass man den Kontrast $W' \mid B$ erhält, so wird dadurch nur der südliche komponirende Saum geändert, weil er ein Komplement fg bekommt. Dieses setzt sich mit is zu Rosa zusammen. Alles Andere bleibt beim Alten.

Vertauscht man auch noch W' mit einer gelben Farbe G (= dc), so dass man den Kontrast $G \mid B$ bekommt, so wird auch der nördliche komponirende Saum ein Komplement ed erhalten, das sich mit mk zusammensetzt und ebenfalls Rosa gibt. Nur die Mitte des weissen Saumes bleibt also noch unverändert und es werden somit die beiden rosafarbigen Parthien durch ein Intervall von der Breite ch, das weiss ist, geschieden sein.

Man sieht also, dass die Komplemente es hauptsächlich sind, welche den schwarzen und weissen Saum modifiziren. Je mehr das eine oder das andere Komplement oder beide an Ausdehnung gewinnen, desto beträchtlicher werden die Veränderungen sein, welche sie bewirken.

Digitized by Google

Wenn zwei entgegengesetzte Farben gleich stark sind, und sich somit tilgen, so ist diese Wirkung der Interferenz ihrer Natur nach eine solche, die keine Grade zulässt, d. h. Farben von grösserer Intensität werden sich nicht etwa desshalb, weil ihre Intensität grösser ist, besser oder vollständiger tilgen, als solche, deren Intensität kleiner ist.

Sind aber die Farben nicht gleich stark, setzen sie sich somit zu Grün oder Rosa zusammen, so ist diese Wirkung eines Mehr oder Weniger fähig, d. h. der Charakter des Grün oder des Rosa kann in einem Falle stärker hervortreten, als in einem anderen, ja in gewissen Fällen kann er sogar ganz unmerklich sein.

Der Kontrast *S* | *W* gibt, wie bekannt, einen dreifarbigen südlichen Saum; vertauscht man nun aber das *W* mit einer hellgelben Farbe *G*, die also dem Weiss sehr nahe kommt, so erhält man den Kontrast *S* | *G* und auch dieser gibt noch einen dreifarbigen Saum, der fast dasselbe Aussehen hat, wie der vorige und doch ist dieser Kontrast *S* | *G* schon ein zusammengesetzter und zwar aus den einfachen *W* | *G* und *S* | *W* und es gibt der erstere (Fig. 18.) den nördlichen Saum *gda* (wenn die Helligkeit von *G* gleich *dc* angenommen wird) und der letztere den südlichen Saum *sm*. Die Theile *ad* und *mn* werden sich nun wohl tilgen, aber das hellgelbe Complement *dg* bringt keine merkliche Veränderung des Saumtheiles *ns* hervor, d. h. wenn in dem vorliegenden Falle noch ein Grün entstehet, wie man wohl annehmen muss, so ist es doch so schwach, dass es kaum bemerkt wird. Es wirkt also das helle Gelb von *dg* fast noch ebenso wie Weiss.

§. 8.

Zweiter Fall des zusammengesetzten Kontrastes.

Dieser bestehet darin, dass die Kontrastfarben zwar homogen sind, also beide nördlich oder südlich, dass aber ihre Anordnung die umgekehrte zu derjenigen ist, welche sie im dreifarbigen Saume besitzen. Ist demnach z. B. in Fig. 1. der untere Streif roth, der obere gelb, so hat man an der Uebergangsstelle (1) den Kontrsst *G* | *R* und bei (2) den Kontrast *R* | *G*. Dieser letztere ist es nun, der hier zur Behandlung kommt. Aus der Farbenleiter I. Fig. 3. erkennt man, welche Abstufungen man durchwandern muss, um von

Digitized by Google

G zu *R* zu gelangen. Man muss zuerst von *G* zu *W* übergehen, wodurch man den einfachen Kontrast *W* | *G* erhält; dann von *W* zu *S*, wodurch man wieder den Kontrast *S* | *W* bekommt und schliesslich von *S* zu *R*, was den Kontrast *R* | *S* liefert.

Konstruirt man nun die diesen drei einfachen Kontrasten entsprechenden Säume, so wird man ohne Schwierigkeit das Resultat ihrer Zusammensetzung erkennen.

Schlussbemerkung.

Kombinirt man die zusammengesetzten Farben Grün und Rosa mit einander und dann auch mit verschiedenen nördlichen oder südlichen Farben, so erhält man Kontraste, die recht interessante und wie mir scheint, der Erforschung würdige Farbensäume liefern.

Digitized by Google

XVII.

Zur Characteristik der Zahl 60.

Von

Herrn Ingenieur-Hauptmann *von Wasserschleben*,
in Magdeburg.

Die Zahl 60 besitzt ausser ihrer grossen Theilbarkeit durch viele kleinere Zahlen, und der bekannten Eigenthümlichkeit, dass sie das Product der Pythagoräischen Zahlen 3, 4 und 5 ist, noch einige merkwürdige Beziehungen zu den Primzahlen, und denjenigen Zahlen, welche Producte zweier Primzahlen sind:

Zur Kürzung des Ausdrucks wollen wir uns erlauben, vorweg einige Bezeichnungen einzuführen, und zu begreifen unter:

a) Aechten Primzahlen diejenigen Zahlen, in welche keine andere kleinere Zahl ohne Rest aufgeht;

b) Unächten Primzahlen diejenigen, welche durch Multiplication zweier oder mehrerer ächter Primzahlen entstanden sind; und

c) Allgemeinen Primzahlen sämmtliche ächte und unächte Primzahlen zuzammengenommen.

Betrachten wir zunächst die Allgemeinen Primzahlen, so sehen wir, dass sie sich der Reihe nach in Gruppen zu vier abtheilen lassen, deren Summe gleich 60 oder einem Vielfachen von 60 ist.

Digitized by Google

[illegible]

$[illegible] + 17 + 19 \quad = 1.\ 60 = 60.$

$[illegible] + 29 + 31 + 37 \quad = 2.\ 60 = 120.$

$[illegible] + 43 + 47 + \frac{49}{7.7} \quad = 3.\ 60 = 180.$

$[illegible] + 59 + 61 + 67 \quad = 4.\ 60 = 240.$

$71 + 73 + \frac{77}{11.7} + 79 \quad = 5.\ 60 = 300.$

$83 + 89 + \frac{91}{13.7} + 97 \quad = 6.\ 60 = 660.$

$101 + 103 + 107 + 109 \quad = 7.\ 60 = 420.$

$113 + \frac{119}{17.7} + \frac{121}{11.11} + 127 \quad = 8.\ 60 = 480.$

$131 + \frac{133}{19.7} + 137 + 139 \quad = 9.\ 60 = 540.$

$\frac{143}{11.13} + 149 + 151 + 157 \quad = 10.\ 60 = 600.$

$\frac{161}{23.7} + 163 + 167 + \frac{169}{13.13} \quad = 11.\ 60 = 660.$

$173 + 179 + 181 + \frac{187}{11.17} \quad = 12.\ 60 = 720.$

$191 + 193 + 197 + 199 \quad = 13.\ 60 = 780.$

$\frac{203}{29.7} + \frac{209}{11.19} + 211 + \frac{217}{31.7} = 14.\ 60 = 840.$

$\frac{221}{13.17} + 223 + 227 + 229 \quad = 15.\ 60 = 900.$

$233 + 239 + 241 + \frac{247}{19.13} \quad = 16.\ 60 = 960.$

etc. etc. etc. in inf.

Mit Hülfe dieser Gruppirung von Vielfachen von 60 kann man leicht finden, ob eine beliebige Zahl den Allgemeinen Primzahlen angehört oder nicht.

Wir unterscheiden zu dem Zweck an der gegebenen Zahl

1) die Endziffer und

2) die Kennzahl.

Letztere ist diejenige Zahl, welche entsteht, wenn man von der gegebenen Zahl die Endziffer weglässt; bei 247 z. Bspl. ist die Endziffer 7, die Kennzahl 24.

Die Endziffer erweist zunächst, ob die Zahl überhaupt in der Reihe der Primzahlen zu suchen ist, also mit 1, 3, 7 oder 9 endet.

Digitized by Google

Die Kennzahlen der Anfangszahlen aller Gruppen zeigen nun die Eigenthümlichkeit, dass in ihnen die Zahl 3 nicht aufgeht; es sind dies nämlich:

1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 14, 16, 17, 19, 20, 22, 23, etc. etc. in inf.

Geht man von der Zahl 3, und den zur natürlichen Reihenfolge zwischen diese Zahlen gehörigen Vielfachen von 3 aus, zu welchen jedes Mal die nächst höhere und nächst niedere Zahl als zugehörig betrachtet werden, so sieht man, dass, wenn die Kennzahl um eins kleiner als das Vielfache von 3 ist, z. Bspl. bei 5, 8, 11, 14 u. s. w. die Reihenfolge der Endziffern der Gtuppe stereotyp 3, 9, 1, 7 ist; ist die Kennzahl um eins grösser, wie bei 7, 10, 13, 16 u. s. w., so ist die Reihenfolge der Endziffern stereotyp 1, 3, 7, 9.

Bei einer grösseren, gegebenen Zahl muss man demnach mit 3 in dieselbe ohne die Endziffer, d. h. in die Kennzahl dividiren, und auf den Rest achten.

Bleibt 1 Rest, so fängt die erste Endziffer der Gruppe auch mit 1 an, und es folgen 1, 3, 7, 9. Bleiben 0 oder 2 Rest, so fängt die erste Endziffer der Gruppe mit 3 an, und es folgen 3, 9, 1, 7.

Geht ferner 3 in der Kennzahl auf, so liegt die gegebene Zahl in der Gruppe, welche mit der nächst niederen Zahl als Kennzahl anfängt, also bei 181, da 3 in 18 aufgeht, und die nächst niedere Kennzahl 17 die Endziffer 3 bedingt, in der Gruppe 173+179+181+187.

Geht 3 dagegen in der Kennzahl nicht auf, so liegt die gegebene Zahl, wenn überhaupt, in der Gruppe, die mit dieser Kennzahl selbst anfängt, also bei 19, wo 1 Rest bleibt, in 191+193+197+199, bei 23, wo 2 Rest bleibt in 233+239+241+247.

Kommt die zu untersuchende gegebene Zahl in der ermittelten Gruppe nicht vor, so ist sie keine allgemeine, auch keine ächte Primzahl.

Beiläufig erwähnt, kommen von 100 bis 400, von 400 bis 700 u. s. w. also in je einem Dreihundert gerade 80 allgemeine Primzahlen vor.

Treten wir nun den unächten Primzahlen etwas näher, so sind dies folgende:

7.7						
11.7	11.11	11.13	11.17	11.19	11.23	11.29
13.7	13.11	13.13	13.17	13.19	13.23	13.29
17.7	17.11	17.13	17.17	17.19	17.23	17.29
19.7	19.11	19.13	19.17	19.19	19.23	19.29
23.7	23.11	23.13	23.17	23.19	23.23	23.29
29.7	29.11	29.13	29.17	29.19	29.23	29.29
31.7	31.11	31.13	31.17	31.19	31.23	31.29
37.7	37.11	37.13	37.17	37.19	37.23	37.29

etc. etc. in inf.

Digitized by Google

oder ausgerechnet:

49.						
77	121	143	187	209	253	319
91	143	169	221	247	299	377
119	187	221	289	323	391	493
133	209	247	323	361	437	551
161	253	299	391	437	529	667
203	319	377	493	551	667	841
217	341	403	527	589	713	899
259	407	481	629	603	851	1073

etc. etc. in inf.

Multiplicationen, wie 7.49, 77.77, 11.91, 119.343 etc. etc. ergebe ebenfalls unächte Primzahlen.

Die mit fetten Ziffern gesetzten Zahlen kommen doppelt vor, und falle in der Reihenfolge der natürlichen Werthe weg. Wir haben dann:

49, 77, 91, 119, 121, 133, 143, 161, 169, 187, 203, 209, 21 221, 247, 253, 259, 287, 289, 299, 301, 319, 323, 329, 341, 34 361, 371, 377, 391, 403, 407, 413, 427, 437, 451, 469, 473, 48 493, 497, 511, 517, 527, 529, 539, 551, 553, 559, 581, 583, 589 et etc. in inf.

Die mit fetten Ziffern gesetzten Zahien sind indessen zu sonst gen Ermittelungen dienlich, wie sich gleich zeigen wird.

Wir fassen die oben in eine Reihe untereinander gesetzten Zahle zusammen, und nennen sie nach ihrem einem constanten Factor u ächte Primzahlen von 7, 11, 13, 19 etc. etc.

Dieselben lassen sich, wenn man mit dem nichtconstanten Fact 11 beginnt, wieder je zu Vieren gruppiren, deren Summe gleich eine Vielfachen von 60 ist. Also z. Bspl. bei der Reihe der unächt Primzahlen von 7:

$$77+91+119+133 = 7.\ 60 = 420.$$

$$161+203+217+259 = \begin{array}{c}14.60\\2.7.60\end{array} = 840.$$

$$287+301+329+343 = \begin{array}{c}21.60\\3.7.60\end{array} = 1260.$$

$$371+413+427+469 = \begin{array}{c}28.60\\4.7.60\end{array} = 1680.$$

$$497+511+539+553 = \begin{array}{c}35.60\\5.7.60\end{array} = 2100.$$

etc. etc. in inf.

Digitized by Google

oder bei der Reihe von 11:

$$121+143+187+209 = {11.60. \atop 1.11.60} = 660.$$

$$253+319+341+407 = {22.60 \atop 2.11.60} = 1320.$$

$$451+473+517+539 = {33.60 \atop 3.11.60} = 1980.$$

etc. etc. in inf.

oder bei der Reihe von 13:

$$143+169+221+247 = {13.60 \atop 1.13.60} = 780.$$

$$299+377+403+481 = {26.60 \atop 2.13.60} = 1560.$$

$$533+559+611+657 = {39.60 \atop 3.13.60} = 2340.$$

etc. etc. in inf.

Die Summen dieser Gruppen unächter Primzahlen wachsen also auch in den je um eins steigenden Producten von 60, fangen jedoch gleich mit einer Zahl gleich 60 mal dem betreffenden constanten Primzahlfactor an; also die Summen der Reihe von 7 beginnen mit 60.7, die von 23 mit 60.23, die von 37 mit 60.37 u. s. w.

Aus diesen Gruppirungen der allgemeinen und der unächten Primzahlen folgt, dass die mit Vielfachen aller allgemeinen Primzahlen multiplicirte Zahl 60 sowohl gleich einer Gruppe allgemeiner, als auch gleich einer Gruppe unächter Primzahlen ist.

Dies sind also die Producte von 60 mal:

$$7,\ 11,\ 13,\ {14 \atop 2.7},\ 17,\ 19,\ {21 \atop 3.7},\ {22 \atop 2.11},\ 23,\ {26 \atop 2.13},$$

$${28 \atop 4.7},\ 29,\ 31,\ {33 \atop 3.11},\ {34 \atop 2.17},\ {35 \atop 5.7},\ 37,\ {38 \atop 2.19},\ {39 \atop 3.13}$$

etc. etc.

Beispielsweise ist:

$$7.60 = 420 = \begin{cases} 101+103+107+109 & \text{(Allgemeine)} \\ 77+91+119+133 & \text{(Unächte)} \end{cases}$$

$$13.60 = 780 = \begin{cases} 191+193+197+199 & \text{(Allgemeine)} \\ 143+169+221+247 & \text{(Unächte)} \end{cases}$$

Wie eine weitere Betrachtung der Gruppen sowohl der allgemeinen, wie der unächten Primzahlen ergiebt, liegen alle vier Zahlen stets in derselben Art und Weise (zwei kleinere und zwei grössere)

Digitized by Google

um eine „Gruppenmittelzahl“ gelagert. Diese Gruppenmittelzahlen fangen bei den allgemeinen Primzahlen mit $\frac{60}{4} = 15$ an, und sind die Vielfachen von 15 in der natürlichen Reihenfolge der Zahlen; also 15 mal 2, 3, 4, 5, 6 etc. etc. oder 30, 45, 60, 75, 90, 105 etc. etc. in inf.

Bei allen geraden Gruppenmittelzahlen (30, 60, 90, etc. stets mit einer Null als Endziffer, mit *G* bezeichnet) liegen die allgemeinen Primzahlen nach folgendem Schema gruppirt:

$$-7-1(G)+1+7$$

bei allen ungeraden (15, 45, 75, 105 etc. stets mit einer Fünf als Endziffer, mit *U* bezeichnet) wie folgt:

$$-4-2(U)+2+4$$

Es lassen sich also auch mit Hülfe dieser Gruppenschemata und den Vielfachen von 15 alle Gruppen der allgemeinen Primzahlen construiren.

Beispielsweise also:

$$\begin{matrix} -7 & -1 & \begin{pmatrix} G \\ 120 \end{pmatrix} & +1 & +7 \\ 113 & 119 & & 121 & 127 \end{matrix}$$

und

$$\begin{matrix} -4 & -2 & \begin{pmatrix} U \\ 135 \end{pmatrix} & +2 & +4 \\ 131 & 133 & & 137 & 139 \end{matrix}$$

Dasselbe findet bei den unächten Primzahlen statt, nur dass hier die „Anfangsgruppenmittelzahl“ $= \frac{60}{4} x = 15.x$ für die erste Gruppe der unächten Primzahlen von x ist, und sich danach die Schemata für die Gruppirung, wie folgt, gestalten:

$$-7.x-1.x(G.)+1.x+7.x.$$
$$-4.x-2.x(U.)+2.x+4.x.$$

Mit Hülfe dieser Schemata und der leicht zu berechnenden Gruppenmittelzahlen kann man also alle aus einer allgemeinen Primzahl hervorgegangenen unächten Primzahlen bestimmen.

Die Anfangsgruppenmittelzahlen sind:

für 7 = 7.15 = 105
- 11 = 11.15 = 165
- 13 = 13.15 = 195
- 17 = 17.15 = 255
- 19 = 19.15 = 285
- 23 = 23.15 = 345

etc. etc. in inf.

Digitized by Google

Dieselben schreiten als Gruppenmittelzahlen nach der natürlichen Zahlenreihe weiter, also z. Bspl. 105 mal 2, 3, 4, 5, 6 etc. = 210, 315, 420, 525, 630, 735 etc.

Haben wir z. Bspl. 5. 105 = 525, so sind, da die Zahl ungerade ist, 525 ± 14 und 525 ± 28 die dazu gehörigen unächten Primzahlen von 7; das sind $497 + 511 + 539 + 533$.

Haben wir 6. 105 = 630, so sind, da die Zahl gerade ist, 630 ± 7 und 630 ± 49 unächte Primzahlen von 7; das sind $581 + 623 + 637 + 679$.

Bei allen bisherigen Gruppirungen sind die Zahlen 7 und 49 sowie die Zahlen kleiner als 7, wie 5, 3, 2, welche auch der Definition der ächten Primzahl entsprechen, unbeachtet geblieben.

Dieselben liegen um die Gruppenmittelzahl Null gelagert, und heben sich gegen dieselben negativen Glieder gegenseitig auf.

Will man endlich wissen, ob eine beliebige Zahl eine ächte Primzahl ist, so hat man, wenn die Endziffer an sich die erforderliche Aufklärung nicht giebt, also eine der vier Ziffern 1, 3, 7 oder 9 ist, folgendes Verfahren einzuschlagen.

Man ermittelt zunächst, entweder nach der Theorie der Kennzahl, oder nach der Theorie der Gruppenmittelzahl, ob die gegebene Zahl zu einer der Gruppen der allgemeinen Primzahlen gehört oder nicht.

Ist ersteres der Fall, so dividire man mit sämmtlichen Anfangsgruppenmittelzahlen, welche kleiner als die gegebene Zahl sind, in letztere hinein, und ermittele die zu jeder allgemeinen Primzahl gehörende nächst kleinere und nächst grössere Gruppenmittelzahl. Hat man alsdann nach den oben mitgetheilten Gruppenschematen die unächten Primzahlen zu diesen Gruppenmittelzahlen, sowie von den nächst grösseren Anfangsgruppenmittelzahlen die Glieder $-4x$, bis letztere grösser als die gegebene Zahl sind, ermittelt, und die gegebene Zahl ist nicht darunter, so ist es eine ächte Primzahl.

Begreift man unter *Prz* jede ächte, unter *πρz* jede unächte, unter *prz* jede allgemeine Primzahl, unter *u* jede ungerade, unter *g* jede gerade Zahl, so ist:

$$1)\quad prz = 15.u \begin{Bmatrix} +4 \\ +2 \\ -2 \\ -4 \end{Bmatrix} + 15.^{g} \begin{Bmatrix} +7 \\ +1 \\ -1 \\ -7 \end{Bmatrix}$$

2) $$\pi\varrho s = 15.u.prz \begin{cases} +4.prz \\ +2.prz \\ -2.prz \\ -4.prz \end{cases} + 15.g.prz \begin{cases} +7prz \\ +1prz \\ -1prz \\ -7prz \end{cases}.$$

3)

$$Prz = \left\{ 15.u \begin{cases} +4 \\ +2 \\ -2 \\ -4 \end{cases} + 15.g \begin{cases} +7 \\ +1 \\ -1 \\ -7 \end{cases} \right\} - \left\{ 15.u.prz \begin{cases} +4prz \\ +2prz \\ -2prz \\ -4prz \end{cases} + 15.g.prz. \begin{cases} +7prz \\ +1prz \\ -1prz \\ -7prz \end{cases} \right.$$

Digitized by Google

XVIII.

Neue Auflösungen einer nautisch-astronomischen und einer geodätisch-astronomischen Aufgabe.

Von

dem Herausgeber.

---

§. 1.

Eine der wichtigsten nautisch-astronomischen Aufgaben ist bekanntlich die folgende gewöhnlich nach Douwas benannte Aufgabe:

Aus den gemessenen Höhen zweier Sterne, deren Declinationen bekannt sind, und der gemessenen Differenz ihrer Stundenwinkel die Polhöhe und die Stundenwinkel zu bestimmen;

woraus sich dann ferner auch alle übrigen Elemente der beiden beobachteten Sterne leicht ergeben. Für die unmittelbare Anwendung in der Praxis ausgedrükt würde die Aufgabe so lauten: Aus den gemessenen Höhen zweier Sterne, deren Rectascensionen und Declinationen bekannt sind, und der Zwischenzeit der Beobachtungen die Polhöhe und die Zeit zu bestimmen; worüber weiter unten das Nöthige bemerkt werden wird.

Dieser **nautisch**-astronomischen Aufgabe lässt sich eine andere astronomische Aufgabe zur Seite stellen, welche besonders in

Digitized by Google

der Geodäsie zweckmässige Anwendung finden kann*), und daher wohl den Namen einer **geodätisch-astronomischen** Aufgabe verdienen dürfte, nämlich die folgende:

Aus den gemessenen Höhen zweier Sterne, deren Declinationen bekannt sind, und der gemessene Differenz ihrer Azimuthe die Polhöhe und die Azimuthe zu bestimmen; woraus sich dann wiederum ferner die übrigen Elemente der beiden beobachteten Sterne leicht ergeben.

Beide Aufgaben sind, wie nachher gezeigt werden wird, eigentlich nur eine Aufgabe. Ich habe diese beiden Aufgaben schon früher im Archiv (m. s. Thl. XIV. S. 1. — Thl. XII. S. 67) in ziemlicher Ausführlichkeit behandelt, komme aber ihrer Wichtigkeit wegen in dieser Abhandlung wieder auf dieselben zurück, um für sie neue ganz allgemeine analytische Auflösungen in vollständig entwickelten Formeln zu geben, indem ich bemerke, dass besonders die Darstellung der gesuchten Grössen in vollständig entwickelter, so zu sagen independenter analytischer Form, so dass nämlich diese Grössen in ganz allgemeinen Formeln, ohne Zwischengrössen, unmittelbar durch die gegebenen Grössen — so weit dies ohne allzu grosse Weitläufigkeit möglich ist — ausgedrückt werden, die Hauptaufgabe ist, welche ich mir in dieser Abhandlung gestellt habe. Auch wird namentlich die bei der Lösung angewandte Methode, die in vielen Fällen mit grossem Vortheil anwendbar und auch schon früher von mir öfters zur Anwendung gebracht worden ist, sich einiger Beachtung der Leser zu empfehlen vielleicht geeignet sein.

§. 2.

Wir werden uns durchgängig der folgenden Bezeichnungen bedienen:

Declinationen der beiden Sterne . . . . . δ, δ';
Gemessene Höhen der beiden Sterne . . . h, h';
Stundenwinkel der beiden Sterne . . . . . σ, σ';
Azimuthe der beiden Sterne . . . . ω, ω';
Polhöhe . . . . $\overline{\omega}$.

*) Es dürfte wohl schwerlich eine zum Gebrauche bei geodätischen Messungen geeignetere Methode zur Bestimmung der Breite oder Polhöhe geben, weil dieselbe nur die Anwendung des Theodoliten erfordert, also des Instruments, mit dem der Geodät alle seine Messungen ausführt; insbesondere beruhet diese Methode gar nicht, wie viele andern Methoden, auf Zeitbestimmungen, erfordert also nicht den dem Geodäten doch nicht in demselben Grade wie dem Astronomen geläufigen Gebrauch der Uhr.

Digitized by Google

Die Stundenwinkel und Azimuthe zählen wir im Sinne der täglichen Bewegung der Sphäre von 0 bis 360°, worüber man, so wie über die im Folgenden zur Anwendung kommenden Grundformeln, mit Mehrerem die Abhandlungen Thl. VIII. Nr. VII. §. 1. und Thl. XLIV. Nr. XV. §. 6. 15), 16 nachsehen kann, auf welche daher hier, ein für alle Mal verwiesen wird. Die Differenzen $\sigma-\sigma'$ und $\omega-\omega'$ respective bei der ersten und zweiten Aufgabe werden, so wie bei beiden Aufgaben δ, δ' und h, h', als gegeben angesehen.

Der Auflösung der ersten Aufgabe legen wir die beiden bekannten Gleichungen:

$$\sin h = \sin\delta\sin\overline{\omega}+\cos\delta\cos\sigma\cos\overline{\omega},$$
$$\sin h' = \sin\delta'\sin\overline{\omega}+\cos\delta'\cos\sigma'\cos\overline{\omega};$$

der Auflösung der zweiten Aufgabe die beiden gleichfalls bekannten Gleichungen:

$$\sin\delta = \sin h\sin\overline{\omega}-\cos h\cos\omega\cos\overline{\omega},$$
$$\sin\delta' = \sin h'\sin\overline{\omega}-\cos h'\cos\omega'\cos\overline{\omega}$$

oder:

$$\sin\delta = \sin h\sin\overline{\omega}+\cos h\cos(180^0-\omega)\cos\overline{\omega},$$
$$\sin\partial' = \sin h'\sin\overline{\omega}+\cos h'\cos(180^0-\omega')\cos\overline{\omega}$$

zu Grunde. Da diese beiden letzten Gleichungen aus den beiden ersten Gleichungen hervorgehen, wenn man in denselben für:

$$h,\ h';\quad \delta,\ \delta';\quad \sigma,\ \sigma';\quad \overline{\omega}$$

respective setzt:

$$\partial,\ \partial';\quad h,\ h';\quad 180^0-\omega,\quad 180^0-\omega';\quad \overline{\omega};$$

so erhellet, dass es ganz unnütz sein würde, jede der beiden Aufgaben für sich aufzulösen, indem es offenbar vollständig genügt, bloss die erste zu lösen, und in den dadurch erhaltenen Formeln die obigen Substitutionen vorzunehmen, um unmittelbar die Formeln zu erhalten, welche die zweite Aufgabe lösen. Wir werden uns daher auch von jetzt an nur mit der Lösung der ersten Aufgabe beschäftigen.

§. 3.

Nach dem vorhergehenden Paragraphen legen wir der Auflösung die beiden folgenden Gleichungen:

$$1)\quad \ldots\ldots \begin{cases}\sin h = \sin\delta\sin\overline{\omega}+\cos\delta\cos\sigma\cos\overline{\omega},\\ \sin h' = \sin\delta'\sin\overline{\omega}+\cos\delta'\cos\sigma'\cos\overline{\omega};\end{cases}$$

Digitized by Google

oder:

$$\sin h = \sin\delta\sin\overline{\omega} + \cos\delta\cos\{\tfrac{1}{2}(\sigma+\sigma') + \tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma')\}\cos\overline{\omega},$$
$$\sin h' = \sin\delta'\sin\overline{\omega} + \cos\delta'\cos\{\tfrac{1}{2}(\sigma+\sigma') - \tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma')\}\cos\overline{\omega};$$

also die beiden Gleichungen:

$$\sin h = \sin\delta\sin\overline{\omega} + \cos\delta\cos\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma')\cos\overline{\omega}\cos\tfrac{1}{2}(\sigma+\sigma') \\ - \cos\delta\sin\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma')\cos\overline{\omega}\sin\tfrac{1}{2}(\sigma+\sigma'),$$
$$\sin h' = \sin\delta'\sin\overline{\omega} + \cos\delta'\cos\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma')\cos\overline{\omega}\cos\tfrac{1}{2}(\sigma+\sigma') \\ + \cos\delta'\sin\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma')\cos\overline{\omega}\sin\tfrac{1}{2}(\sigma+\sigma')$$

zum Grunde.

Wenn wir nun der Kürze wegen:

$$2)\ \ldots \begin{cases} a_0 = \sin\delta, & a_1 = \sin\delta', \\ b_0 = \cos\delta\cos\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma'), & b_1 = \cos\delta'\cos\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma'), \\ c_0 = -\cos\delta\sin\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma'); & c_1 = \cos\delta'\sin\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma') \end{cases}$$

und:

$$3)\ \ldots\ldots\ldots\ldots \begin{cases} x = \sin\overline{\omega}, \\ y = \cos\overline{\omega}\cos\tfrac{1}{2}(\sigma+\sigma'), \\ z = \cos\overline{\omega}\sin\tfrac{1}{2}(\sigma+\sigma') \end{cases}$$

setzen; so werden die aufzulösenden Gleichungen, weil offenbar:

$$4)\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

ist:

$$5)\ \ldots\ldots\ldots\ldots \begin{cases} a_0x + b_0y + c_0z = \sin h, \\ a_1x + b_1y + c_1z = \sin h', \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1. \end{cases}$$

Indem wir nun diese Gleichungen nach der von uns in dem Aufsatze Thl. XXXVII. Nr. XXII. entwickelten allgemeinen Methode aufzulösen beabsichtigen, schicken wir zuerst einige Relationen voraus, durch welche diese Auflösung wesentlich erleichtert und abgekürzt werden wird.

Aus 2) erhält man zuerst auf der Stelle:

$$6)\ \ldots\ldots\ldots\ldots \begin{cases} a_0{}^2 + b_0{}^2 + c_0{}^2 = 1, \\ a_1{}^2 + b_1{}^2 + c_1{}^2 = 1; \end{cases}$$

ferner:

$$a_0a_1 + b_0b_1 + c_0c_1$$
$$= \sin\delta\sin\delta' + \cos\delta\cos\delta'\{\cos\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma')^2 - \sin\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma')^2\}$$
$$= \sin\delta\sin\delta' + \cos\delta\cos\delta'\cos(\sigma-\sigma'),$$

oder, wenn der Kürze wegen

Digitized by Google

7) . . . . $\cos\Delta = \sin\delta\sin\delta' + \cos\delta\cos\delta'\cos(\sigma - \sigma')$

gesetzt und Δ immer zwischen 0 und 180° genommen wird, was offenbar verstattet ist:

8) . . . . $a_0a_1 + b_0b_1 + c_0c_1 = \cos\Delta.$

Weil nach 7) offenbar:

$$\begin{aligned}\cos\Delta &= \cos(90^0-\delta)\cos(90^0-\delta')+\sin(90^0-\delta)\sin(90^0-\delta')\cos(\sigma-\sigma')\\ &= \cos(90^0-\delta)\cos(90^0-\delta')+\sin(90^0-\delta)\sin(90^0-\delta')\cos(\sigma'-\sigma)\end{aligned}$$

oder auch:

$$\begin{aligned}\cos\Delta &= \cos(90^0-\delta)\cos(90^0-\delta')+\sin(90^0-\delta)\sin(90^0-\delta')\cos\{360^0-(\sigma-\sigma')\}\\ &= \cos(90^0-\delta)\cos(90^0-\delta')+\sin(90^0-\delta)\sin(90^0-\delta')\cos\{360^0-(\sigma'-\sigma)\}\end{aligned}$$

ist, so erhellet leicht, dass Δ der 180° nicht übersteigende Abstand der beiden Sterne von einander ist.

Aus 8) folgt:

9) . . . . $1-(a_0a_1+b_0b_1+c_0c_1)^2 = \sin\Delta^2,$

also, weil unter der gemachten Voraussetzung, dass Δ zwischen 0 und 180° genommen werden soll, jedenfalls sin Δ positiv ist:

10) . . . . $\sin\Delta = \sqrt{1-(a_0a_1+b_0b_1+c_0c_1)^2}.$

Bedient man sich nun ähnlicher Bezeichnungen wie in Thl. XXXVII. Nr. XXII.; so ist offenbar zu setzen:

11)

$$\begin{aligned}\mathfrak{A} &= \frac{(\sin\delta-\sin\delta'\cos\Delta)\sin h+(\sin\delta'-\sin\delta\cos\Delta)\sin h'}{\sin\Delta^2},\\ \mathfrak{B} &= \frac{(\cos\delta-\cos\delta'\cos\Delta)\sin h+(\cos\delta'-\cos\delta\cos\Delta)\sin h'}{\sin\Delta^2}\cos\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma'),\\ \mathfrak{C} &= -\frac{(\cos\delta+\cos\delta'\cos\Delta)\sin h-(\cos\delta'+\cos\delta\cos\Delta)\sin h'}{\sin\Delta^2}\sin\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma');\end{aligned}$$

oder:

12)

$$\begin{aligned}\mathfrak{A} &= \frac{(\sin\delta-\sin\delta'\cos\Delta)\sin h+(\sin\delta'-\sin\delta\cos\Delta)\sin h'}{\sin\Delta^2},\\ \mathfrak{B} &= \frac{(\cos\delta-\cos\delta'\cos\Delta)\sin h+(\cos\delta'-\cos\delta\cos\Delta)\sin h'}{\sin\Delta^2}\cos\tfrac{1}{2}(\sigma'-\sigma),\\ \mathfrak{C} &= \frac{(\cos\delta+\cos\delta'\cos\Delta)\sin h-(\cos\delta'+\cos\delta\cos\Delta)\sin h'}{\sin\Delta^2}\sin\tfrac{1}{2}(\sigma'-\sigma);\end{aligned}$$

Digitized by Google

oder:

13)

$$\mathfrak{A}=\frac{\sin\delta\sin h+\sin\delta'\sin h'-(\sin\delta\sin h'+\sin\delta'\sin h)\cos\varDelta}{\sin\varDelta^2},$$

$$\mathfrak{B}=\frac{\cos\delta\sin h+\cos\delta'\sin h'-(\cos\delta\sin h'+\cos\delta'\sin h)\cos\varDelta}{\sin\varDelta^2}\cos\tfrac{1}{2}(\sigma'-\sigma),$$

$$\mathfrak{C}=\frac{\cos\delta\sin h-\cos\delta'\sin h'-(\cos\delta\sin h'-\cos\delta'\sin h)\cos\varDelta}{\sin\varDelta^2}\sin\tfrac{1}{2}(\sigma'-\sigma).$$

Mittelst 7) findet man auch leicht die folgende Formel:

$$14)\;.\;\mathfrak{A}=\frac{\left\{\begin{array}{l}\cos\delta'\sin h\{\sin\delta\cos\delta'-\cos\delta\sin\delta'\cos(\sigma-\sigma')\}\\+\cos\delta\sin h'\{\cos\delta\sin\delta'-\sin\delta\cos\delta'\cos(\sigma-\sigma')\}\end{array}\right\}}{\sin\varDelta^2}$$

Ferner ist:

$$\begin{aligned}A&=\quad 2\cos\delta\cos\delta'\sin\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma')\cos\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma'),\\B&=-\cos\delta\sin\delta'\sin\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma')-\sin\delta\cos\delta'\sin\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma'),\\C&=\quad\sin\delta\cos\delta'\cos\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma')-\cos\delta\sin\delta'\cos\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma');\end{aligned}$$

also:

$$15)\;\ldots\ldots\left\{\begin{aligned}A&=\quad\cos\delta\cos\delta'\sin(\sigma-\sigma'),\\B&=-\sin(\delta+\delta')\sin\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma'),\\C&=\quad\sin(\delta-\delta')\cos\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma');\end{aligned}\right.$$

oder:

$$16)\;\ldots\ldots\left\{\begin{aligned}A&=-\cos\delta\cos\delta'\sin(\sigma'-\sigma),\\B&=\quad\sin(\delta+\delta')\sin\tfrac{1}{2}(\sigma'-\sigma),\\C&=\quad\sin(\delta-\delta')\cos\tfrac{1}{2}(\sigma'-\sigma).\end{aligned}\right.$$

Hiernach ist:

$$\begin{aligned}&A^2+B^2+C^2\\&=\cos\delta^2\cos\delta'^2\sin(\sigma-\sigma')^2+\sin(\delta+\delta')^2\sin\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma')^2+\sin(\delta-\delta')^2\cos\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma')^2\\&=\cos\delta^2\cos\delta'^2\sin(\sigma-\sigma')^2+\sin\delta^2\cos\delta'^2+\cos\delta^2\sin\delta'^2\\&\qquad-2\sin\delta\cos\delta\sin\delta'\cos\delta'\cos(\sigma-\sigma')\\&=\sin\delta^2\sin\delta'^2+\cos\delta^2\cos\delta'^2+\sin\delta^2\cos\delta'^2+\cos\delta^2\sin\delta'^2\\&\quad-\sin\delta^2\sin\delta'^2-2\sin\delta\cos\delta\sin\delta'\cos\delta'^2\cos(\sigma-\sigma')-\cos\delta^2\cos\delta'^2\cos(\sigma-\sigma')^2\\&=1-\{\sin\delta\sin\delta'+\cos\delta\cos\delta'\cos(\sigma-\sigma')\}^2,\end{aligned}$$

also nach 7):

$$17)\;\ldots\ldots\ldots\;A^2+B^2+C^2=\sin\varDelta^2,$$

und folglich, weil $\sin\varDelta$ positiv ist:

$$18)\;\ldots\ldots\ldots\;\sin\varDelta=\sqrt{A^2+B^2+C^2}.$$

Digitized by Google

Wenn man die Grösse

$$\mathfrak{A}A+\mathfrak{B}B+\mathfrak{C}C$$

entwickelt, so findet man leicht, dass im Zähler der Factor von $\sin h$ die Grösse:

$$\begin{aligned}&2(\sin\delta-\sin\delta'\cos\varDelta)\cos\delta\cos\delta'\sin\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma')\cos\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma')\\ &-(\cos\delta-\cos\delta'\cos\varDelta)\sin(\delta+\delta')\sin\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma')\cos\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma')\\ &-(\cos\delta+\cos\delta'\cos\varDelta)\sin(\delta-\delta')\sin\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma')\cos\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma')\end{aligned}$$

ist, nun ist aber:

$$\begin{aligned}&2\sin\delta\cos\delta\cos\delta'-\cos\delta\sin(\delta+\delta')-\cos\delta\sin(\delta-\delta')=0,\\ &-2\cos\delta\sin\delta'\cos\delta'+\cos\delta'\sin(\delta+\delta')-\cos\delta'\sin(\delta-\delta')=0;\end{aligned}$$

und der Factor von $\sin h$ verschwindet also. Der Factor von $\sin h'$ im Zähler ist die Grösse:

$$\begin{aligned}&2(\sin\delta'-\sin\delta\cos\varDelta)\cos\delta\cos\delta'\sin\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma')\cos\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma')\\ &-(\cos\delta'-\cos\delta\cos\varDelta)\sin(\delta+\delta')\sin\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma')\cos\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma')\\ &+(\cos\delta'+\cos\delta\cos\varDelta)\sin(\delta-\delta')\sin\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma')\cos\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma');\end{aligned}$$

nun ist aber:

$$\begin{aligned}&2\cos\delta\sin\delta'\cos\delta'-\cos\delta'\sin(\delta+\delta')+\cos\delta'\sin(\delta-\delta')=0,\\ &-2\sin\delta\cos\delta\cos\delta'+\cos\delta\sin(\delta+\delta')+\cos\delta\sin(\delta-\delta')=0;\end{aligned}$$

und der Factor von $\sin h'$ im Zähler verschwindet also gleichfalls. Daher ist:

19) . . . . $\mathfrak{A}A+\mathfrak{B}B+\mathfrak{C}C=0.$

Nach Thl. XXXVII. Nr. XXII. ist nun, wenn G einen vorläufig noch unbestimmten Factor bezeichnet, zu setzen:

20) . . . . $\begin{cases}x=\mathfrak{A}+GA,\\ y=\mathfrak{B}+GB,\\ z=\mathfrak{C}+GC;\end{cases}$

woraus sich, weil nach 4)

$$x^2+y^2+z^2=1$$

und nach 19)

$$\mathfrak{A}A+\mathfrak{B}B+\mathfrak{C}C=0$$

ist, die Gleichung:

$$\mathfrak{A}^2+\mathfrak{B}^2+\mathfrak{C}^2+G^2(A^2+B^2+C^2)=1,$$

also nach 17):

Digitized by Google

$$21) \ldots\ldots\ldots G^2 = \frac{1-(\mathfrak{A}^2+\mathfrak{B}^2+\mathfrak{C}^2)}{\sin\Delta^2},$$

folglich:

$$22) \ldots\ldots G = \pm\frac{\sqrt{1-(\mathfrak{A}^2+\mathfrak{B}^2+\mathfrak{C}^2)}}{\sin\Delta}$$

ergiebt. Daher hat man nach 20) zur Bestimmung von x, y, z die folgenden Formeln:

$$23) \ldots\ldots \begin{cases} x = \mathfrak{A} \pm A\dfrac{\sqrt{1-(\mathfrak{A}^2+\mathfrak{B}^2+\mathfrak{C}^2)}}{\sin\Delta}, \\ y = \mathfrak{B} \pm B\dfrac{\sqrt{1-(\mathfrak{A}^2+\mathfrak{B}^2+\mathfrak{C}^2)}}{\sin\Delta}, \\ z = \mathfrak{C} \pm C\dfrac{\sqrt{1-(\mathfrak{A}^2+\mathfrak{B}^2+\mathfrak{C}^2)}}{\sin\Delta}, \end{cases}$$

Zur Bestimmung von $\overline{\omega}$ und $\frac{1}{2}(\sigma+\sigma')$ hat man nun nach 3) die folgenden Formeln:

$$24) \ldots \begin{cases} \sin\overline{\omega} = x; \\ \cos\frac{1}{2}(\sigma+\sigma') = \dfrac{y}{\cos\overline{\omega}},\ \sin\frac{1}{2}(\sigma+\sigma') = \dfrac{z}{\cos\overline{\omega}}; \\ \cot\frac{1}{2}(\sigma+\sigma') = \dfrac{y}{z},\ \tang\frac{1}{2}(\sigma+\sigma') = \dfrac{z}{y}. \end{cases}$$

Wegen der doppelten Vorzeichen in 23) lässt die Aufgabe im Allgemeinen zwei Auflösungen zu. Bei der Bestimmung von $\overline{\omega}$ und $\frac{1}{2}(\sigma+\sigma')$ bleibt aber — natürlich für jedes der beiden Vorzeichen in 23) besonders — eine weitere Zweideutigkeit offenbar nicht, wenn man nur beachtet, dass $\overline{\omega}$ zwischen 0 und 90°, und $\frac{1}{2}(\sigma+\sigma')$ zwischen 0 und 360° liegt. Weil man $\sigma-\sigma'$ kennt, so erhält man die Stundenwinkel σ und σ' mittelst der Formeln:

$$25) \ldots\ldots\ldots \begin{cases} \sigma = \frac{1}{2}(\sigma+\sigma')+\frac{1}{2}(\sigma-\sigma'), \\ \sigma' = \frac{1}{2}(\sigma+\sigma')-\frac{1}{2}(\sigma-\sigma'). \end{cases}$$

In allen den Fällen, wo sich nicht analytisch auf irgend eine Art über die in 23) zu nehmenden Zeichen entscheiden lässt, kann dies nur aus den Beobachtungen selbst geschehen; in den meisten Fällen wird es mittelst der berechneten Stundenwinkel σ und σ' leicht möglich sein.

§. 4.

Zwischen den Grössen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ finden verschiedene Gleichungen Statt, die wir jetzt zunächst beweisen wollen.

Digitized by Google

Zuerst haben wir nach §. 3. 19) die Gleichung:

$$\mathfrak{A}A+\mathfrak{B}B+\mathfrak{C}C=0.$$

Führt man in diese Gleichung die Werthe von A, B, C aus §. 3. 15) ein, so wird dieselbe:

$$\mathfrak{A}\cos\delta\cos\delta'-\mathfrak{B}\frac{\sin(\delta+\delta')}{2\cos\frac{1}{2}(\sigma-\sigma')}+\mathfrak{C}\frac{\sin(\delta-\delta')}{2\sin\frac{1}{2}(\sigma-\sigma')}=0.$$

Ferner ist nach §. 3. 11) wie sogleich erhellet:

$$\begin{aligned}
&\{\mathfrak{A}\sin\delta+\mathfrak{B}\cos\delta\cos\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma')-\mathfrak{C}\cos\delta\sin\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma')\}\sin\Delta^2\\
=\ &(\sin\delta^2-\sin\delta\sin\delta'\cos\Delta)\sin h\\
&+\{\cos\delta^2\cos\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma')^2-\cos\delta\cos\delta'\cos\Delta\cos\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma')^2\}\sin h\\
&+\{\cos\delta^2\sin\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma')^2+\cos\delta\cos\delta'\cos\Delta\sin\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma')^2\}\sin h\\
&+(\sin\delta\sin\delta'-\sin\delta^2\cos\Delta)\sin h'\\
&+\{\cos\delta\cos\delta'\cos\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma')^2-\cos\delta^2\cos\Delta\cos\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma')^2\}\sin h'\\
&-\{\cos\delta\cos\delta'\sin\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma')^2+\cos\delta^2\cos\Delta\sin\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma')^2\}\sin h'\\
=\ &\{1-[\sin\delta\sin\delta'+\cos\delta\cos\delta'\cos(\sigma-\sigma')]\cos\Delta\}\sin h\\
&+\{\sin\delta\sin\delta'+\cos\delta\cos\delta'\cos(\sigma-\sigma')-\cos\Delta\}\sin h'\\
=\ &(1-\cos\Delta^2)\sin h=\sin\Delta^2\sin h,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\{\mathfrak{A}\sin\delta'+\mathfrak{B}\cos\delta'\cos\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma')+\mathfrak{C}\cos\delta'\sin\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma')\}\sin\Delta^2\\
=\ &\sin\delta\sin\delta'-\sin\delta'^2\cos\Delta)\sin h\\
&+\{\cos\delta\cos\delta'\cos\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma')^2-\cos\delta'^2\cos\Delta\cos\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma')^2\}\sin h\\
&-\{\cos\delta\cos\delta'\sin\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma')^2+\cos\delta'^2\cos\Delta\sin\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma')^2\}\sin h\\
&+(\sin\delta'^2-\sin\delta\sin\delta'\cos\Delta)\sin h'\\
&+\{\cos\delta'^2\cos\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma')^2-\cos\delta\cos\delta'\cos\Delta\cos\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma')^2\}\sin h'\\
&+\{\cos\delta'^2\sin\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma')^2+\cos\delta\cos\delta'\cos\Delta\sin\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma')^2\}\sin h'\\
=\ &\{\sin\delta\sin\delta'+\cos\delta\cos\delta'\cos(\sigma-\sigma')-\cos\Delta\}\sin h\\
&+\{1-[\sin\delta\sin\delta'+\cos\delta\cos\delta'\cos(\sigma-\sigma')]\cos\Delta\}\sin h'\\
=\ &(1-\cos\Delta^2)\sin h'=\sin\Delta^2\sin h'.
\end{aligned}$$

Also haben wir zwischen $\mathfrak{A}$ $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ die drei folgenden Gleichungen des ersten Grades.

1)

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{A}\cos\delta\cos\delta'-\mathfrak{B}\frac{\sin(\delta+\delta')}{2\cos\frac{1}{2}(\sigma-\sigma')}+\mathfrak{C}\frac{\sin(\delta-\delta')}{2\sin\frac{1}{2}(\sigma-\sigma')}=0,\\
&\mathfrak{A}\sin\delta+\mathfrak{B}\cos\delta\cos\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma')-\mathfrak{C}\cos\delta\sin\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma')=\sin h,\\
&\mathfrak{A}\sin\delta'+\mathfrak{B}\cos\delta'\cos\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma')+\mathfrak{C}\cos\delta'\sin\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma')=\sin h'
\end{aligned}$$

oder:

Digitized by Google

2)

$$\mathfrak{B}\frac{\sin(\delta+\delta')}{2\cos\delta\cos\delta'\cos\frac{1}{2}(\sigma-\sigma')}+\mathfrak{C}\frac{\sin(\delta-\delta')}{2\cos\delta\cos\delta'\sin\frac{1}{2}(\sigma-\sigma')}=0,$$

$$\mathfrak{A}-\mathfrak{B}\cot\delta\cos\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma')-\mathfrak{C}\cot\delta\sin\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma')=\frac{\sin h}{\sin\delta},$$

$$\mathfrak{A}-\mathfrak{B}\cot\delta'\cos\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma')+\mathfrak{C}\cot\delta'\sin\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma')=\frac{\sin h'}{\sin\delta'}.$$

Aus der zweiten und dritten der Gleichungen 1) erhält man leicht:

3)

$$\mathfrak{A}\sin(\delta+\delta')+2\mathfrak{B}\cos\delta\cos\delta'\cos\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma')=\sin h\cos\delta'+\sin h'\cos\delta,$$

$$\mathfrak{A}\sin(\delta-\delta')-2\mathfrak{C}\cos\delta\cos\delta'\sin\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma')=\sin h\cos\delta'-\sin h'\cos\delta,$$

$$-\mathfrak{B}\sin(\delta-\delta')\cos\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma')-\mathfrak{C}\sin(\delta+\delta')\sin\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma')=\sin h\sin\delta'-\sin h'\sin\delta.$$

Nach §. 3. 11) ist nun, wenn man

$$(\mathfrak{A}^2+\mathfrak{B}^2+\mathfrak{C}^2)\sin\Delta^2=(\mathfrak{A}\mathfrak{A}+\mathfrak{B}\mathfrak{B}+\mathfrak{C}\mathfrak{C})\sin\Delta^2$$

setzt, wie sogleich in die Augen fallen wird:

$$(\mathfrak{A}^2+\mathfrak{B}^2+\mathfrak{C}^2)\sin\Delta^2$$

$$=\left\{\begin{array}{l}\mathfrak{A}\sin\delta+\mathfrak{B}\cos\delta\cos\frac{1}{2}(\sigma-\sigma')-\mathfrak{C}\cos\delta\sin\frac{1}{2}(\sigma-\sigma')\\-[\mathfrak{A}\sin\delta'+\mathfrak{B}\cos\delta'\cos\frac{1}{2}(\sigma-\sigma')+\mathfrak{C}\cos\delta'\sin\frac{1}{2}(\sigma-\sigma')]\cos\Delta\end{array}\right\}\sin h$$

$$+\left\{\begin{array}{l}\mathfrak{A}\sin\delta'+\mathfrak{B}\cos\delta'\cos\frac{1}{2}(\sigma-\sigma')+\mathfrak{C}\cos\delta'\sin\frac{1}{2}(\sigma-\sigma')\\-[\mathfrak{A}\sin\delta+\mathfrak{B}\cos\delta\cos\frac{1}{2}(\sigma-\sigma')-\mathfrak{C}\cos\delta\sin\frac{1}{2}(\sigma-\sigma')]\cos\Delta\end{array}\right\}\sin h'$$

also nach 1):

$$(\mathfrak{A}^2+\mathfrak{B}^2+\mathfrak{C}^2)\sin\Delta^2$$

$$=(\sin h-\sin h'\cos\Delta)\sin h+(\sin h'-\sin h\cos\Delta)\sin h'$$

$$=\sin h^2+\sin h'^2-2\sin h\sin h'\cos\Delta$$

$$=(\sin h\pm\sin h')^2\mp 2\sin h\sin h'(1\pm\cos\Delta),$$

und folglich:

4) $$\mathfrak{A}^2+\mathfrak{B}^2+\mathfrak{C}^2$$

$$=\frac{\sin h^2+\sin h'^2-2\sin h\sin h'\cos\Delta}{\sin\Delta^2}$$

$$=\frac{4\{\sin\frac{1}{2}(h+h')^2\cos\frac{1}{2}(h-h')^2-\sin h\sin h'\cos\frac{1}{2}\Delta^2\}}{\sin\Delta^2}$$

$$=\frac{4\{\sin\frac{1}{2}(h-h')^2\cos\frac{1}{2}(h+h')^2+\sin h\sin h'\sin\frac{1}{2}\Delta^2\}}{\sin\Delta^2}$$

Auch ist:

Digitized by Google

$$(\mathfrak{A}^2+\mathfrak{B}^2+\mathfrak{C}^2)\sin\varDelta^2$$
$$=(\sin h^2+\sin h'^2)(\cos\tfrac{1}{2}\varDelta^2+\sin\tfrac{1}{2}\varDelta^2)-2\sin h\sin h'(\cos\tfrac{1}{2}\varDelta^2-\sin\tfrac{1}{2}\varDelta^2)$$
$$=(\sin h-\sin h')^2\cos\tfrac{1}{2}\varDelta^2+(\sin h+\sin h')^2\sin\tfrac{1}{2}\varDelta^2$$
$$=4\{\sin\tfrac{1}{2}(h-h')^2\cos\tfrac{1}{2}(h+h')^2\cos\tfrac{1}{2}\varDelta^2+\sin\tfrac{1}{2}(h+h')^2\cos\tfrac{1}{2}(h-h')^2\sin\tfrac{1}{2}\varDelta^2\}$$
$$=4\sin\tfrac{1}{2}(h-h')^2\cos\tfrac{1}{2}(h+h')^2\cos\tfrac{1}{2}\varDelta^2\{1+\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(h+h')^2\cot\tfrac{1}{2}(h-h')^2\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\varDelta^2\},$$

und folglich:

5) $$\mathfrak{A}^2+\mathfrak{B}^2+\mathfrak{C}^2$$
$$=\frac{\sin\tfrac{1}{2}(h-h')^2\cos\tfrac{1}{2}(h+h')^2\{1+\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(h+h')^2\cot\tfrac{1}{2}(h-h')^2\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\varDelta^2\}}{\sin\tfrac{1}{2}\varDelta^2},$$

was man noch weiter würde umgestalten können.

Nach §. 3. 21) und vorher 4) ist:

$$G^2=\frac{1}{\sin\varDelta^2}\left\{1-\frac{\sin h^2+\sin h'^2-2\sin h\sin h'\cos\varDelta}{\sin\varDelta^2}\right\}$$
$$=\frac{\sin\varDelta^2-\sin h^2-\sin h'^2+2\sin h\sin h'\cos\varDelta}{\sin\varDelta^4},$$

und weil nun:

$$\sin\varDelta^2-\sin h^2-\sin h'^2+2\sin h\sin h'\cos\varDelta$$
$$=1-\sin h^2-\sin h'^2+\sin h^2\sin h'^2$$
$$-\{\cos\varDelta^2-2\sin h\sin h'\cos\varDelta+\sin h^2\sin h'^2\}$$
$$=(1-\sin h^2)(1-\sin h'^2)-(\cos\varDelta-\sin h\sin h')^2$$
$$=\cos h^2\cos h'^2-(\cos\varDelta-\sin h\sin h')^2$$
$$=(\cos h\cos h'-\sin h\sin h'+\cos\varDelta)(\cos h\cos h'+\sin h\sin h'-\cos\varDelta)$$
$$=\{\cos(h+h')+\cos\varDelta\}\{\cos(h-h')-\cos\varDelta\}$$
$$=-4\cos\tfrac{1}{2}(h+h'+\varDelta)\cos\tfrac{1}{2}(h+h'-\varDelta)\sin\tfrac{1}{2}(h-h'+\varDelta)\sin\tfrac{1}{2}(h-h'\varDelta)$$

ist, so ist:

6)
$$G^2=-\frac{4\cos\tfrac{1}{2}(h+h'+\varDelta)\cos\tfrac{1}{2}(h+h'-\varDelta)\sin\tfrac{1}{2}(h-h'+\varDelta)\sin\tfrac{1}{2}(h-h'-\varDelta}{\sin\varDelta^4}$$

also:

7)
$$G=\pm\frac{2\sqrt{-\cos\tfrac{1}{2}(h+h'+\varDelta)\cos\tfrac{1}{2}(h+h'-\varDelta)\sin\tfrac{1}{2}(h-h'+\varDelta)\sin\tfrac{1}{2}(h-h'-\varDelta)}}{\sin\varDelta^2},$$

mittelst welcher Formel G sehr leich berechnet werden kann.

Zur Berechnung von $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ selbst kann man sich einiger Hülfswinkel bedienen. Setzt man nämlich:

Digitized by Google

$$8) \quad \ldots\ldots \quad \begin{cases} \sin\xi = \sin\delta'\cos\varDelta, \sin\xi' = \sin\delta\cos\varDelta; \\ \cos\zeta = \cos\delta'\cos\varDelta, \cos\zeta' = \cos\delta\cos\varDelta; \end{cases}$$

so ist nach §. 3. 11) offenbar:

9)

$$\mathfrak{A} = 2\frac{\sin\frac{1}{2}(\delta-\xi)\cos\frac{1}{2}(\delta+\xi)\sin h + \sin\frac{1}{2}(\delta'-\xi')\cos\frac{1}{2}(\delta'+\xi')\sin h'}{\sin\varDelta^2},$$

$$\mathfrak{B} = -2\frac{\sin\frac{1}{2}(\delta-\zeta)\sin\frac{1}{2}(\delta+\zeta)\sin h + \sin\frac{1}{2}(\delta'-\zeta')\sin\frac{1}{2}(\delta'+\zeta')\sin h'}{\sin\varDelta^2}\cos\frac{1}{2}(\sigma-\sigma'),$$

$$\mathfrak{C} = -2\frac{\cos\frac{1}{2}(\delta-\zeta)\cos\frac{1}{2}(\delta+\zeta)\sin h - \cos\frac{1}{2}(\delta'-\zeta')\cos\frac{1}{2}(\delta'+\zeta')\sin h'}{\sin\varDelta^2}\sin\frac{1}{2}(\sigma-\sigma').$$

§. 5.

Eine merkwürdige völlig entwickelte Formel zur Bestimmung der Polhöhe ϖ lässt sich nun mittelst des Vorhergehenden leicht auf folgende Art finden.

Nach §. 3. 24) ist:

$$\sin\varpi = x,$$

folglich nach §. 3. 20):

$$\sin\varpi = \mathfrak{A} + GA;$$

also nach §. 3. 13), 14), 15) und §. 4. 7):

$$1) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \sin\varDelta^2\sin\varpi$$

$$= \sin\delta\sin h + \sin\delta'\sin h' - (\sin\delta\sin h' + \sin\delta'\sin h)\cos\varDelta$$
$$\pm 2\cos\delta\cos\delta'\sin(\sigma-\sigma')$$
$$\times\sqrt{-\cos\frac{1}{2}(h+h'+\varDelta)\cos\frac{1}{2}(h+h'-\varDelta)\sin\frac{1}{2}(h-h'+\varDelta)\sin\frac{1}{2}(h-h')-\varDelta)},$$

oder:

$$2) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \sin\varDelta^2\sin\varpi$$

$$= \cos\delta\sin h'\{\cos\delta\sin\delta' - \sin\delta\cos\delta'\cos(\sigma-\sigma')\}$$
$$+ \cos\delta'\sin h\{\sin\delta\cos\delta' - \cos\delta\sin\delta'\cos(\sigma-\sigma')\}$$
$$\pm 2\cos\delta\cos\delta'\sin(\sigma-\sigma')$$
$$\times\sqrt{-\cos\frac{1}{2}(h+h'+\varDelta)\cos\frac{1}{2}(h+h'-\varDelta)\sin\frac{1}{2}(h-h'+\varDelta)\sin\frac{1}{2}(h-h'-\varDelta)}.$$

Durch Einführung von Hülfswinkeln würde sich die Rechnung nach diesen Formeln auf verschiedene Arten erleichtern lassen, was wir hier, als sich leicht von selbst ergebend, nicht weiter ausführen wollen.

Digitized by Google

§. 6.

Zu weiteren Entwickelungen übergehend, bemerken wir zuerst die folgenden Relationen:

Es ist:

$$(\cos\delta+\cos\delta'\cos\varDelta)\sin h-(\cos\delta'+\cos\delta\cos\varDelta)\sin h'$$
$$=\{(\cos\delta+\cos\delta'\cos\varDelta)-(\cos\delta'+\cos\delta\cos\varDelta)\}\sin h$$
$$+(\cos\delta'+\cos\delta\cos\varDelta)(\sin h-\sin h')$$
$$=(\cos\delta+\cos\delta'\cos\varDelta)(\sin h-\sin h')$$
$$+\{(\cos\delta+\cos\delta'\cos\varDelta)-(\cos\delta'+\cos\delta\cos\varDelta)\}\sin h',$$

und folglich, weil:

$$(\cos\delta+\cos\delta'\cos\varDelta)-(\cos\delta'+\cos\delta\cos\varDelta)$$
$$=(\cos\delta-\cos\delta')(1-\cos\varDelta)$$
$$=-4\sin\tfrac{1}{2}(\delta-\delta')\sin\tfrac{1}{2}(\delta+\delta')\sin\tfrac{1}{2}\varDelta^2$$

ist:

$$(\cos\delta+\cos\delta'\cos\varDelta)\sin h-(\cos\delta'+\cos\delta\cos\varDelta)\sin h'$$
$$=-4\sin\tfrac{1}{2}(\delta-\delta')\sin\tfrac{1}{2}(\delta+\delta')\sin h\sin\tfrac{1}{2}\varDelta^2$$
$$+2(\cos\delta'+\cos\delta\cos\varDelta)\sin\tfrac{1}{2}(h-h')\cos\tfrac{1}{2}(h+h')$$
$$=-4\sin\tfrac{1}{2}(\delta-\delta')\sin\tfrac{1}{2}(\delta+\delta')\sin h'\sin\tfrac{1}{2}\varDelta^2$$
$$+2(\cos\delta+\cos\delta'\cos\varDelta)\sin\tfrac{1}{2}(h-h')\cos\tfrac{1}{2}(h+h').$$

Addirt man nun diese beiden Ausdrücke einer und derselben Grösse zusammen, so erhält man, weil

$$(\cos\delta+\cos\delta'\cos\varDelta)+(\cos\delta'+\cos\delta\cos\varDelta)$$
$$=(\cos\delta+\cos\delta')(1+\cos\varDelta)$$
$$=4\cos\tfrac{1}{2}(\delta-\delta')\cos\tfrac{1}{2}(\delta+\delta')\cos\tfrac{1}{2}\varDelta^2$$

ist, nachdem man mit 2 dividirt hat, die folgende Formel:

1) . . . $(\cos\delta+\cos\delta'\cos\varDelta)\sin h-(\cos\delta'+\cos\delta\cos\varDelta)\sin h'$
$$=-4\sin\tfrac{1}{2}(\delta-\delta')\sin\tfrac{1}{2}(\delta+\delta')\cos\tfrac{1}{2}(h-h')\sin\tfrac{1}{2}(h+h')\sin\tfrac{1}{2}\varDelta^2$$
$$+4\cos\tfrac{1}{2}(\delta-\delta')\cos\tfrac{1}{2}(\delta+\delta')\sin\tfrac{1}{2}(h-h')\cos\tfrac{1}{2}(h+h')\cos\tfrac{1}{2}\varDelta^2.$$

Ferner ist:

$$(\cos\delta-\cos\delta'\cos\varDelta)\sin h+(\cos\delta'-\cos\delta\cos\varDelta)\sin h'$$
$$=\{(\cos\delta-\cos\delta'\cos\varDelta)+(\cos\delta'-\cos\delta\cos\varDelta)\}\sin h$$
$$-(\cos\delta'-\cos\delta\cos\varDelta)(\sin h-\sin h')$$
$$=(\cos\delta-\cos\delta'\cos\varDelta)(\sin h-\sin h')$$
$$+\{(\cos\delta-\cos\delta'\cos\varDelta)+(\cos\delta'-\cos\delta\cos\varDelta)\}\sin h',$$

und folglich, weil:

Digitized by Google

$$(\cos\delta-\cos\delta'\cos\varDelta)+(\cos\delta'-\cos\delta\cos\varDelta)$$
$$=(\cos\delta+\cos\delta')(1-\cos\varDelta)$$
$$=4\cos\tfrac{1}{2}(\delta-\delta')\cos\tfrac{1}{2}(\delta+\delta')\sin\tfrac{1}{2}\varDelta^2$$

ist:

$$(\cos\delta-\cos\delta'\cos\varDelta)\sin h+(\cos\delta'-\cos\delta\cos\varDelta)\sin h'$$
$$=4\cos\tfrac{1}{2}(\delta-\delta')\cos\tfrac{1}{2}(\delta+\delta')\sin h\sin\tfrac{1}{2}\varDelta^2$$
$$-2(\cos\delta'-\cos\delta\cos\varDelta)\sin\tfrac{1}{2}(h-h')\cos\tfrac{1}{2}(h+h')$$
$$=4(\cos\tfrac{1}{2}(\delta-\delta')\cos\tfrac{1}{2}(\delta+\delta')\sin h'\sin\tfrac{1}{2}\varDelta^2$$
$$+2(\cos\delta-\cos\delta'\cos\varDelta)\sin\tfrac{1}{2}(h-h')\cos\tfrac{1}{2}(h+h').$$

Addirt man diese beiden Ausdrücke einer und derselben Grösse zusammen, so erhält man, weil

$$(\cos\delta-\cos\delta'\cos\varDelta)-(\cos\delta'-\cos\delta\cos\varDelta)$$
$$=(\cos\delta-\cos\delta')(1+\cos\varDelta)$$
$$=-4\sin\tfrac{1}{2}(\delta-\delta')\sin\tfrac{1}{2}(\delta+\delta')\cos\tfrac{1}{2}\varDelta^2$$

ist, nachdem man mit 2 dividirt hat, die folgende Formel:

2) . . . $(\cos\delta-\cos\delta'\cos\varDelta)\sin h+(\cos\delta'-\cos\delta\cos\varDelta)\sin h'$
$$=4\cos\tfrac{1}{2}(\delta-\delta')\cos\tfrac{1}{2}(\delta+\delta')\cos\tfrac{1}{2}(h-h')\sin\tfrac{1}{2}(h+h')\sin\tfrac{1}{2}\varDelta^2$$
$$-4\sin\tfrac{1}{2}(\delta-\delta')\sin\tfrac{1}{2}(\delta+\delta')\sin\tfrac{1}{2}(h-h')\cos\tfrac{1}{2}(h+h')\cos\tfrac{1}{2}\varDelta^2.$$

Ferner ist:

$$(\sin\delta-\sin\delta'\cos\varDelta)\sin h+(\sin\delta'-\sin\delta\cos\varDelta)\sin h'$$
$$=\{(\sin\delta-\sin\delta'\cos\varDelta)+(\sin\delta'-\sin\delta\cos\varDelta)\}\sin h$$
$$-(\sin\delta'-\sin\delta\cos\varDelta)(\sin h-\sin h')$$
$$=(\sin\delta-\sin\delta'\cos\varDelta)(\sin h-\sin h')$$
$$+\{(\sin\delta-\sin\delta'\cos\varDelta)+(\sin\delta'-\sin\delta\cos\varDelta)\}\sin h',$$

und folglich, weil:

$$(\sin\delta-\sin\delta'\cos\varDelta)+(\sin\delta'-\sin\delta\cos\varDelta)$$
$$=(\sin\delta+\sin\delta')(1-\cos\varDelta)$$
$$=4\cos\tfrac{1}{2}(\delta-\delta')\sin\tfrac{1}{2}(\delta+\delta')\sin\tfrac{1}{2}\varDelta^2$$

ist:

$$(\sin\delta-\sin\delta'\cos\varDelta)\sin h+(\sin\delta'-\sin\delta\cos\varDelta)\sin h'$$
$$=4\cos\tfrac{1}{2}(\delta-\delta')\sin\tfrac{1}{2}(\delta+\delta')\sin h\sin\tfrac{1}{2}\varDelta^2$$
$$-2(\sin\delta'-\sin\delta\cos\varDelta)\sin\tfrac{1}{2}(h-h')\cos\tfrac{1}{2}(h+h')$$
$$=4\cos\tfrac{1}{2}(\delta-\delta')\sin\tfrac{1}{2}(\delta+\delta')\sin h'\sin\tfrac{1}{2}\varDelta^2$$
$$+2(\sin\delta-\sin\delta'\cos\varDelta)\sin\tfrac{1}{2}(h-h')\cos\tfrac{1}{2}(h+h').$$

Digitized by Google

Addirt man diese beiden Ausdrücke einer und derselben Grösse zusammen, so erhält man, weil

$$\begin{aligned}&(\sin\delta-\sin\delta'\cos\varDelta)-(\sin\delta'-\sin\delta\cos\varDelta)\\ =&(\sin\delta-\sin\delta')(1+\cos\varDelta)\\ =&4\sin\tfrac{1}{2}(\delta-\delta')\cos\tfrac{1}{2}(\delta+\delta')\cos\tfrac{1}{2}\varDelta^2\end{aligned}$$

ist, nachdem man durch 2 dividirt hat, die Formel:

$$\begin{aligned}3)\ldots.\ &(\sin\delta-\sin\delta'\cos\varDelta)\sin h+(\sin\delta'-\sin\delta\cos\varDelta)\sin h'\\ =\ &4\cos\tfrac{1}{2}(\delta-\delta')\sin\tfrac{1}{2}(\delta+\delta')\cos\tfrac{1}{2}(h-h')\sin\tfrac{1}{2}(h+h')\sin\tfrac{1}{2}\varDelta^2\\ &+4\sin\tfrac{1}{2}(\delta-\delta')\cos\tfrac{1}{2}(\delta+\delta')\sin\tfrac{1}{2}(h-h')\cos\tfrac{1}{2}(h+h')\cos\tfrac{1}{2}\varDelta^2.\end{aligned}$$

Nach §. 3. 20), 24) ist:

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\sigma+\sigma')=\frac{\mathfrak{C}+GC}{\mathfrak{B}+GB},$$

und setzen wir nun:

4)

$$G_1=\pm\sqrt{-\cos\tfrac{1}{2}(h+h'+\varDelta)\cos\tfrac{1}{2}(h+h'-\varDelta)\sin\tfrac{1}{2}(h-h'+\varDelta)\sin\tfrac{1}{2}(h-h'-\varDelta)},$$

nach §. 4. 7) also:

$$G=\frac{2G_1}{\sin\varDelta^2},$$

so ist nach §. 3. 12), 16):

$$\begin{aligned}&\mathfrak{C}+GC\\ =&\frac{(\cos\delta+\cos\delta'\cos\varDelta)\sin h-(\cos\delta'+\cos\delta\cos\varDelta)\sin h}{\sin\varDelta^2}\sin\tfrac{1}{2}(\sigma'-\sigma)\\ &+\frac{2G_1}{\sin\varDelta^2}\sin(\delta-\delta')\cos\tfrac{1}{2}(\sigma'-\sigma),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\mathfrak{B}+GB\\ =&\frac{(\cos\delta-\cos\delta'\cos\varDelta)\sin h+(\cos\delta'-\cos\delta\cos\varDelta)\sin h'}{\sin\varDelta^2}\cos\tfrac{1}{2}(\sigma'-\sigma)\\ &+\frac{2G_1}{\sin\varDelta^2}\sin(\delta+\delta')\sin\tfrac{1}{2}(\sigma'-\sigma);\end{aligned}$$

also nach 1) und 2):

$$\begin{aligned}&\mathfrak{C}+GC\\ =&\frac{4}{\sin\varDelta^2}\left\{\begin{aligned}&\sin\tfrac{1}{2}(\delta-\delta')\sin\tfrac{1}{2}(\delta+\delta')\cos\tfrac{1}{2}(h-h')\sin\tfrac{1}{2}(h+h')\sin\tfrac{1}{2}\varDelta^2\\ &+\cos\tfrac{1}{2}(\delta-\delta')\cos\tfrac{1}{2}(\delta+\delta')\sin\tfrac{1}{2}(h-h')\cos\tfrac{1}{2}(h+h')\cos\tfrac{1}{2}\varDelta^2\end{aligned}\right\}\sin\tfrac{1}{2}(\sigma'-\sigma)\\ &+\frac{2G_1}{\sin\varDelta^2}\sin(\delta-\delta')\cos\tfrac{1}{2}(\sigma'-\sigma),\end{aligned}$$

Digitized by Google

$$\mathfrak{B}+GB$$

$$=\frac{4}{\sin\varDelta^2}\left\{\begin{array}{l}\cos\tfrac{1}{2}(\delta-\delta')\cos\tfrac{1}{2}(\delta+\delta')\cos\tfrac{1}{2}(h-h')\sin\tfrac{1}{2}(h+h')\sin\tfrac{1}{2}\varDelta^2\\-\sin\tfrac{1}{2}(\delta-\delta')\sin\tfrac{1}{2}(\delta+\delta')\sin\tfrac{1}{2}(h-h')\cos\tfrac{1}{2}(h+h')\cos\tfrac{1}{2}\varDelta^2\end{array}\right\}\cos\tfrac{1}{2}(\sigma'-$$

$$+\frac{2G_1}{\sin\varDelta^2}\sin(\delta+\delta')\sin\tfrac{1}{2}(\sigma'-\sigma).$$

Setzt man nun:

5)

$$Z=\left\{\begin{array}{l}-\sin\tfrac{1}{2}(\delta-\delta')\sin\tfrac{1}{2}(\delta+\delta')\cos\tfrac{1}{2}(h-h')\sin\tfrac{1}{2}(h+h')\sin\tfrac{1}{2}\varDelta^2\\+\cos\tfrac{1}{2}(\delta-\delta')\cos\tfrac{1}{2}(\delta+\delta')\sin\tfrac{1}{2}(h-h')\cos\tfrac{1}{2}(h+h')\cos\tfrac{1}{2}\varDelta^2\end{array}\right\}\mathrm{tang}\tfrac{1}{2}(\sigma'-$$

$$+G_1\sin\tfrac{1}{2}(\delta-\delta')\cos\tfrac{1}{2}(\delta-\delta'),$$

$$N=\left\{\begin{array}{l}\cos\tfrac{1}{2}(\delta-\delta')\cos\tfrac{1}{2}(\delta+\delta')\cos\tfrac{1}{2}(h-h')\sin\tfrac{1}{2}(h+h')\sin\tfrac{1}{2}\varDelta^2\\-\sin\tfrac{1}{2}(\delta-\delta')\sin\tfrac{1}{2}(\delta+\delta')\sin\tfrac{1}{2}(h-h')\cos\tfrac{1}{2}(h+h')\cos\tfrac{1}{2}\varDelta^2\end{array}\right.$$

$$+G_1\sin\tfrac{1}{2}(\delta+\delta')\cos\tfrac{1}{2}(\delta+\delta')\,\mathrm{tang}\tfrac{1}{2}(\sigma'-\sigma);$$

so kann man nach dem Obigen offenbar:

$$6)\quad\ldots\ldots\ldots\quad \mathrm{tang}\tfrac{1}{2}(\sigma+\sigma')=\frac{Z}{N}$$

setzen.

Setzen wir nun:

$$7)\quad\ldots\ldots\ldots\quad G'=\tfrac{1}{2}G_1$$

$$=\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{-\cos\tfrac{1}{2}(h+h'+\varDelta)\cos\tfrac{1}{2}(h+h'-\varDelta)\sin\tfrac{1}{2}(h-h'+\varDelta)\sin\tfrac{1}{2}(h-h'-}$$

so ist:

$$Z=\sin\tfrac{1}{2}(\delta-\delta')\left\{\begin{array}{l}G'\cos\tfrac{1}{2}(\delta-\delta')\\-\sin\tfrac{1}{2}(\delta+\delta')\cos\tfrac{1}{2}(h-h')\sin\tfrac{1}{2}(h+h')\sin\tfrac{1}{2}\varDelta^2\,\mathrm{tang}\tfrac{1}{2}(\sigma'-\sigma\end{array}\right.$$

$$+\cos\tfrac{1}{2}(\delta-\delta')\left\{\begin{array}{l}G'\sin\tfrac{1}{2}(\delta-\delta')\\+\cos\tfrac{1}{2}(\delta+\delta')\sin\tfrac{1}{2}(h-h')\cos\tfrac{1}{2}(h+h')\cos\tfrac{1}{2}\varDelta^2\,\mathrm{tang}\tfrac{1}{2}(\sigma'-\sigma)\end{array}\right.$$

$$N=\cos\tfrac{1}{2}(\delta+\delta')\left\{\begin{array}{l}G'\sin\tfrac{1}{2}(\delta+\delta')\,\mathrm{tang}\tfrac{1}{2}(\sigma'-\sigma)\\+\cos\tfrac{1}{2}(\delta-\delta')\cos\tfrac{1}{2}(h-h')\sin\tfrac{1}{2}(h+h')\sin\tfrac{1}{2}\varDelta^2\end{array}\right\}$$

$$+\sin\tfrac{1}{2}(\delta+\delta')\left\{\begin{array}{l}G'\cos\tfrac{1}{2}(\delta+\delta')\,\mathrm{tang}\tfrac{1}{2}(\sigma'-\sigma)\\-\sin\tfrac{1}{2}(\delta-\delta')\sin\tfrac{1}{2}(h-h')\cos\tfrac{1}{2}(h+h')\cos\tfrac{1}{2}\varDelta^2\end{array}\right\}$$

Setzen wir nun aber:

$$8)\quad\ldots\quad\left\{\begin{array}{l}\mathrm{tang}\,u=\dfrac{G'}{\cos\tfrac{1}{2}(h-h')\sin\tfrac{1}{2}(h+h')\sin\tfrac{1}{2}\varDelta^2},\\[2ex]\mathrm{tang}\,v=\dfrac{\sin\tfrac{1}{2}(\delta+\delta')\,\mathrm{tang}\tfrac{1}{2}(\sigma'-\sigma)}{\cos\tfrac{1}{2}(\delta-\delta')};\\[2ex]\mathrm{tang}\,u'=\dfrac{G'}{\sin\tfrac{1}{2}(h-h')\cos\tfrac{1}{2}(h+h')\cos\tfrac{1}{2}\varDelta^2},\\[2ex]\mathrm{tang}\,v'=\dfrac{\cos\tfrac{1}{2}(\delta+\delta')\,\mathrm{tang}\tfrac{1}{2}(\sigma'-\sigma)}{\sin\tfrac{1}{2}(\delta-\delta')};\end{array}\right.$$

Digitized by Google

so ist offenbar:

$$Z=\sin\tfrac{1}{2}(\delta-\delta')\cos\tfrac{1}{2}(\delta-\delta')\cos\tfrac{1}{2}(h-h')\sin\tfrac{1}{2}(h+h')\sin\tfrac{1}{2}\varDelta^2(\mathrm{tang}\,u-\mathrm{tang}\,v)$$
$$+\sin\tfrac{1}{2}(\delta-\delta')\cos\tfrac{1}{2}(\delta-\delta')\sin\tfrac{1}{2}(h-h')\cos\tfrac{1}{2}(h+h')\cos\tfrac{1}{2}\varDelta^2(\mathrm{tang}\,u'+\mathrm{tang}\,v'),$$

$$N=\cos\tfrac{1}{2}(\delta+\delta')\cos\tfrac{1}{2}(\delta-\delta')\cos\tfrac{1}{2}(h-h')\sin\tfrac{1}{2}(h+h')\sin\tfrac{1}{2}\varDelta^2(\mathrm{tang}\,u\,\mathrm{tang}\,v+1)$$
$$+\sin\tfrac{1}{2}(\delta+\delta')\sin\tfrac{1}{2}(\delta-\delta')\sin\tfrac{1}{2}(h-h')\cos\tfrac{1}{2}(h+h')\cos\tfrac{1}{2}\varDelta^2(\mathrm{tang}\,u'\,\mathrm{tang}\,v'-1),$$

also:

9)

$$Z=\sin\tfrac{1}{2}(\delta-\delta')\cos\tfrac{1}{2}(\delta-\delta')\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\cos\frac{1}{2}(h-h')\sin\frac{1}{2}(h+h')\sin\frac{1}{2}\varDelta^2\sin(u-v)}{\cos u\cos v}\\[2ex] +\dfrac{\sin\frac{1}{2}(h-h')\cos\frac{1}{2}(h+h')\cos\frac{1}{2}\varDelta^2\sin(u'-v')}{\cos u'\cos v'}\end{array}\right\},$$

$$N=\cos\tfrac{1}{2}(\delta+\delta')\cos\tfrac{1}{2}(\delta-\delta')\frac{\cos\frac{1}{2}(h-h')\sin\frac{1}{2}(h+h')\sin\frac{1}{2}\varDelta^2\cos(u-v)}{\cos u\cos v}$$
$$-\sin\tfrac{1}{2}(\delta+\delta')\sin\tfrac{1}{2}(\delta-\delta')\frac{\sin(h-h')\cos\frac{1}{2}(h+h')\cos\frac{1}{2}\varDelta^2\cos(u'+v')}{\cos u'\cos v'}.$$

Nach 8) ist aber:

$$\cos\tfrac{1}{2}(h-h')\sin\tfrac{1}{2}(h+h')\sin\tfrac{1}{2}\varDelta^2=\frac{G'}{\mathrm{tang}\,u},$$

$$\sin\tfrac{1}{2}(h-h')\cos\tfrac{1}{2}(h+h')\cos\tfrac{1}{2}\varDelta^2=\frac{G'}{\mathrm{tang}\,u'};$$

$$\cos\tfrac{1}{2}(\delta+\delta')=\sin\tfrac{1}{2}(\delta-\delta')\,\mathrm{tang}\,v'\cot\tfrac{1}{2}(\sigma'-\sigma),$$
$$\sin\tfrac{1}{2}(\delta+\delta')=\cos\tfrac{1}{2}(\delta-\delta')\,\mathrm{tang}\,v\cot\tfrac{1}{2}(\sigma'-\sigma);$$

also offenbar:

10)

$$Z=G'\sin\tfrac{1}{2}(\delta-\delta')\cos\tfrac{1}{2}(\delta-\delta')\left\{\frac{\sin(u-v)}{\mathrm{tang}\,u\cos u\cos v}+\frac{\sin(u'+v')}{\mathrm{tang}\,u'\cos u'\cos v'}\right\},$$

$$N=\frac{G'\sin\frac{1}{2}(\delta-\delta')\cos\frac{1}{2}(\delta-\delta')}{\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}(\sigma'-\sigma)}\left\{\frac{\mathrm{tang}\,v'\cos(u-v)}{\mathrm{tang}\,u\cos u\cos v}-\frac{\mathrm{tang}\,v\cos(u'+v')}{\mathrm{tang}\,u'\cos u'\cos v'}\right\};$$

und daher nach 6):

$$11)\;\ldots\;\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}(\sigma'+\sigma)=\frac{\dfrac{\sin(u-v)}{\sin u\cos v}+\dfrac{\sin(u'+v')}{\sin u'\cos v'}}{\dfrac{\mathrm{tang}\,v'\cos(u-v)}{\sin u\cos v}-\dfrac{\mathrm{tang}\,v\cos(u'+v')}{\sin u'\cos v'}},$$

oder:

$$12)\;\ldots\;\frac{\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}(\sigma'+\sigma)}{\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}(\sigma'-\sigma)}=\frac{\dfrac{\cos v'\sin(u-v)}{\sin u}+\dfrac{\cos v\sin(u'+v')}{\sin u'}}{\dfrac{\sin v'\cos(u-v)}{\sin u}-\dfrac{\sin v\cos(u'+v')}{\sin u'}},$$

Digitized by Google

oder:

$$13) \ldots \frac{\tan\frac{1}{2}(\sigma'+\sigma)}{\tan\frac{1}{2}(\sigma'-\sigma)}=\frac{\sin u'\cos v'\sin(u-v)+\sin u\cos v\sin(u'+v')}{\sin u'\sin v'\cos(u-v)-\sin u\sin v\cos(u'+v')},$$

oder:

$$14) \ldots \frac{\tan\frac{1}{2}(\sigma'+\sigma)}{\tan\frac{1}{2}(\sigma'-\sigma)}=\cot v\cot v'.\frac{\dfrac{\sin(u-v)}{\sin u\cos v}+\dfrac{\sin(u'+v')}{\sin u'\cos v'}}{\dfrac{\cos(u-v)}{\sin u\sin v}-\dfrac{\cos(u'+v')}{\sin u'\sin v'}},$$

oder auch:

$$15) \ldots \frac{\tan\frac{1}{2}(\sigma'+\sigma)}{\tan\frac{1}{2}(\sigma'-\sigma)}=\cot v\cot v'.\frac{2-(\cot u\tan v-\cot u'\tan v')}{2+(\cot u\cot v-\cot u'\cot v')};$$

jedenfalls sehr elegante und die Rechnung sehr erleichternde Formeln, aus denen sich noch manche andere bemerkenswerthe Formeln herleiten lassen würden, wobei wir aber jetzt nicht länger verweilen wollen.

Wir kehren nun zur Bestimmung der Polhöhe zurück.

Nach §. 3. 20), 24) ist:

$$\sin\varpi=\mathfrak{A}+GA$$

also nach §. 3. 11), 15):

$$\sin\varDelta^2\sin\varpi=(\sin\delta-\sin\delta'\cos\varDelta)\sin h+(\sin\delta'-\sin\delta\cos\varDelta)\sin h'$$
$$+G\sin\varDelta^2\cos\delta\cos\delta'\sin(\sigma-\sigma'),$$

und folglich, weil nach dem Obigen:

$$G\sin\varDelta^2=2G_1=4G'$$

ist:

$$\sin\varDelta^2\sin\varpi=(\sin\delta-\sin\delta'\cos\varDelta)\sin h+(\sin h+(\sin\delta'-\sin\delta\cos\varDelta)\sin h'$$
$$+4G'\cos\delta\cos\delta'\sin(\sigma-\sigma'),$$

und daher nach 3):

$$\tfrac{1}{4}\sin\varDelta^2\sin\varpi$$
$$=\sin\tfrac{1}{2}(\delta-\delta')\cos\tfrac{1}{2}(\delta+\delta')\sin\tfrac{1}{2}(h-h')\cos\tfrac{1}{2}(h+h')\cos\tfrac{1}{2}\varDelta^2$$
$$+\cos\tfrac{1}{2}(\delta-\delta')\sin\tfrac{1}{2}(\delta+\delta')\cos\tfrac{1}{2}(h-h')\sin\tfrac{1}{2}(h+h')\sin\tfrac{1}{2}\varDelta^2$$
$$+G'\cos\delta\cos\delta'\sin(\sigma-\sigma'),$$

also nach 8):

$$16) \ldots \tfrac{1}{4}\sin\varDelta^2\sin\varpi=G'\left\{\begin{array}{l}\cos\frac{1}{2}(\delta-\delta')\sin\frac{1}{2}(\delta+\delta')\cot u\\+\sin\frac{1}{2}(\delta-\delta')\cos\frac{1}{2}(\delta+\delta')\cot u'\\+\cos\delta\cos\delta'\sin(\sigma-\sigma')\end{array}\right\}.$$

Ferner ist nach §. 3. 20), 24):

Digitized by Google

$$\cos\varpi\cos\tfrac{1}{2}(\sigma+\sigma')=\mathfrak{B}+GB,$$
$$\cos\varpi\sin\tfrac{1}{2}(\sigma+\sigma')=\mathfrak{C}+GC;$$

also nach §. 3. 11), 15):

$$\sin\Delta^2\cos\varpi\cos\tfrac{1}{2}(\sigma+\sigma')$$
$$=\{(\cos\delta-\cos\delta'\cos\Delta)\sin h+(\cos\delta'-\cos\delta\cos\Delta)\sin h'\}\cos\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma')$$
$$-G\sin\Delta^2\sin(\delta+\delta')\sin\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma'),$$

$$\sin\Delta^2\cos\varpi\sin\tfrac{1}{2}(\sigma+\sigma')$$
$$=-\{(\cos\delta+\cos\delta'\cos\Delta)\sin h-(\cos\delta'+\cos\delta\cos\Delta)\sin h'\}\sin\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma')$$
$$+G\sin\Delta^2\sin(\delta-\delta')\cos\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma');$$

folglich nach dem Obigen:

$$\sin\Delta^2\cos\varpi\cos\tfrac{1}{2}(\sigma+\sigma')$$
$$=\{(\cos\delta-\cos\delta'\cos\Delta)\sin h+(\cos\delta'-\cos\delta\cos\Delta)\sin h'\}\cos\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma')$$
$$-4G'\sin(\delta+\delta')\sin\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma'),$$

$$\sin\Delta^2\cos\varpi\sin\tfrac{1}{2}(\sigma+\sigma')$$
$$=-\{(\cos\delta+\cos\delta'\cos\Delta)\sin h-(\cos\delta'+\cos\delta\cos\Delta)\sin h'\}\sin\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma')$$
$$+4G'\sin(\delta-\delta')\cos\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma').$$

Daher ist nach 2) und 1):

$$\tfrac{1}{4}\sin\Delta^2\cos\varpi\cos\tfrac{1}{2}(\sigma+\sigma')$$
$$=\left\{\begin{array}{l}\cos\tfrac{1}{2}(\delta-\delta')\cos\tfrac{1}{2}(\delta+\delta')\cos\tfrac{1}{2}(h-h')\sin\tfrac{1}{2}(h+h')\sin\tfrac{1}{2}\Delta^2\\-\sin\tfrac{1}{2}(\delta-\delta')\sin\tfrac{1}{2}(\delta+\delta')\sin\tfrac{1}{2}(h-h')\cos\tfrac{1}{2}(h+h')\cos\tfrac{1}{2}\Delta^2\end{array}\right\}\cos\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma')$$
$$-G'\sin(\delta+\delta')\sin\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma'),$$

$$\tfrac{1}{4}\sin\Delta^2\cos\varpi\sin\tfrac{1}{2}(\sigma+\sigma')$$
$$=\left\{\begin{array}{l}\sin\tfrac{1}{2}(\delta-\delta')\sin\tfrac{1}{2}(\delta+\delta')\cos\tfrac{1}{2}(h-h')\sin\tfrac{1}{2}(h+h')\sin\tfrac{1}{2}\Delta^2\\-\cos\tfrac{1}{2}(\delta-\delta')\cos\tfrac{1}{2}(\delta+\delta')\sin\tfrac{1}{2}(h-h')\cos\tfrac{1}{2}(h+h')\cos\tfrac{1}{2}\Delta^2\end{array}\right\}\sin\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma')$$
$$+G'\sin(\delta-\delta')\cos\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma').$$

Also ist nach 8):

$$\sin\Delta^2\cos\varpi\cos\tfrac{1}{2}(\sigma+\sigma')=4G'\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}\cos\tfrac{1}{2}(\delta-\delta')\cos\tfrac{1}{2}(\delta+\delta')\cot u\\-\sin\tfrac{1}{2}(\delta-\delta')\sin\tfrac{1}{2}(\delta+\delta')\cot u'\end{array}\right]\cos\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma')\\-\sin(\delta+\delta')\sin\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma')\end{array}\right\},$$

$$\sin\Delta^2\cos\varpi\sin\tfrac{1}{2}(\sigma+\sigma')=4G'\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}\sin\tfrac{1}{2}(\delta-\delta')\sin\tfrac{1}{2}(\delta+\delta')\cot u\\-\cos\tfrac{1}{2}(\delta-\delta')\cos\tfrac{1}{2}(\delta+\delta')\cot u'\end{array}\right]\sin\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma')\\+\sin(\delta-\delta')\cos\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma')\end{array}\right\};$$

oder:

$$\sin\Delta^2\cos\overline{\omega}\cos\tfrac{1}{2}(\sigma+\sigma')$$
$$=4G'\sin\tfrac{1}{2}(\delta+\delta')\cos\tfrac{1}{2}(\delta+\delta')\left\{\begin{array}{l}\left[\dfrac{\cos\frac{1}{2}(\delta-\delta')}{\sin\frac{1}{2}(\delta+\delta')}\cot u-\dfrac{\sin\frac{1}{2}(\delta-\delta')}{\cos^2(\delta+\delta')}\cot u'\right]\cos\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma')\\ -2\sin\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma')\end{array}\right\},$$

$$\sin\Delta^2\cos\overline{\omega}\sin\tfrac{1}{2}(\sigma+\sigma')$$
$$=4G'\sin\tfrac{1}{2}(\delta-\delta')\cos\tfrac{1}{2}(\delta-\delta')\left\{\begin{array}{l}\left[\dfrac{\sin\frac{1}{2}(\delta+\delta')}{\cos\frac{1}{2}(\delta-\delta')}\cot u-\dfrac{\cos\frac{1}{2}(\delta+\delta')}{\sin\frac{1}{2}(\delta-\delta')}\cot u'\right]\sin\,(\sigma-\sigma')\\ +2\cos\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma')\end{array}\right\}$$

oder nach 8):

17)

$$\sin\Delta^2\cos\overline{\omega}\cos\tfrac{1}{2}(\sigma+\sigma')$$
$$=2G'\sin(\delta+\delta')\sin\tfrac{1}{2}(\sigma'-\sigma)\{2+(\cot u\cot v-\cot u'\cot v')\},$$

$$\sin\Delta^2\cos\overline{\omega}\sin\tfrac{1}{2}(\sigma+\sigma')$$
$$=2G'\sin(\delta-\delta')\cos\tfrac{1}{2}(\sigma'-\sigma)\{2-(\cot u\tang v-\cot u'\tang v')\}$$
$$=2G'\sin(\delta-\delta')\cos\tfrac{1}{2}(\sigma'-\sigma)\left\{2-\left(\frac{\cot u}{\cot v}-\frac{\cot u'}{\cot v'}\right)\right\}.$$

Offenbar ist auch:

18)

$$\sin\Delta^2\cos\overline{\omega}\cos\tfrac{1}{2}(\sigma+\sigma')$$
$$=2G'\sin(\delta+\delta')\sin\tfrac{1}{2}(\sigma'-\sigma)\left\{\frac{\cos(u-v)}{\sin u\sin v}-\frac{\cos(u'+v')}{\sin u'\sin v'}\right\},$$

$$\sin\Delta^2\cos\overline{\omega}\sin\tfrac{1}{2}(\sigma+\sigma')$$
$$=2G'\sin(\delta-\delta')\cos\tfrac{1}{2}(\sigma'-\sigma)\left\{\frac{\sin(u-v)}{\sin u\cos v}+\frac{\sin(u'+v')}{\sin u'\cos v'}\right\}.$$

Durch Division folgt hieraus:

$$\tang\tfrac{1}{2}(\sigma'+\sigma)$$
$$=\frac{\sin(\delta-\delta')\cos\frac{1}{2}(\sigma'-\sigma)}{\sin(\delta+\delta')\sin\frac{1}{2}(\sigma'-\sigma)}\cdot\frac{\dfrac{\sin(u-v)}{\sin u\cos v}+\dfrac{\sin(u'+v')}{\sin u'\cos v'}}{\dfrac{\cos(u-v)}{\sin u\sin v}-\dfrac{\cos(u'+v')}{\sin u'\sin v'}}$$

$$=\frac{\sin\frac{1}{2}(\delta-\delta')\cos\frac{1}{2}(\delta-\delta')\cos\frac{1}{2}(\sigma'-\sigma)}{\sin\frac{1}{2}(\delta+\delta')\cos\frac{1}{2}(\delta+\delta')\sin\frac{1}{2}(\sigma'-\sigma)}\cdot\frac{\dfrac{\sin(u-v)}{\sin u\cos v}+\dfrac{\sin(u'+v')}{\sin u'\cos v'}}{\dfrac{\cos(u-v)}{\sin u\sin v}-\dfrac{\cos(u'+v')}{\sin u'\sin v'}};$$

nach 8) ist aber:

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(\delta-\delta')}{\sin\frac{1}{2}(\delta+\delta')}=\cot v\tang\tfrac{1}{2}(\sigma'-\sigma),$$
$$\frac{\sin\frac{1}{2}(\delta-\delta')}{\cos\frac{1}{2}(\delta+\delta')}=\cot v'\tang\tfrac{1}{2}(\sigma'-\sigma);$$

Digitized by Google

folglich:

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(\delta-\delta')\cos\frac{1}{2}(\delta-\delta')}{\sin\frac{1}{2}(\delta+\delta')\cos\frac{1}{2}(\delta+\delta')}=\cot v\cot v'\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\sigma'-\sigma)^2,$$

also:

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(\delta-\delta')\cos\frac{1}{2}(\delta-\delta')\cos\frac{1}{2}(\sigma'-\sigma)}{\sin\frac{1}{2}(\delta+\delta')\cos\frac{1}{2}(\delta+\delta')\sin\frac{1}{2}(\sigma'-\sigma)}=\cot v\cot v'\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\sigma'-\sigma),$$

und daher nach dem Vorhergehenden:

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\sigma'+\sigma)=\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\sigma'-\sigma)\cot v\cot v'.\frac{\dfrac{\sin(u-v)}{\sin u\cos v}+\dfrac{\sin(u'+v')}{\sin u'\cos v'}}{\dfrac{\cos(u-v)}{\sin u\sin v}-\dfrac{\cos(u'+v')}{\sin u'\sin v'}},$$

folglich:

$$\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\sigma'+\sigma)}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\sigma'-\sigma)}=\cot v\cot v'.\frac{\dfrac{\sin(u-v)}{\sin u\cos u}+\dfrac{\sin(u'+v')}{\sin u'\cos v'}}{\dfrac{\cos(u-v)}{\sin u\sin v}-\dfrac{\cos(u'+v')}{\sin u'\sin v'}};$$

ganz eben so, wie schon im 14) gefunden worden ist.

§. 7.

Wir wollen nun den besondern Fall betrachten, wenn $h=h$ ist, wenn man also zwei Sterne in gleichen Höhen beobachtet hat, welcher Fall auch praktisch von besonderer Wichtigkeit ist.

In diesem Falle ist nach §. 3. 11):

$$\mathfrak{A}=\frac{(\sin\delta+\sin\delta')(1-\cos\Delta)\sin h}{\sin\Delta^2},$$

$$\mathfrak{B}=\frac{(\cos\delta+\cos\delta')(1-\cos\Delta)\sin h}{\sin\Delta^2}\cos\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma'),$$

$$\mathfrak{C}=-\frac{(\cos\delta-\cos\delta')(1-\cos\Delta)\sin h}{\sin\Delta^2}\sin\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma');$$

also:

1)

$$\mathfrak{A}=\frac{\sin\frac{1}{2}(\delta+\delta')\cos\frac{1}{2}(\delta-\delta')\sin h}{\cos\frac{1}{2}\Delta^2},$$

$$\mathfrak{B}=\frac{\cos\frac{1}{2}(\delta+\delta')\cos\frac{1}{2}(\delta-\delta')\sin h}{\cos\frac{1}{2}\Delta^2}\cos\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma'),$$

$$\mathfrak{C}=\frac{\sin\frac{1}{2}(\delta+\delta')\sin\frac{1}{2}(\delta-\delta')\sin h}{\cos\frac{1}{2}\Delta^2}\sin\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma').$$

Digitized by Google

Ferner ist nach §. 4. 4):

$$2) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; \mathfrak{A}^2+\mathfrak{B}^2+\mathfrak{C}^2=\frac{\sin h^2}{\cos\frac{1}{2}\varDelta^2},$$

also:

$$1-(\mathfrak{A}^2+\mathfrak{B}^2+\mathfrak{C}^2)=\frac{\cos\frac{1}{2}\varDelta^2-\sin h^2}{\cos\frac{1}{2}\varDelta^2}$$

$$=\frac{(\cos\frac{1}{2}\varDelta+\sin h)(\cos\frac{1}{2}\varDelta-\sin h)}{\cos\frac{1}{2}\varDelta^2}$$

$$=\frac{\{\cos\frac{1}{2}\varDelta+\cos(90^0-h)\}\{\cos\frac{1}{2}\varDelta-\cos(90^0-h)\}}{\cos\frac{1}{2}\varDelta^2}$$

$$=\frac{4\cos(45^0+\frac{1}{4}\varDelta-\frac{1}{2}h)\cos(45^0-\frac{1}{4}\varDelta-\frac{1}{2}h)\sin(45^0+\frac{1}{4}\varDelta-\frac{1}{2}h)\sin(45^0-\frac{1}{4}\varDelta-\frac{1}{2}h)}{\cos\frac{1}{2}\varDelta^2}$$

$$=\frac{\sin(90^0+\frac{1}{2}\varDelta-h)\sin(90^0-\frac{1}{2}\varDelta-h)}{\cos\frac{1}{2}\varDelta^2}$$

$$=\frac{\cos(\frac{1}{2}\varDelta+h)\cos(\frac{1}{2}\varDelta-h)}{\cos\frac{1}{2}\varDelta^2},$$

und daher nach §. 3. 21):

$$G^2=\frac{\cos(\frac{1}{2}\varDelta+h)\cos(\frac{1}{2}\varDelta-h)}{\sin\varDelta^2\cos\frac{1}{2}\varDelta^2}=\frac{\cos(\frac{1}{2}\varDelta+h)\cos(\frac{1}{2}\varDelta-h)}{4\sin\frac{1}{2}\varDelta^2\cos\frac{1}{2}\varDelta^4},$$

also:

$$3) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; G=\pm\frac{\sqrt{\cos(\frac{1}{2}\varDelta+h)\cos(\frac{1}{2}\varDelta-h)}}{2\sin\frac{1}{2}\varDelta\cos\frac{1}{2}\varDelta^2}.$$

Aus dem allgemeinen Ausdrucke von G^2 in §. 4. 6) folgt für $h=h'$:

$$G^2=\frac{4\cos(\frac{1}{2}\varDelta+h)\cos(\frac{1}{2}\varDelta-h)\sin\frac{1}{2}\varDelta^2}{\sin\varDelta^4}$$

$$=\frac{\cos(\frac{1}{2}\varDelta+h)\cos(\frac{1}{2}\varDelta-h)}{\sin\varDelta^2\cos\frac{1}{2}\varDelta^2},$$

was mit dem Obigen völlig übereinstimmt.

Weil nach dem Obigen:

$$G'=\tfrac{1}{2}G_1=\tfrac{1}{4}G\sin\varDelta^2$$

ist, so ist nach 3):

$$G'=\pm\tfrac{1}{2}\sin\tfrac{1}{2}\varDelta\sqrt{\cos(\tfrac{1}{2}\varDelta+h)\cos(\tfrac{1}{2}\varDelta-h)},$$

also nach dem vorhergehenden Paragraphen für $h=h'$ offenbar:

$$\cos\tfrac{1}{2}\varDelta^2\cos\overline{\omega}\cos\tfrac{1}{2}(\sigma+\sigma')$$

$$=\cos\tfrac{1}{2}(\delta-\delta')\cos\tfrac{1}{2}(\delta+\delta')\sin h\cos\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma')$$

$$\mp\frac{\sin(\delta+\delta')\sin\frac{1}{2}(\sigma-\sigma')\sqrt{\cos(\frac{1}{2}\varDelta+h)\cos(\frac{1}{2}\varDelta-h)}}{2\sin\frac{1}{2}\varDelta},$$

$$\cos\tfrac{1}{2}\Delta^2\cos\varpi\sin\tfrac{1}{2}(\sigma+\sigma')$$
$$=\sin\tfrac{1}{2}(\delta-\delta')\sin\tfrac{1}{2}(\delta+\delta')\sin h\sin\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma')$$
$$+\frac{\sin(\delta-\delta')\cos\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma')\sqrt{\cos(\tfrac{1}{2}\Delta+h)\cos(\tfrac{1}{2}\Delta-h)}}{2\sin\tfrac{1}{2}\Delta};$$

oder:

$$\cos\tfrac{1}{2}\Delta^2\cos\varpi\cos\tfrac{1}{2}(\sigma+\sigma')$$
$$=\tfrac{1}{2}\sin(\delta+\delta')\sin\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma')\sin h\left\{\frac{\cos\tfrac{1}{2}(\delta-\delta')\cot\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma')}{\sin\tfrac{1}{2}(\delta+\delta')}\mp\frac{\sqrt{\cos(\tfrac{1}{2}\Delta+h)\cos(\tfrac{1}{2}\Delta-h)}}{\sin h\sin\tfrac{1}{2}\Delta}\right\}$$

$$\cos\tfrac{1}{2}\Delta^2\cos\varpi\sin\tfrac{1}{2}(\sigma+\sigma')$$
$$=\tfrac{1}{2}\sin(\delta-\delta')\cos\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma')\sin h\left\{\frac{\sin\tfrac{1}{2}(\delta+\delta')\tan\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma')}{\cos\tfrac{1}{2}(\delta-\delta')}\pm\frac{\sqrt{\cos(\tfrac{1}{2}\Delta+h)\cos(\tfrac{1}{2}\Delta-h)}}{\sin h\sin\tfrac{1}{2}\Delta}\right\}$$

Setzt man nun:

$$4)\quad\ldots\ldots\begin{cases}\tan u=\dfrac{\sin\tfrac{1}{2}(\delta+\delta')\tan\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma')}{\cos\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma')},\\[2ex] \cot u=\dfrac{\cos\tfrac{1}{2}(\delta-\delta')\cot\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma')}{\sin\tfrac{1}{2}(\delta+\delta')},\\[2ex] \tan v=\dfrac{\sqrt{\cos(\tfrac{1}{2}\Delta+h)\cos(\tfrac{1}{2}\Delta-h)}}{\sin h\sin\tfrac{1}{2}\Delta};\end{cases}$$

so ist nach dem Vorhergehenden:

$$\cos\tfrac{1}{2}\Delta^2\cos\varpi\cos\tfrac{1}{2}(\sigma+\sigma')$$
$$=\tfrac{1}{2}\sin(\delta+\delta')\sin\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma')\sin h(\cot u\mp\tan v),$$
$$\cos\tfrac{1}{2}\Delta^2\cos\varpi\sin\tfrac{1}{2}(\sigma+\sigma')$$
$$=\tfrac{1}{2}\sin(\delta-\delta')\cos\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma')\sin h(\tan u\pm\tan v);$$

also:

5)

$$\cos\tfrac{1}{2}\Delta^2\cos\varpi\cos\tfrac{1}{2}(\sigma+\sigma')=\frac{\sin(\delta+\delta')\sin\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma')\sin h\cos(u\pm v)}{2\sin u\cos v},$$

$$\cos\tfrac{1}{2}\Delta^2\cos\varpi\sin\tfrac{1}{2}(\sigma+\sigma')=\frac{\sin(\delta-\delta')\cos\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma')\sin h\sin(u\pm v)}{2\cos u\cos v}.$$

Weil nach 4) offenbar:

$$\frac{\sin\tfrac{1}{2}(\delta+\delta')\sin\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma')}{\sin u}=\frac{\cos\tfrac{1}{2}(\delta-\delta')\cos\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma')}{\cos u}$$

also:

$$\frac{\sin(\delta+\delta')\sin\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma')}{2\sin u}=\frac{\cos\tfrac{1}{2}(\delta-\delta')\cos\tfrac{1}{2}(\delta+\delta')\cos\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma')}{\cos u}$$

ist, so ist auch:

$$6) \ldots \left\{\begin{aligned} &\cos\tfrac{1}{2}\Delta^2\cos\overline{\omega}\cos\tfrac{1}{2}(\sigma+\sigma')\\ &=\frac{\cos\frac{1}{2}(\delta-\delta')\cos\frac{1}{2}(\delta+\delta')\cos\frac{1}{2}(\sigma-\sigma')\sin h\cos(u\pm v)}{\cos u\cos v},\\ &\cos\tfrac{1}{2}\Delta^2\cos\overline{\omega}\sin\tfrac{1}{2}(\sigma+\sigma')\\ &=\frac{\sin\frac{1}{2}(\delta-\delta')\cos\frac{1}{2}(\delta-\delta')\cos\frac{1}{2}(\sigma-\sigma')\sin h\sin(u\pm v)}{\cos u\cos v}.\end{aligned}\right.$$

Folglich ist:

$$7) \ldots\ \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\sigma+\sigma')=\frac{\sin\frac{1}{2}(\delta-\delta')}{\cos\frac{1}{2}(\delta+\delta')}\operatorname{tang}(u\pm v),$$

eine, wie es mir scheint, sehr merkwürdige Formel.

Für $h=h'$ ist nach §. 6.:

$$\tfrac{1}{4}\sin\Delta^2\sin\overline{\omega}=\cos\tfrac{1}{2}(\delta-\delta')\sin\tfrac{1}{2}(\delta+\delta')\sin h\sin\tfrac{1}{2}\Delta^2 + G'\cos\delta\cos\delta'\sin(\sigma-\sigma'$$

folglich nach dem Obigen, wenn man für G' seinen Werth einführ

$$\tfrac{1}{4}\sin\Delta^2\sin\overline{\omega}=\cos\tfrac{1}{2}(\delta-\delta')\sin\tfrac{1}{2}(\delta+\delta')\sin h\sin\tfrac{1}{2}\Delta^2 \pm\tfrac{1}{2}\cos\delta\cos\delta'\sin(\sigma-\sigma')\sin\tfrac{1}{2}\Delta\sqrt{\cos(\tfrac{1}{2}\Delta+h)\cos(\tfrac{1}{2}\Delta-h}$$

und folglich:

$$\cos\tfrac{1}{2}\Delta^2\sin\overline{\omega}=\cos\tfrac{1}{2}(\delta-\delta')\sin\tfrac{1}{2}(\delta+\delta')\sin h \pm\frac{\cos\delta\cos\delta'\sin(\sigma-\sigma')\sqrt{\cos(\frac{1}{2}\Delta+h)\cos(\frac{1}{2}\Delta-h}}{2\sin\frac{1}{2}\Delta}$$

oder:

$$\cos\tfrac{1}{2}\Delta^2\sin\overline{\omega} =\tfrac{1}{2}\sin h\cos\delta\cos\delta'\sin(\sigma-\delta')\left\{\frac{2\cos\frac{1}{2}(\delta-\delta')\sin\frac{1}{2}(\delta+\delta')}{\cos\delta\cos\delta'\sin(\sigma-\sigma')}\pm\frac{\sqrt{\cos(\frac{1}{2}\Delta+h)\cos(\frac{1}{2}\Delta-h)}}{\sin h\sin\frac{1}{2}\Delta}\right\},$$

also, wenn man:

$$8) \ldots\ \operatorname{tang}u'=\frac{2\cos\frac{1}{2}(\delta-\delta')\sin\frac{1}{2}(\delta+\delta')}{\cos\delta\cos\delta'\sin(\sigma-\sigma')}$$

setzt, nach 4):

$$\cos\tfrac{1}{2}\Delta^2\sin\overline{\omega}=\tfrac{1}{2}\sin h\cos\delta\cos\delta'\sin(\sigma-\sigma')(\operatorname{tang}u'\pm\operatorname{tang}v),$$

folglich:

$$9) \ldots\ \cos\tfrac{1}{2}\Delta^2\sin\overline{\omega}=\frac{\sin h\cos\delta\cos\delta'\sin(\sigma-\sigma')\sin(u\pm v)}{2\cos u'\cos v}.$$

Digitized by Google

Weil nach 8):

$$\frac{\cos\delta\cos\delta'\sin(\sigma-\sigma')}{\cos u'}=\frac{2\cos\frac{1}{2}(\delta-\delta')\sin\frac{1}{2}(\delta+\delta')}{\sin u'}$$

ist, so ist auch:

10) . . . $\cos\frac{1}{2}\varDelta^2\sin\overline{\omega}=\frac{\sin h\cos\frac{1}{2}(\delta-\delta')\sin\frac{1}{2}(\delta+\delta')\sin(u'\pm v)}{\sin u'\cos v}$.

Durch Verbindung von 6) und 10) erhält man auch:

11)

$$\operatorname{tang}\overline{\omega}=\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\delta+\delta')\frac{\cos\frac{1}{2}(\sigma+\sigma')\cos u\sin(u'\pm v)}{\cos\frac{1}{2}(\sigma-\sigma')\sin u'\cos(v\pm v)},$$

$$\operatorname{tang}\overline{\omega}=\frac{\sin\frac{1}{2}(\delta+\delta')}{\sin\frac{1}{2}(\delta-\delta')}\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}(\sigma+\sigma')\cos u\sin(u'\pm v)}{\cos\frac{1}{2}(\sigma-\sigma')\sin u'\sin(u\pm v)}.$$

Durch Division dieser beiden Formeln erhält man wieder die Formel 7), wie es sein muss.

§. 8.

Für $\delta=\delta'$, wenn also derselbe Stern zwei Mal beobachtet worden ist, ist nach §. 3. 7:

1) . . . . $\cos\varDelta=\sin\delta^2+\cos\delta^2\cos(\sigma-\sigma')$

also, wenn man

$$\cos(\sigma-\sigma')=1-2\sin\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma')^2$$

setzt:

2) . . . . $\cos\varDelta=1-2\cos\delta^2\sin\frac{1}{2}(\sigma-\sigma')^2$,

und folglich offenbar:

$$\sin\tfrac{1}{2}\varDelta^2=\cos\delta^2\sin\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma')^2,$$

also:

3) . . . . $\sin\frac{1}{2}\varDelta=\text{val.abs.}\cos\delta\sin(\sigma-\sigma')^2$,

mittelst welcher Formel $\varDelta$ sehr leicht berechnet werden kann.

Ferner ist in diesem Falle nach §. 3. 11):

$$\mathfrak{A}=\frac{\sin\delta(1-\cos\varDelta)(\sin h+\sin h')}{\sin\varDelta^2},$$

$$\mathfrak{B}=\frac{\cos\delta(1-\cos\varDelta)(\sin h+\sin h')}{\sin\varDelta^2}\cos\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma'),$$

$$\mathfrak{C}=-\frac{\cos\delta(1+\cos\varDelta)(\sin h-\sin h')}{\sin\varDelta^2}\sin\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma');$$

Digitized by Google

also offenbar:

$$4)\ \ldots \begin{cases} \mathfrak{A} = \dfrac{\sin\delta\cos\frac{1}{2}(h-h')\sin\frac{1}{2}(h+h')}{\cos\frac{1}{2}\Delta^2}, \\ \mathfrak{B} = \dfrac{\cos\delta\cos\frac{1}{2}(h-h')\sin\frac{1}{2}(h+h')}{\cos\frac{1}{2}\Delta^2}\cos\frac{1}{2}(\sigma-\sigma'), \\ \mathfrak{C} = -\dfrac{\cos\delta\sin\frac{1}{2}(h-h')\cos\frac{1}{2}(h+h')}{\sin\frac{1}{2}\Delta^2}\sin\frac{1}{2}(\sigma-\sigma'); \end{cases}$$

oder nach 3):

$$5)\ \ldots \begin{cases} \mathfrak{A} = \dfrac{\sin\delta\cos\frac{1}{2}(h-h')\sin\frac{1}{2}(h+h')}{\cos\frac{1}{2}\Delta^2}, \\ \mathfrak{B} = \dfrac{\cos\delta\cos\frac{1}{2}(h-h')\sin\frac{1}{2}(h+h')}{\cos\frac{1}{2}\Delta^2}\cos\frac{1}{2}(\sigma-\sigma'), \\ \mathfrak{C} = -\dfrac{\sin\frac{1}{2}(h-h')\cos\frac{1}{2}(h+h')}{\cos\delta\sin\frac{1}{2}(\sigma-\sigma')}. \end{cases}$$

Nach §. 6. 16) ist:

$$\sin\Delta^2\sin\varpi = 4G'\{\sin\delta\,\mathrm{cotu}+\cos\delta^2\sin(\sigma-\sigma')\},$$

also, weil

$$4G' = G\sin\Delta^2$$

ist:

$$6)\ \ldots\ldots\ \sin\varpi = G\{\sin\delta\,\mathrm{cotu}+\cos\delta^2\sin(\sigma-\sigma')\},$$

wo nach §. 6. 8):

$$7)\ \ldots\ldots\ \mathrm{cotu} = \frac{\cos\frac{1}{2}(h-h')\sin\frac{1}{2}(h+h')\sin\frac{1}{2}\Delta^2}{G'},$$

oder:

$$8)\ \ldots\ldots\ \mathrm{cotu} = \frac{\cos\frac{1}{2}(h-h')\sin\frac{1}{2}(h+h')}{G\cos\frac{1}{2}\Delta^2}$$

ist.

Führt man den Ausdrnck 7) von cotu in den Ausdruck 6) von $\sin\varpi$ ein, so erhält man:

$$\sin\varpi = \frac{G}{G'}\sin\delta\cos\tfrac{1}{2}(h-h')\sin\tfrac{1}{2}(h+h')\sin\tfrac{1}{2}\Delta^2$$
$$+G\cos\delta^2\sin(\sigma-\sigma'),$$

also:

$$\sin\Delta^2\sin\varpi$$
$$= 4\{\sin\delta\cos\tfrac{1}{2}(h-h')\sin\tfrac{1}{2}(h+h')\sin\tfrac{1}{2}\Delta^2+G'\cos\delta^2\sin(\sigma-\sigma')\},$$

und sogleich nach 3), wenn man zugleich

$$\sin(\sigma-\sigma') = 2\sin\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma')\cos\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma')$$

setzt:

$$9) \quad \sin\Delta^2 \sin\overline{\omega}$$
$$=4\cos\delta^2 \sin\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma')\{\sin\delta\cos\tfrac{1}{2}(h-h')\sin\tfrac{1}{2}(h+h')\sin\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma')+2G'\cos\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma')\}$$

oder:

$$10) \quad \sin\Delta^2 \sin\overline{\omega}$$
$$=4\cos\delta^2 \sin\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma')\{\sin\delta\cos\tfrac{1}{2}(h-h')\sin\tfrac{1}{2}(h+h')\sin\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma')+G_1\cos\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma')\}.$$

Ferner ist nach §. 6.:

$$11$$
$$\sin\Delta^2\cos\overline{\omega}\cos\tfrac{1}{2}(\sigma+\sigma') = 4G'\{\cos\delta\cot u\cos\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma')-\sin 2\delta\sin\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma')\},$$
$$\sin\Delta^2\cos\overline{\omega}\sin\tfrac{1}{2}(\sigma+\sigma') = -4G'\cos\delta\cot u'\sin\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma');$$

wo nach §. 6. 8):

$$12) \quad \left\{\begin{aligned} \cot u &= \frac{\cos\frac{1}{2}(h-h')\sin\frac{1}{2}(h+h')\sin\frac{1}{2}\Delta^2}{G'}, \\ \cot u' &= \frac{\sin\frac{1}{2}(h-h')\cos\frac{1}{2}(h+h')\cos\frac{1}{2}\Delta^2}{G'} \end{aligned}\right.$$

ist. Es ist also:

$$13). \left\{\begin{aligned} &\sin\Delta^2\cos\overline{\omega}\cos\tfrac{1}{2}(\sigma+\sigma') \\ &= 4\left\{\begin{aligned}&\cos\delta\cos\tfrac{1}{2}(h-h')\,\mathrm{siu}\tfrac{1}{2}(h+h')\sin\tfrac{1}{2}\Delta^2\cos\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma') \\ &-G'\sin 2\delta\,\mathrm{siu}\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma')\end{aligned}\right\}, \\ &\sin\Delta^2\cos\overline{\omega}\sin\tfrac{1}{2}(\sigma+\sigma') \\ &= -4\cos\delta\sin\tfrac{1}{2}(h-h')\cos\tfrac{1}{2}(h+h')\cos\tfrac{1}{2}\Delta^2\sin\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma'); \end{aligned}\right.$$

folglich:

$$\sin\Delta^2\cos\overline{\omega}\cos\tfrac{1}{2}(\sigma+\sigma')$$
$$=4\left\{\begin{aligned}&\cos\delta^3\cos\tfrac{1}{2}(h-h')\sin\tfrac{1}{2}(h+h')\sin\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma')^2\cos\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma') \\ &-2G'\sin\delta\cos\delta\sin\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma')\end{aligned}\right\},$$
$$\sin\Delta^2\cos\overline{\omega}\sin\tfrac{1}{2}(\sigma+\sigma')$$
$$=-4\cos\delta\sin\tfrac{1}{2}(h-h')\cos\tfrac{1}{2}(h+h')\cos\tfrac{1}{2}\Delta^2\sin\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma');$$

also weil

$$\sin\Delta^2 = 4\sin\tfrac{1}{2}\Delta^2\cos\tfrac{1}{2}\Delta^2 = 4\cos\delta^2\sin\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma')^2\cos\tfrac{1}{2}\Delta^2$$

ist:

$$14)$$
$$\sin\Delta^2\cos\overline{\omega}\cos\tfrac{1}{2}(\sigma+\sigma')$$
$$=2\cos\delta\sin\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma')\{\cos\delta^2\cos\tfrac{1}{2}(h-h')\sin\tfrac{1}{2}(h+h')\sin(\sigma-\sigma')-2G'\sin\delta\},$$
$$\cos\overline{\omega}\sin\tfrac{1}{2}(\sigma+\sigma') = -\frac{\sin\frac{1}{2}(h-h')\cos\frac{1}{2}(h+h')}{\cos\delta\sin\frac{1}{2}(\sigma-\sigma')}.$$

Digitized by Google

Hieraus erhält man durch Division:

$$\sin\varDelta^2\cot\tfrac{1}{2}(\sigma+\sigma')=-2\cos\delta^2\sin\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma')^2\left\{\begin{array}{l}\cos\delta^2\cot\frac{1}{2}(h-h')\operatorname{tang}\frac{1}{2}(h+h')\sin(\sigma-\sigma')\\-\dfrac{2G_{,}\sin\delta}{\sin\frac{1}{2}(h-h')\cos\frac{1}{2}(h+h')}\end{array}\right\}$$

$$=-4\cos\delta^4\sin\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma')^4\cot\tfrac{1}{2}(h-h')\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(h+h')\cot\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma')$$
$$+\frac{4G_{,}\sin\delta\cos\delta^2\sin\frac{1}{2}(\sigma-\sigma')^2}{\sin\frac{1}{2}(h-h')\cos\frac{1}{2}(h+h')},$$

also, weil wie vorher:

$$\sin\varDelta^2=4\sin\tfrac{1}{2}\varDelta^2\cos\tfrac{1}{2}\varDelta^2=4\cos\delta^2\sin\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma')^2\cos\tfrac{1}{2}\varDelta^2$$

ist:

15 . $$\cot\tfrac{1}{2}(\sigma+\sigma')=-\cot\tfrac{1}{2}(h-h')\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(h+h')\cot\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma')\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\varDelta^2$$
$$+\frac{G'\sin\delta}{\sin\frac{1}{2}(h-h')\cos\frac{1}{2}(h+h')\cos\frac{1}{2}\varDelta^2}$$

wo bekanntlich:

$$G_{,}=\pm\sqrt{-\cos\tfrac{1}{2}(h+h'+\varDelta)\cos\tfrac{1}{2}(h+h'-\varDelta)\sin\tfrac{1}{2}(h-h'+\varDelta)\sin\tfrac{1}{2}(h-h'-\varDelta)}$$

ist.

XIV.

Ueber Johannes Kepler's Leben und Wirken.

Festrede den 15. October 1871 bei der Vorfeier*) des 300jährigen Geburtstages *Kepler's* zu Schloss Mühleck nächst Graz gehalten von Professor *Johann Rogner*.

Hochansehnliche, hochgeehrte Versammlung!

Die Geschichte der Menschheit weiset uns, in Zwischenräumen von Geschlecht zu Geschlechtern, vom Geschicke begünstigte Männer auf, die, erhaben durch die Gewalt ihrer Gedanken und den Adel ihres Charakters, als Leuchte zwischen den Jahrhunderten stehen, um die Völker zu führen von Culturstufe zu Culturstufe, um denselben ein Vorbild zu sein in den Tagen des Glückes und denen des Unglückes und die Herzen und Geister der Nationen immerdar zu erheben und zu erwärmen. Nicht immer erkennt sie die Mitwelt, des unvergänglichen Dankes der Nachwelt sind sie sicher.

Zu solchen Heroen der Menschheit zählt auch der unsterbliche Mann, dessen nahen 300jährigen Geburtstag zu feiern wir uns hier versammelten — es ist Kepler, der Liebling und Stolz des deutschen Volkes, der treue Dulder für seinen Glauben, der freimüthige Be-

*) Der Abdruck dieser sehr schätzenswerthen Arbeit in das Archiv ist uns von dem Herrn Verfasser gütigst gestattet worden, wofür wir auch noch an dieser Stelle unseren aufrichtigen Dank auszusprechen nicht verfehlen.

D. R.

Digitized by Google

kämpfer des Aberglaubens, der Schöpfer der neueren Sternkunde, Kepler, der, als er die ewigen Gesetze des Sternenhimmels erschloss, die Astronomie für immer zur Königin aller Wissenschaften erhob Hiermit wurde sein Lebenslauf berührt; die Menschen, die vor 277 Jahren hier aus- und eingingen, kannten ihn als „Wettermacher"; erlauben Sie mir, sein Leben, das überreich an Allem war, was des Menschen Herz, des Mannes Sinn mit Lust und Leid erfüllen kann, in gedrängtem Bilde zu vergegenwärtigen.

Es war den 27. December 1571, als in dem bescheidenen würtembergischen Städtchen Weil — Johannes Kepler — der Erde und dem Himmel zum Ruhme, uns geschenkt worden war.

Wie bei Vielen der Besten und Edelsten der Welt, waren es nicht Reichthum und Glücksgüter, die seine Wiege umstanden; er war „ein Siebenmonatkind", kränklich und schwächlich, und wenn auch von adelicher Herkunft, der Sohn eines wenig bemittelten Gastwirthes. Bei diesen Verhältnissen sollte er einerseits nach dem Verlangen seiner Eltern dem landwirthschaftlichen Erwerbe sich widmen, andererseits hielt ihn seine durch böse Krankheiten angegriffene Gesundheit davon zurück; inzwischen aber traten auch unleugbare Anzeichen seiner seltenen Geistesanlagen an den Tag; schliesslich wurde der vermögensarme, körperlich schwache, geistesgeweckte Sohn von seinen Eltern zur geistlichen Laufbahn bestimmt; als einstmaligen Pfarrherrn ihn zu sehen, hielten sie für sich und ihn als grösstes Glück. Kepler bezog mil Freude die Klosterschulen zu Adelberg und Maulbronn, und später, im September 1589, in Folge seiner ausgezeichneten Fortschritte, die Universität zu Tübingen, um auf öffentliche Kosten die geistlichen Studien fortzusetzen. Dort jedoch konnte sich Kepler's Geist mit der lutherischen Schulweisheit (Kepler war Protestant) bald nicht mehr befreunden, sich den Machtsprüchen seiner Lehrer in Manchem nicht unterwerfen, er, der bereits gewohnt, mit seinen Betrachtungen in den tiefsten Grund der Dinge einzudringen, hielt fest an dem Urgedanken des Protestantismus, dass in Sachen der christlichen Lehre das Wort der heil. Schrift das allein Entscheidende sei. So kam es, dass man zwar seine Kenntnisse, sowie seine ungewöhnliche Beredsamkeit rühmte, ihn aber für „untauglich" erachtete, „Mitarbeiter an der würtembergischen Kirche zu sein"; der künftige Besitz einer pfarrherrlichen Pfründe ward damit aus dem Bereiche aller Erwartung gerückt. — Das Schicksal half aus, es berief Kepler zum Priester des Herrn im Tempel seiner Schöpfung.

Bevor noch Kepler den dritten Jahrgang seiner theologischen Studien beendete, kam die Stelle des Mathematikers an der damaligen protestantischen Stiftsschule in Graz zur Besetzung. Die protestan-

Digitized by Google

tischen Gemeinden in Steiermark standen zu jener Zeit in steter Verbindung mit Tübingen und man ersuchte sich bei Bedarf von geistlichen und weltlichen Lehrern gegenseitig um Aushilfe. Da würden nun auch Kepler's Feinde seine Freunde, Alle bemühten sich, ihm war ja auch seine Trennung von Tübingen verbunden —; es trat zur freigewordenen Professur zu verhelfen.— mit seiner Beförderung Kepler am 13. M ä r z 1594 seine Reise nach G r a z an; der 23jährige Kepler ward auf seine „mitgebrachten ehrlichen Testimonia" hin Professor an der landschaftlichen Stiftsschule und zugleich steiermärkischer Landschafts-Mathematiker. Ueber die Annahme dieser Stellung sagte er selbst: „ein verborgenes Schicksal treibt den einen Menschen zu diesem, den anderen zu jenem Berufe, damit sie überzeugt werden, dass sie ebenso, wie sie einen Theil der Schöpfung bilden, so auch unter der Leitung der Vorsehung stehen. Als ich alt genug war, der Philosophie Süssigkeit zu erkennen, umfasste ich ihr gesammtes Gebiet mit ausserordentlicher Begier, ohne mich gerade für Astronomie speciele zu beeifern . . . Mehr mit Anlagen als mit Kenntnissen ausgerüstet, ging ich daran, unter ausdrücklicher Verwahrung, dass ich meinem Rechte auf eine andere Laufbahn, die mir glänzender schien, nicht entsage."

Die e r s t e Arbeit, die nun Kepler's Amt von ihm forderte, war die Anfertigung des steiermärkischen Kalenders für das Jahr 1594, nach der damals noch ungewohnten Gregorianischen Zeitrechnung, eine Aufgabe, die für Kepler darin eine unangenehme Seite barg, dass die Kalender von damals mit Prophezeihungen über den Einfluss der Gestirne anf dass Wohl und Wehe der Menschen gefüllt sein mussten; nur nothgedrungen fügte er sich diesem Brauche, seinen eigenen Verkündigungen redlich vorausschickend, „dass auf die jährlichen Prognostica, so man den Kalendern anheftet, keineswegs zu bauen." Obgleich nun aber der angehende junge Gelehrte selbst seine astrologischen „Praktiken" verurtheilte, so war doch der Erfolg derselben für ihn von besonderer Bedeutung: sein durchdringender Verstand hatte in scharfer Beurtheilung der damaligen Verhältnisse einen baldigen Einfall der Türken und die kommenden Bauernunruhen in Oesterreich vorausgesagt, sein Glück liess ihn einen sehr kalten Winter prophezeihen, — Alles traf ein, Kepler gewann alsbald grosses Ansehen im Lande.

An der Stiftsschule selbst, sie stand an der Stelle des jetzigen Paradeis in Graz und Kepler wohnte dort bis zu seiner Vermählung, war Kepler's Hauptpflicht die „mathematische Lection." Diese Stellung war entscheidend für all' seine Zukunft, es mag die Behauptung keine gewagte sein: ohne Graz würde die Welt eines Kepler entbehren! Er arbeitete in seinen Musestunden, getrieben zugleich von

Digitized by Google

seinem tiefen religiösen Gefühle, nach welchem er sagte: „in der Schöpfung greife ich Gott gleichsam mit den Händen", eifrigst im Reiche Uranias, und bald waren sein Vorwurf die grössten Fragen seiner Zeit: er bestrebte sich, die von Laien und Gelehrten in allen ihren Sätzen und auf das heftigste angegriffene Lehre Copernicus — nach welcher die Sonne in Mitten der Planetenwelt steht, und diese um jene sich dreht, nicht umgekehrt, wie man seit mehr als einem Jahrtausende bis zur Zeit Copernicus glaubte — mit den unumstösslichen Beweisen der Mathematik zu stützen.

Bei dieser Absicht waren es vor Allem dreierlei Umstände, welche Kepler mit aller Kraft seines Genies und mit aller Hingebung seines Charakters zu erforschen sich bemühte: die Ursachen für Zahl, Grösse und Bewegung der Planeten. „Was ist die Welt? und warum und nach welcherlei Plane erschuf sie Gott? wie fand er die Zahl, das Gesetz so gewaltiger Massen?" — so fragte er sich. Im Jahre 1596 erschien sein in Graz geschaffenes Erstlingswerk und stellte ihn mit Einem Male in die Reihe der grössten Geister seiner Zeit: das Buch von dem „Geheimnis des Weltbaues."

Und dennoch war es mit diesem Buche so beschaffen, dass Kepler durch Irrthum zur Wahrheit gelangen sollte. Kepler glaubte in jenem Buche erwiesen zu haben, dass die damals bekannte Anzahl von sechs Planeten mit ihren fünf Entfernungen von einander eine nothwendige und abgeschlossene sei: auf Grund, dass er die Abstände der Planeten in näherungsweiser Uebereinstimmung fand mit den Verhältnissen an den fünf regelmässigen Körpern der Geometrie und ihren ein- und umgeschriebenen Kugeln, und dass es in der That nur fünf Körper dieser Art geben kann. „Beinahe der ganze Sommer ging mit fruchtlosen Bemühugen verloren, bis ich endlich durch einen unbedeutenden Zufall der Wahrheit näher kam" schrieb Kepler in der Vorrede zu seinem Werke, „mir schien es als eine unmittelbare Schickung Gottes, dass ich endlich durch Zufall erlangen sollte, was ich mit der grössten Anstrengung zu erreichen nicht im Stande war, und ich glaubte um so mehr hieran, als ich unaufhörlich zu Gott gebetet hatte, er möge, wenn Copernicus die Wahrheit verkündet habe, meine Bemühungen gelingen lassen." So war dieses Buch schon ein Zeugnis von dem hohen Ernste seiner Lebensauffassung und seines Strebens, seiner Geisteskraft und seiner rastlosen Hingebung. Die Uebereilungen in jenem Buche glich er aus, indem später er der Erste war, welcher lehrte, dass in dem weiten Raume zwischen Mars und Jupiter sich noch andere Planeten befinden.

Während nun aber so der Stern seines Ruhmes im raschen

Steigen seinen Bogen zog, sollte noch ein anderer sein Leben mit Licht und Glanz erfüllen, jener unaussprechlich schöne der ersten Liebe.

Barbara Müller von Mühleck, aus einer adeligen reichen Familie stammend, welcher das vor unserem Blicke liegende freundliche Mühleck Besitzthum und Wohnort war, junge Witwe eines gewesenen landschaftlichen Bauzahlmeisters, war die Erkorene. Kepler's vortreffliches Gemüth und hoher Geist begegneten Anfangs den wärmsten Sympathien der reizenden Witwe, bis es Gegnern gelang, das zarte Verhältniss gründlich zu stören, aber „als so die Sache ganz zweifelhaft stand", erzählte Kepler selbst, „trat eine Wendung ein, und nun ging es rasch". Am 12. April 1597 richtete er sein „Hochzeits-Ladschreiben an einer Ersamen Landschaft des Herzogthums Steier Herren Verordnete", wornach er seinen „hochzeitlichen Erntag auf 27. laufenden Monats Aprilis in des wollgebornen Herrn Herrn Geörg Hartmann herrn Stubmberg ec. behaussung alhie in der Stempfergassen (liebts Gott.) zu halten entschlossen".

Die Hochzeit wurde auf das glänzendste gefeiert; Kepler's Leben gewann mit seiner Vermählung eine solche Höhe des Glückes für ihn, dass er an seinen hochverehrten Lehrer und väterlichen Freund Maestlin nach Tübingen schrieb: „von Gott wage ich nicht mehr zu verlangen, als er mir in dieser Zeit gewährt hat"; das Schicksal wand unserem jungen Weisen Lorbeer und Rosen zum Kranze, es verlieh ihm in der Wandelbarkeit seiner Gunst, was den Mann selten im Vereine beglückt: Ruhm und Liebe.

Ja wohl, nur kurz sollte die Dauer seiner seligen Tage sein. Nur mit Widerstreben wurde von Seite der Regierung vor eilf Jahren dem Landtage zu Bruck gestattet und zugesagt, die protestantische Religion frei auszuüben und Jedermann im Gewissen unbedrängt zu lassen. Nun trat die Gegenreformation ein, das Land wurde zur traurigen Stätte lichterloh aufbrennenden religiösen Unfriedens, Haders und bittersten Elendes. Wie Kepler dabei dachte, mag aus seinen eigenen Worten erhellen: „G o t t w e r d e s e l b s t j e n e , d i e C h r i s t u m l e u g n e n , n i c h t e i n f a c h v e r d a m m e n . D i e s s c h l i e s s e e r a u s G o t t e s B a r m h e r z i g k e i t . D a h e r f o r d e r e e r L u t h e r a n e r u n d C a l v i n i s t e n z u m F r i e d e n a u f u n d s e i g e g e n K a t h o l i k e n b i l l i g ; d i e s e B i l l i g k e i t r a t h e e r a u c h J e d e r m a n n a n , d a z u d r ä n g e i h n s e i n e G o t t e s - u n d M e n s c h e n l i e b e . I c h v e r d a m m e m e i n e B r ü d e r n i c h t , s i e s t e h e n o d e r s i e f a l l e n , s o s i n d s i e d e s H e r r n u n d m e i n e B r ü d e r ."

Dennoch war Kepler auf das schwerste betroffen und selbst der Geistesadel, den ihm die erhabenste der Wissenschaften verliehen,

war ihm kein Schutz gegen den fürstlichen Befehl, nach welchem er und eine Reihe seiner Glaubensgenossen Stadt und Land verlassen mussten; er wandte sich nach Ungarn. Nach vier Wochen kehrte Kepler in Folge einer von Seite des Hofes ihm allein gewährten Begünstigung wieder zurück, und wieder lebte er mit grösstem Eifer seinem hohen Berufe; bald übergab er seinen religiösen Widersachern, aber gelehrten Freunden an der Universität eine Abhandlung über die im Jahre 1600 zu erwartende Sonnenfinsterniss, und bat sie, „ihm bei seinen Bestrebungen nach verlässlichen Erfahrungen beistehen zu wollen". Als gedruckte Abhandlungen erschienen eine Monographie über „die Ursachen der Schiefe der Ecliptik", und eine andere über „die Weisheit des Schöpfers in der Erschaffung der Welt". So entsprossen selbst aus den schwersten Drangsalen, welche ihm und seinen Glaubensgenossen die Strenge der Regierung bereiteten, seinem Herzen nur Gefühle des festesten Vertrauens auf die Güte und Weisheit des Ewigen, und indem er seinen Geist in das Reich seiner Wissenschaft und der Religion versenkte, gewann er und holte er sich Muth und Stärke, um die Verkehrtheiten seiner Zeit mit Gelassenheit zu ertragen; „wenn etwas ist", schrieb er, „was den Menschen in diesem niederbeugenden Exil aufrichten kann, so ist es die Sternkunde, weil sie die Verherrlichung des weisesten Schöpfers zum Gegenstande hat". Als aber endlich die Streitigkeiten von beiden Parteien über alles Gebührliche stiegen, wurde Kepler's Lage so kummervoll, so drückend, dass er am 9. September 1600 seinem treuen Freunde und Meister Mästlin anzeigte: „wenn ihm auch das Leben noch übrig sei, so könne er doch nicht länger in Graz verweilen, binnen 45 Tagen müsse er die Güter seiner Frau verpachten oder verkaufen und das Land verlassen". „Schwer treffen mich diese Anordnungen", sagte er, „aber ich hätte nimmer geglaubt, dass es so süss sei, für die Religion und für die Ehre Christi mit seinen Brüdern Schaden und Spott zu leiden, Haus, Hof, Freunde und Vaterland zu verlassen".

Zuerst wollte sich Kepler wieder nach Tübingen wenden, selbst mit einer kleinen Professorsstelle gäbe er sich zufrieden; sein alter Lehrer erwiderte aber, selbst davon sei in diesen Zeiten keine Rede, alles, was er für seinen lieben Schüler thun könne, sei — beten. Wieder unverhofft bot sich dem arg Bedrängten eine Stätte der Zuflucht. Sein bereits ausgebreiteter Briefwechsel mit den Grössten seines Faches und seine schwungvolle, gedankenreiche Jugendarbeit, die seinen Ruf immer weiter verbreitete, hatte schon seit länger eine Verbindung seiner mit dem „Weitberühmten" dänischen Astronomen Tycho de Brahe im Gefolge. Dieser musste, zu gleicher Zeit durch Intriguen von seiner Sternwarte Uranienburg vertrieben, sein Vater-

Digitized by Google

und verlassen, und als er bei Kaiser Rudolf II. in Prag Aufnahme und, trug er Sr. Majestät vor, Kepler als rechnenden Gehilfen an ie Sternwarte zu berufen, und als der Kaiser diesen Vorschlag geehmigte, lud Tycho den Kepler ein, mit ihm, „der sich in gleichem idrigen Geschicke befände, an diesem Zufluchtsort der Wissenhaften gemeinschaftliches Studium zu betreiben“. Tycho besass den rössten Schatz von astronomischen Beobachtungen und die herrchsten, kostbarsten Instrumente seiner Zeit. Das war für Kepler, iehr, als ihm, wie er selbst sagte, Könige bieten könnten; es lag so ass das wissenschaftliche Wirken beider grosser Männer sich gegenitig ergänzte: mit Ende des Jahres 1600 erfolgte Kepler's Reise ach Prag. War das Bündnis Kepler's und Tycho's auch das heigste, geschlossen in reinster Begeisterung für die Wahrheit, — auch as Heiligste ist nicht sicher vor des Menschen Leidenschaft. Tycho's olzer Character und der Umstand, dass er in dem calculirenden stronomen von Württemberg bald nicht mehr den Gehilfen, sondern inen ebenbürtigen Meister erkennen musste, der die astronomischen Ansichten seines Herrn bei weitem nicht in Allem billigen konnte, nachte das Verhältniss zwischen Kepler und Tycho, kaum geknüpft, mit jedem Tage lockerer; auch schlugen des Kaisers zerrüttete Finanzen nicht zu Gunsten Kepler's aus. Der in einem halben Jahre darauf eingetretene Tod Tycho's hob zwar die Unbehaglichkeiten in Kepler's Amtsleben auf und brachte zwar seine Besoldung zum Steigen, jedoch seiner Bescheidenheit wegen nur auf 500 fl. — in Graz bezog er 150 fl. — allein, selbst die geringfügige Summe, der nach seinen eigenen Worten „sauer erworbene Lidlohn“, wurde von dem durch die Ansprüche von Goldmachern fortwährend unvermögenden Hofzahlamte nie regelmässig verabfolgt, und musste Kepler wiederholt auch um Anweisung schon bewilligter Summen zur Drucklegung seiner Schriften ersuchen. „Ich stehe ganze Tage in der Hofkammer“, schrieb Kepler, „und bin für die Studien nichts. Ich stärke mich jedoch mit dem Gedanken, dass ich nicht dem Kaiser allein, sondern dem ganzen menschlichen Geschlechte diene, dass ich nicht blos für die gegenwärtige Generation, sondern auch für die Nachwelt arbeite. Wenn Gott mir beisteht und wegen der Kosten Vorsehung thut, so hoffe ich, etwas zu leisten.“ Was Kepler leistete? — es war nichts Geringeres als der Umsturz des ganzen astronomischen Lehrgebäudes und der Aufbau eines neuen, des jetzt bestehenden.

Im Jahre 1609, in Prag, fand Kepler die ersten zwei der drei nach ihm benannten Gesetze, nämlich das Gesetz, dass die Planeten in Ellipsen ihren Lauf nehmen, in deren einem Brennpunkte die Sonne steht, — also nicht in Kreisen, wie selbst Copernicus noch lehrte — und auch das andere Gesetz, dass

die Radien-Vectoren, die Strahlen, welche man sich von den Planeten zur Sonne gezogen denkt, in gleichen Zeiten gleiche Flächenräume beschreiben.

Von der Hingebung, welche ihr Auffinden nothwendig machte, belehren seine eigenen Worte: „Wem das Durchlesen dieser mühevollen Rechnungen lange Weile macht, der mag immerhin Mitleid mit mir haben, der ich sie wenigstens siebzigmal wiederholen musste, während er sie nur einmal lesen darf.“ Eine einzige dieser Rechnungen umfasst zwei und einen halben Bogen, und unverdrossen blieb Kepler, als er am Ende solcher Arbeit fand, dass er auf falschem Wege sei, und somit wieder von neuem und in ganz anderer Weise beginnen müsse. Freilich hatte diese Ausdauer den genannten Erfolg; jene Entdeckungen erfüllten alle Welt mit Kepler's Ruhme, und so glänzte Kepler's Stern nun auch hehr und helle in der kaiserlichen Burg am Hradschin.

Auch seinen materiellen Verhältnissen sollte eine günstige Wendniss werden, ein kaiserlicher Gnadenbrief vom 29. April 1610 sagte „Ihme, Keppler, seinen Erben oder getreuen diss brifs Inhabern Zwei Tausendt Taller, jeden zu 70 Kr. gerechnet, als ein wohlverdinst unwiderrufliches Gnadengelt“ . . zu, welches „Wir mit ehister gelegenhait raichen vnd erfolgen“. Aber, auch jene Gelegenheit blieb aus, und neuerdings musste Kepler den Druck der ärmlichsten Verhältnisse empfinden, indem er überdies noch für ein anderes Riesenwerk unter seinen Händen, die Rudolf'schen Tafeln, welche den Ort der Fixsterne am Himmel auffinden lassen, der pecuniären Unterstützung dringendst bedürftig war. Der hohe Freund und Beschützer von Künsten und Wissenschaften und Kepler's geneigtester Gönner, Kaiser Rudolf II., verlor kurz darauf durch Krieg Krone und Land, und als derselbe bald darnach starb und seinen Thron Mathias bestieg, waren inzwischen Kepler's Gehaltsrückstände zur bedeutenden Summe von 12000 fl. aufgelaufen; wie sehr er darunter litt und mit welchem Edelmuthe, lassen seine Worte der Erwiderung entnehmen, als ein kaiserlicher Geheimrath fragte, warum die Tafeln so lange im Drucke nicht erscheinen: „damit die Ehre des Kaisers, bei dessen Kammerbefehlen ich verhungern müsste, geschont werden möge, so schreibe ich nichtswerthe Kalender mit Prognosticis, dies ist etwas besser als betteln.“

Die Wirrnisse der socialen Zustände im Allgemeinen nahmen nun immer grössere Ausdehnung und düsterere Färbung an, und schon stiegen hie und da die ersten Feuersäulen jenes blutigen Krieges auf, der volle drei Jahrzehende hindurch Deutschland verwüsten sollte. Künste und Wissenschaften wurden von den dem Banne ent-

Digitized by Google

kommenen wild einhertobenden Kriegsfurien in den Hintergrund gedrängt, mit dabei selbst Kepler's erhabene Muse. Auch sein häusliches Glück blieb nicht unverschont. Schon hatte er seine geliebte Gattin verloren, die Gräuel der Plünderung und des Mordens in nächster Nähe zu schauen, brachten ihr Wahnsinn und Tod, schon waren drei seiner Kinder den Blattern erlegen, die Verkümmerung seiner Besoldung drückte ihn schwer. Da suchte Kepler anderswo eine ruhigere Stätte und besseres Auskommen zu finden, er trug den oberösterreichichen Landständen seine Dienste an; mit Genehmigung der kaiserlichen Majestät übernahm Kepler im Jahre 1611 das Amt eines Professors der Mathematik an der Landschaftschule zu **Linz.**

Im Jahre 1613 wurde Kepler vom Hofe nach Regensburg geladen, um vor „Kaiser und Reich" den Protestanten die Annahme des Gregorianischen Kalenders zu empfehlen. Die Reise geschah, aber erfolglos, alle wissenschaftlichen und Vernunftgründe selbst eines Glaubensgenossen, wie Kepler, scheiterten an der Meinung der Protestanten, dass jede Annäherung an den päpstlichen Kalender ihrer Religion Gefahr bringe; „sie wollen lieber nicht mit der Sonne als mit dem Papste übereinstimmen", war ihre Erwiderung. Wieder zurückgekehrt in das reizende Donauland, sollte Kepler's Leben für eine Weile wieder werden wie einst in aller Schicksalsgunst. Kepler vermählte sich zum zweiten Male. Susanna Reuttinger, die Waise eines Schreiners, wurde seinen Kindern zweite sorgsame, liebende Mutter; die Hochzeitsfeier ging zu **Efferdingen**, wie in Graz, unter der ehrendsten Theilnahme der Landstände vor sich.

Mehrmals noch unternahm dann Kepler von Linz aus Reisen nach Prag, theils wissenschaftlicher Anliegen wegen, theils um seine ausständige Besoldung einzubringen, dieserwegen aber immer ohne Erfolg, so dass der Mann der tiefstinnigsten Forschungen neuerdings zur Abfassung astrologischer Praktiken greifen musste, um sich und den Seinigen das Leben zu fristen. Die tiefsten Verletzungen sollten ihn aber noch an der empfindlichsten Stelle seines Herzens treffen. Wer vermag den Schmerz zu ermessen, den ihm die plötzliche Trauerkunde brachte, seine alte 70jährige Mutter werde von ihren eigenen Landsleuten mit Gefängnis, Marter und Tod bedroht! Falsche Freunde und offene Feinde, und eigene Unvorsichtigkeit im Gebahren, körperliche Leiden heilen zu wollen, endlich unvernünftige und herzlose Aussagen des eigenen Sohnes Christoph selbst, führten zur öffentlichen Anzeige bei Gericht: sie sei eine Zauberin, eine Hexe. „Bisher," schrieb Kepler, „habe ich mit unbescholtenem Rufe durch das Leben hingeschifft, als voriges Jahr ein plötzlich ausgebrochenes Gewitter mein Schifflein gegen die gefahrvollsten Klippen trieb. Dieser Sturm

Digitized by Google

traf nicht sowohl mich selbst, als meine unglückliche Mutter, von der jedoch aller Schade auf den Sohn fällt." Der grosse Astronom und sein Leben lang her der eifrigste Bekämpfer des Aberglaubens, fühlte die Schwere der Angriffe, die auf Ehre und Leben seiner Mutter gemacht wurden, in vollem Gewichte, wurden doch in jenen Tagen von „rechtsgelehrten" Männern der Universität Leipzig Tausende von Todesurtheilen über Hexen gesprochen. Ueber Kepler's Reise nach Württemberg und seine Vertheidigung vor Gericht wurde zwar der Scheiterhaufen abgewendet und die Freisprechung seiner Mutter erzielt, allein die Leiden während des fünfjährigen Processes hatten der Greisin Kräfte verzehrt und führten ihren baldigen Tod herbei. Der Kelch der Bitterkeiten war dem edlen Manne aber noch weiter beschieden, auch in Linz sollten ihn die Schrecken des Krieges ereilen; der von ihm in Vorahnung vorhergesagte Bauernaufstand brach nun mit allen Greueln der Verwüstung über das Land herein. Aber, — umgeben von allen Bedrängnissen und Beschwerden der Belagerung, feierte Kepler's allgewaltiger Geist im Reiche seiner göttlichen Wissenschaft den Ausbau seiner Schöpfungen: in Linz im Jahre 1618 entdeckte er sein drittes Gesetz: die Quadratzahlen der Umlaufszeiten der Planeten verhalten sich wie die Kubikzahlen ihrer mittleren Entfernungen von der Sonne.

Durch die ersten zwei Gesetze waren die Bahn und die Bewegung jedes Planeten bekannt, und damit ermöglicht, den Ort anzugeben, an welchem sich jeder Planet zu jeder gegebenen Zeit befindet; dabei kommt aber jeder Planet abgesondert für sich in Betracht und die Rechnung führt von keinem zu einem anderen; noch mangelte ein Gesetz, das sie mit einander zu einem Ganzen vereinigte. Kepler ahnte ein solches Gesetz, aber er forschte, seinen eigenen Worten nach, volle siebzehn Jahre vergebens nach demselben. Am 8. März 1618 schlug er den rechten Weg dazu ein, aber ohne noch zum Ziele zu gelangen — im Vorgefühle neuer grosser Entdeckungen vollführte er die Arbeit mit begreiflicher Aufregung, Hast und Ungeduld, und — ein ganz gewöhnlicher Rechnungsfehler verdeckte ihm noch die Wahrheit; am 18. Mai 1618 nahm er jene Untersuchungen noch einmal auf, in Erwägung, dass er damals sich übereilte, und wohl auch falsch gerechnet haben mochte, alsbald erwies sich sein Bedenken als gerechtfertigt, schon die ersten Verbesserungen zeigten ihm das wahre Gesetz — die Einrichtung des Weltenbaues lag nun klar vor seinen Blicken! Welche Gefühle, welche Gedanken mögen es gewesen sein, die in solch' heiligen Augenblicken seine freudige Seele durchzogen? Wir kennen sie, er schrieb sie in folgendem Lob- und Preisgesang nieder:

Digitized by Google

Schöpfer der Welt! Du ewige Macht! durch alle die Räume
Schallet Dein Ruhm! er schallt Himmel und Erde hindurch.
Selbst das unmündige Kind hallt nach die Stimm; es verkündet,
Dass der Lästrer verstummt, laut des Unendlichen Lob.
Grosser Künstler der Welt! Ich schaue wundernd die Werke
Deiner Hände, nach tief künstlichen Formen erbaut,
Und in der Mitte die Sonn! Ausspenderin Lichtes und Lebens,
Die nach heil'gem Gesetz zügelt die Erden und lenkt
In verschiedenem Lauf. Ich sehe die Mühen des Mondes,
Und dort Sterne gestreut auf unermessener Flur. —
Vater der Welt, was bewegte Dich, ein armes, ein kleines
Schwaches Erdengeschöpf so zu erheben! so hoch,
Dass es im Glanz dasteht, ein weithin herrschender König.
Fast ein Gott; denn er denkt Deine Gedanken Dir nach.
Herrscher der Welt! Du ewige Macht! durch alle die Welten
Schwingt sich auf den Flügeln des Lichtes Dein unermessener Glanz.

Diese drei Gesetze, sie waren wohl wert all' der Anstrengungen und Opfer, mit welchen sie das kummervolle Leben eines der begabtesten Menschen erkauft hatte, sie lassen sämmtliche Vorgänge im Sonnensysteme, insoferne sie auf Ellipsen beruhen, vollkommen erklären. Was nach ihnen seit mehr als dritthalb Jahrhunderten an Erscheinungen am Himmel vorhergesagt wurde, ist mit solcher Uebereinstimmung eingetroffen, als reichten Menschenhände zur Vollführung desselben hin; wie viel von dem, was der Mensch sonst als Wahrheit ausgibt, kann sich so genauer und augenscheinlicher Bekräftigung erfreuen?

In diesen drei Gesetzen, veröffentlicht in Kepler's „Harmonie der Welt, Linz 1619,“ liegen des grossen Meisters unermessliche Verdienste. Seit ein Menschenauge den Himmel traf, zogen die Wandelsterne nach denselben Gesetzen ihre funkelnden Züge hin, keiner von ihren Millionen Beschauern vermochte sie zu enträthseln, bis endlich Einem von Allen — unserem gefeierten Manne gelungen, jene Sternenschrift zu deuten!

Doch kehren wir wieder zu Kepler's Leben zurück, auf welches bereits Atropos, die dritte der Parzen, ihre verhängnisvollen Blicke gelenkt.

Im Jahre 1624 beendigte Kepler die Rudolf'schen Tafeln, und finden wir inzwischen von Kepler neben seiner neuen Astronomie auch Grundsteine gelegt in der Arithmethik, in der Geometrie, in der Physik, namentlich in der Optik, auf welche nach Menschenaltern noch fortgebaut wird.

Mittlerweile zog er sammt seiner Familie nach Regensburg.

Digitized by Google

Nach Bewältigung des Bauernaufstandes verordnete der Kaiser die Entfernung aller protestantischen Beamten aus dem Lande, die Stände Oberösterreichs richteten dieserwegen an Kepler die Anfrage, was er zu thun gedenke; Kepler musste die besondere Entscheidung des Kaisers erwarten. Namenloses Verhängnis! So wusste der Grösste seiner Zeit wieder keine Stelle der Erde, wo er ruhig sein Haupt hinlegen könnte, nachdem er bereits zur höchsten Ehre der Welt und des ganzen Menschengeschlechtes gewirkt hatte. Ferdinand II., der Nachfolger Mathias', bestätigte zwar Kepler in seinem Amte, man wies aber seine Ansprüche auf rückständige Besoldung an die Einkünfte des Herzogthums Mecklenburg und damit auch — Kepler — dahin. Darnach kam Kepler in Wallensteins Dienste; mit gerechtem Stolze jedoch gegen des Friedländers astrologischen Aberglauben erfüllt, wies Kepler jene Anstellung zurück, und verweilte in Sagan, mehrere seiner Druckwerke dort besorgend. Mehrere Reisen und Versuche, seine noch immer unbezahlte Besoldung flüssig zu machen, blieben erfolglos, nur der Himmel hatte für ihn Gesetze, die Menschen hatten keines für sein gutes Recht.

An körperlichen Kräften erschöpft, und bis auf den Grund der Seele verletzt, langte er wieder in Regensburg an, um kurz darauf sein edles Auge für immer zu schliessen; „ruhig und still, zuletzt öfters nur deutend nach dem Kopfe und nach dem Himmel" verschied er am 15. November 1630.

„Lebend mass ich die Himmel, jetzt mess ich das Dunkel der Erde.
Himmelab stammte der Geist. Erde bedeckt nur den Leib."

So lautete seine Grabschrift.

Nahe drei Jahrhunderte trennen uns von dem grossen, reichbegabten, merkwürdigen Manne — die Zeit aber steigert nur die Ehrfurcht und Hochachtung für seinen Geist und seine Thaten und sein reines Herz und sein wohlwollendes Gemüth!

Den Männern der Wissenschaft wird er immerdar ein leuchtendes Vorbild bleiben in der Lauterkeit, in dem hohen Ernste und in der Sittlichkeit seines Strebens; Allen aber, und vor Allem unserer Jugend mag zum Troste und zum erhebenden Beispiele dienen, widrige Verhältnisse zu beringen: seine unvergleichliche Ausdauer und Arbeitsamkeit, und dass er seine grossen Erfolge nur sich selbst zu danken hatte.

Mühleck, Graz und ganz Steiermark aber mag sich überglücklich schätzen, einen so seltenen Mann in seinen Räumen beherbergt zu haben: „Die Stelle, die ein edler Mensch betrat, bleibt geweiht für alle Zeiten!"

Digitized by Google

XIX.

Beitrag zur Theorie der elliptischen Integrale.

Von

Herrn *Franz Unferdinger*,

Lehrer der Mathematik an der öffentlichen Oberrealschule am hohen Markt in Wien.

Einleitung.

Der Beweiss, dass für F als rationale Function

(I) $$\int\frac{F(x)dx}{\sqrt{A_0+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+A_4x^4}}$$

durch die bekannten drei Gattungen elliptischer Integrale dargestellt werden kann, besteht nach Legendre's Vorgang aus folgenden Momenten: Erstens wird gezeigt, dass

(II) $$\int\frac{dx}{\sqrt{A_0+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+A_4x^4}}$$

mittelst zweier Substitutionen, also durch Transformation auf die einfachere Form, worin k und z echte Brüche bezeichnen, gebracht werden kann:

(III) $$\int\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}.$$

Digitized by Google

Zweitens wird durch eine weitere Substitution in (I), das algebraische Integrale abgesondert und der aus $F(x)$ erübrigende Rest liefert mit Anwendung der für (III) gebrauchten Substitutionen eine gerade Function von z und diese gibt in ihrem polynomischen Theil Integrale, welche mit n als ganze positive Zahl unter der gemeinschaftlichen Form stehen:

(IV) $$\int \frac{z^{2n}\,dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}};$$

der echt gebrochene Theil des Restes führt durch Zerlegung in Partialbrüche auf Formen wie:

(V) $$\int \frac{dz}{(1+\lambda z^2)^n\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},$$

worin die Constante λ gelegentlich auch imaginaer sein kann. Drittens werden die geeigneten Reductionsformeln entwickelt, um die Exponenten von z^{2n}, $(1+\lambda z^2)^n$ in (IV) und (V) zu verringern, wodurch alles auf die drei Integrale zurückgeführt wird:

(VI) $$\int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}, \quad \int \frac{z^2dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},$$
$$\int \frac{dz}{(1+\lambda z^2)\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}.$$

Endlich viertens gibt die Substitution $z = \sin\varphi$ in (VI) nach einfacher Zerlegung die drei, als Elementarformen acceptirten elliptischen Integrale:

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \int \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi, \int \frac{d\varphi}{(1+\lambda\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}. \text{*)}$$

In Betreff des zweiten Punktes ist hierzu zu bemerken, dass bei der Zerlegung der echtgebrochenen geraden Function in Partialbrüche auch Formen, wie $\frac{1}{z^{2n}}$ auftreten können, wodurch man ausser (V) noch zu dem Integrale gelangt:

$$\int \frac{dz}{z^{2n}\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = \int \frac{d\varphi}{\sin^{2n}\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

welches, um dem Reductionsbeweis seine volle Allgemeinheit zu geben,

---

*) Vergl. Schlömilch's Compendium der h. Analysis 1866, Bd. II, p. 283 — 294.

wieder auf elliptische Integrale zurückzuführen ist. Hierin hat die folgende kleine Untersuchung, zu welcher wir nun übergehen, ihre Entstehung. *)

§. 1.

Unter der Voraussetzung, dass n eine ganze positive Zahl, der Modul $k<1$ ist, die beiden Amplituden x, φ im ersten Quadranten liegen und $x<\varphi$ untersuchen wir die folgenden vier Integrale:

$$(1)\quad \begin{cases} \mathfrak{G}_{2n}=\int_\chi^\varphi \frac{d\varphi}{\sin^{2n}\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, & G_{2n}=\int_\chi^\varphi \frac{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}{\sin^{2n}\varphi}d\varphi, \\ \mathfrak{H}_{2n}=\int_\chi^\varphi \frac{d\varphi}{\cos^{2n}\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, & H_{2n}=\int_\chi^\varphi \frac{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}{\cos^{2n}\varphi}d\varphi. \end{cases}$$

Durch Differenziation überzeugt man sich leicht von der Identität der vier Gleichungen:

(2)

$$\frac{1}{\sin^{2n}\varphi\varDelta}=\frac{(2n-2)(1+k^2)}{2n-1}\frac{1}{\sin^{2n-2}\varphi\varDelta}-\frac{(2n-3)k^2}{2n-1}\frac{1}{\sin^{2n-4}\varphi\varDelta} -\frac{1}{2n-1}\frac{d}{d\varphi}\left\{\frac{\varDelta\cos\varphi}{\sin^{2n-1}\varphi}\right\},$$

$$\frac{\varDelta}{\sin^{2n}\varphi}=\frac{(2n-2)+(2n-4)k^2}{2n-1}\frac{\varDelta}{\sin^{2n-2}\varphi}-\frac{(2n-5)k^2}{2n-1}\frac{\varDelta}{\sin^{2n-4}\varphi} -\frac{1}{2n-1}\frac{d}{d\varphi}\left\{\frac{\varDelta^3\cos\varphi}{\sin^{2n-1}\varphi}\right\},$$

$$\frac{1}{\cos^{2n}\varphi\varDelta}=\frac{(2n-2)(1-2k^2)}{(2n-1)(1-k^2)}\frac{1}{\cos^{2n-2}\varphi\varDelta}+\frac{(2n-3)k^2}{(2n-1)(1-k^2)}\frac{1}{\cos^{2n-4}\varphi\varDelta} +\frac{1}{(2n-1)(1-k^2)}\frac{d}{d\varphi}\left\{\frac{\varDelta\sin\varphi}{\cos^{2n-1}\varphi}\right\},$$

$$\frac{\varDelta}{\cos^{2n}\varphi}=\frac{(2n-2)-(4n-6)k^2}{(2n-1)(1-k^2)}\frac{\varDelta}{\cos^{2n-2}\varphi}+\frac{(2n-5)k^2}{(2n-1)(1-k^2)}\frac{\varDelta}{\cos^{2n-4}\varphi} +\frac{1}{(2n-1)(1-k^2)}\frac{d}{d\varphi}\left\{\frac{\varDelta^3\sin\varphi}{\cos^{2n-1}\varphi}\right\},$$

*) Obgleich Legendre in seinem Traité des fonctions elliptiques, Paris 1825. zur allgemeinen Reduction des Integrals (I) einen etwas anderen Gedankengang befolgt und T. I. p. 13 die Form $\int\frac{d\varphi}{\sin^{2n}\varphi\varDelta}$, so wie ihre besondere Reduc-

Digitized by Google

wobei die bekannte Abkürzung gebraucht wurde: $\varDelta = \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}$. Speciell für $n=2$ wird:

(3)

$$\frac{1}{\sin^4\varphi\varDelta} = \frac{2}{3}(1+k^2)\frac{1}{\sin^2\varphi\varDelta} - \frac{1}{3}k^2\frac{1}{\varDelta} - \frac{d}{d\varphi}\left\{\frac{\varDelta\cos\varphi}{\sin^3\varphi}\right\},$$

$$\frac{1}{\sin^4\varphi} = \frac{2}{3}\frac{\varDelta}{\sin^2\varphi} + \frac{1}{3}k^2\varDelta - \frac{1}{3}\frac{d}{d\varphi}\left\{\frac{\varDelta^3\cos\varphi}{\sin^3\varphi}\right\},$$

$$\frac{1}{\cos^4\varphi\varDelta} = \frac{2(1-2k^2)}{3(1-k^2)}\frac{1}{\cos^2\varphi\varDelta} + \frac{k^2}{3(1-k^2)}\frac{1}{\varDelta} + \frac{1}{3(1-k^2)}\frac{d}{d\varphi}\left\{\frac{\varDelta\sin\varphi}{\cos^2\varphi}\right\},$$

$$\frac{\varDelta}{\cos^4\varphi} = \frac{2}{3}\frac{\varDelta}{\cos^2\varphi} - \frac{k^2}{3(1-k^2)}\varDelta + \frac{1}{3(1-k^2)}\frac{d}{d\varphi}\left\{\frac{\varDelta^3\sin\varphi}{\cos^3\varphi}\right\}.$$

Multiplicirt man die Gleichungen (2), (3) mit $d\varphi$ und integrirt zwischen den Grenzen χ, φ, so gelangt man, mit Anwendung der in (1) eingeführten Bezeichnung zu folgenden Reductionsformeln:

(4)

$$\mathfrak{G}_{2n} = \frac{(2n-2)(1+k^2)}{2n-1}\mathfrak{G}_{2n-2} - \frac{(2n-3)k^2}{2n-1}\mathfrak{G}_{2n-4} - \frac{\varDelta\cos\varphi}{(2n-1)\sin^{2n-1}\varphi},$$

$$G_{2n} = \frac{(2n-2)+(2n-4)k^2}{2n-1}G_{2n-2} - \frac{(2n-5)k^2}{2n-1}G_{2n-4} - \frac{\varDelta^3\cos\varphi}{(2n-1)\sin^{2n-1}\varphi},$$

$$\mathfrak{H}_{2n} = \frac{(2n-2)(1-2k^2)}{(2n-1)(1-k^2)}\mathfrak{H}_{2n-2} + \frac{(2n-3)k^2}{(2n-1)(1-k^2)}\mathfrak{H}_{2n-4} + \frac{\varDelta\sin\varphi}{(2n-1)(1-k^2)\cos^{2n-1}\varphi},$$

$$H_{2n} = \frac{(2n-2)-(4n-6)k^2}{(2n-1)(1-k^2)}H_{2n-2} + \frac{(2n-5)k^2}{(2n-1)(1-k^2)}H_{2n-4} + \frac{\varDelta^3\sin\varphi}{(2n-1)(1-k^2)\cos^{2n-1}\varphi}.$$

---

tion erwähnt, so ist dennoch die Umwandlung von $\int\frac{d\varphi}{\sin^2\varphi\varDelta}$ in elliptische Integrale und die Discussion des Falles der Unstetigkeit übergangen. In der Darstellung von Grunert (Supplemente zu Klügel's Wörterbuch, Leipzig 1836, Bd. II, p. 92) wird der Fall $C=0$, welcher dem obigen entspricht, übergangen.

Herr (Lehrbuch der h. Mathematik, Wien 1864, Bd. II, p. 500) berücksichtiget zwar den Fall $C=0$, jedoch ist die Reductionsformel p. 503 unbrauchbar für $a=0$, $k=1$, $n=\infty$.

Schellbach (Lehre von den elliptischen Integralen etc., Berlin 1864, p. 14) lässt den entsprechenden Fall $a=0$ ebenfalls unerörtert.

Digitized by Google

$$(5)\quad \begin{cases} \mathfrak{G}_4 = \frac{2}{3}(1+k^2)\mathfrak{G}_2 - \frac{1}{3}\left\{k^2F(\varphi)+\frac{\Delta\cos\varphi}{\sin^3\varphi}\right\}_\chi^\varphi, \\ G_4 = \frac{2}{3}G_2+\frac{1}{3}\left\{k^2E(\varphi)-\frac{\Delta^3\cos\varphi}{\sin^3\varphi}\right\}_\chi^\varphi, \\ \mathfrak{H}_4 = \frac{2(1-2k^2)}{3(1-k^2)}\mathfrak{H}_2+\frac{1}{3(1-k^2)}\left\{k^2F(\varphi)+\frac{\Delta\sin\varphi}{\cos^3\varphi}\right\}_\chi^\varphi, \\ H_4 = \frac{2}{3}H_2-\frac{1}{3(1-k_2)}\left\{k^2E(\varphi)-\frac{\Delta^3\sin\varphi}{\cos^3\varphi}\right\}_\chi^\varphi. \end{cases}$$

Hieraus erhellt, dass die am Eingange bezeichneten vier Integrale für jedes ganze positive n gefunden werden können, wenn man sie für $n=1$ kennt.

§. 2.

Es bestehen ferner noch folgende Identitäten:

$$\Delta = \frac{1}{\Delta} - \frac{k^2\sin^2\varphi}{\Delta}, \qquad \Delta = (1-k^2)\frac{1}{\Delta}+k^2\frac{\cos^2\varphi}{\Delta},$$

multiplicirt man dieselben einzeln und beziehungsweise mit:

$$\frac{d\varphi}{\sin^{2n}\varphi}, \qquad \frac{d\varphi}{\sin^2\varphi}; \qquad \frac{d\varphi}{\cos^{2n}\varphi}, \qquad \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}$$

und integrirt die Producte von x bis φ, so folgt nach unserer Bezeichnung:

$$(6)\quad \begin{cases} G_{2n} = \mathfrak{G}_{2n} - k^2\mathfrak{G}_{2n-2}, \\ H_{2n} = (1-k^2)\mathfrak{H}_{2n}+k^2\mathfrak{H}_{2n-2}, \\ G_2 = \mathfrak{G}_2 - k^2F(\varphi)\Big\}_\chi^\varphi, \\ H_2 = (1-k^2)\mathfrak{H}_2+k^2F(\varphi)\Big\}_\chi^\varphi. \end{cases}$$

Jedes Integrale von der Form G, H in (1) kann also aus solchen von der Form $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ und elliptischen Integralen der ersten Gattung abgeleitet werden; dieses mit dem Vorhergehenden vereiniget macht ersichtlich, dass jedes der Integrale (1) aus $\mathfrak{G}_2$, $\mathfrak{H}_2$ und elliptischen Integralen der ersten und zweiten Gattung gefunden werden kann.

Digitized by Google

§. 3.

Nun folgt aus den leicht zu prüfenden Gleichungen:

$$\frac{1}{\sin^2\varphi\Delta} = \frac{1}{\Delta} - \Delta - \frac{d}{d\varphi}\{\Delta \operatorname{ctg}\varphi\},$$
$$\frac{1-k^2}{\cos^2\varphi\Delta} = (1-k^2)\frac{1}{\Delta} - \Delta + \frac{d}{d\varphi}\{\Delta \operatorname{tg}\varphi\},$$
$$\frac{\Delta}{\sin^2\varphi} = (1-k^2)\frac{1}{\Delta} - \Delta - \frac{d}{d\varphi}\{\Delta \operatorname{ctg}\varphi\},$$
$$\frac{\Delta}{\cos^2\varphi} = \frac{1}{\Delta} - \Delta + \frac{d}{d\varphi}\{\Delta \operatorname{tg}\varphi\}$$

durch Multiplication mit $d\varphi$ und Integration von x bis φ:

$$(7)\,{}^{*)}\quad \begin{cases} \mathfrak{G}_2 = \{F(\varphi) - E(\varphi) - \Delta \operatorname{ctg}\varphi\}_{\chi}^{\varphi}, \\ (1-k^2)\mathfrak{H}_2 = \{(1-k^2)F(\varphi) - E(\varphi) + \Delta \operatorname{tg}\varphi\}_{\chi}^{\varphi}, \\ G_2 = \{(1-k^2)F(\varphi) - E(\varphi) - \Delta \operatorname{ctg}\varphi\}_{\chi}^{\varphi}, \\ H_2 = \{F(\varphi) - E(\varphi) + \Delta \operatorname{tg}\varphi\}_{\chi}^{\varphi}, \end{cases}$$

womit $\mathfrak{G}_2$, $\mathfrak{H}_2$, G_2, H_2 durch elliptische Integrale der ersten und zweiten Gattung dargestellt sind. Es ist nun evident, dass auch die Integrale (1) auf solche zurückführbar sind; so giebt die Substitution der Werthe aus (7) in (5):

(8)

$$\mathfrak{G}_4 = \frac{1}{3}\left\{(2+k^2)F(\varphi) - 2(1+k^2)E(\varphi) - 2(1+k^2)\Delta \operatorname{ctg}\varphi - \frac{\Delta\cos\varphi}{\sin^3\varphi}\right\}_{\chi}^{\varphi},$$

$$(1-k^2)\mathfrak{H}_4 = \frac{1}{3}\left\{(2-3k^2)F(\varphi) - \frac{2(1-2k^2)}{1-k^2}E(\varphi) + \frac{2(1-2k^2}{1-k_2}\Delta \operatorname{tg}\varphi + \frac{\Delta\sin\varphi}{\cos^3\varphi}\right\}_{\chi}^{\varphi},$$

$$G_4 = \frac{1}{3}\left\{2(1-k^2)F(\varphi) - (2-k^2)E(\varphi) - 2\Delta \operatorname{ctg}\varphi - \frac{\Delta^3\cos\varphi}{\sin^3\varphi}\right\}_{\chi}^{\varphi},$$

$$(1-k^2)H_4 = \frac{1}{3}\left\{2(1-k^2)F(\varphi) - (2-k^2)E(\varphi) + 2(1-k^2)\Delta \operatorname{tg}\varphi + \frac{\Delta^3\sin\varphi}{\cos^3\varphi}\right\}_{\chi}^{\varphi}.$$

---

*) Vergl. Legendre's Traité, T. I, p. 141, p. 257.

Digitized by Google

Aus den letzten zwei Gleichungen in (7) folgen auch noch die Beziehungen:

$$(9)\quad \begin{cases} G_2 = (1-k^2)\mathfrak{H}_2 - \left.\dfrac{\Delta}{\sin\varphi\cos\varphi}\right\}_\chi^\varphi \\[2ex] H_2 = \mathfrak{G}_2 + \left.\dfrac{\Delta}{\sin\varphi\cos\varphi}\right\}_\chi^\varphi . \end{cases}$$

§. 4.

Für $\chi = 0$ gehen die Functionen unter den Integralzeichen in $\mathfrak{G}_{2n}$, G_{2n} durch $\pm\infty$, ebenso jene in $\mathfrak{H}_{2n}$, H_{2n} für $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ und wie die Formeln (7) zeigen, werden $\mathfrak{G}_2$, G_2 für $\chi = 0$, $\pm\infty$ und $\mathfrak{H}_2$, H_2 für $\varphi = \frac{1}{2}\pi$. Werden im Intervall der Integration diese Grenzfälle, als Punkte der Unstetigkeit ausgeschlossen, liegen also die beiden Amplituden χ, φ in demselben Quadranten, so kann man die entsprechenden Integrale immer auf solche im ersten Quadranten reduciren; denn es ist für

$$(10)\quad \begin{cases} \chi,\ \varphi \text{ im 2. Quadranten}, & \mathfrak{G}_2(\chi,\varphi) = \mathfrak{G}_2(\pi-\varphi,\ \pi-\chi), \\ \text{- - - 3. -} & \mathfrak{G}_2(\chi,\varphi) = \mathfrak{G}_2(\chi-\pi,\ \varphi-\pi), \\ \text{- - - 4. -} & \mathfrak{G}_2(\chi,\varphi) = \mathfrak{G}_2(2\pi-\varphi,\ 2\pi-\chi) \end{cases}$$

und ebenso verhält es sich mit den Integralen G_2, $\mathfrak{H}_2$, H_2.

Für $k = 0$ und $k = 1$ verwandeln sich unsere Integrale in gewöhnliche goniometrische Formen, deren Reduction und Auswerthung hinlänglich bekannt ist.

Mittelst der obigen Relationen zwischen den Integralen $\mathfrak{G}_2$, $\mathfrak{H}_2$, G_2, H_2, lassen sich manche andere Formen durch elliptische Integrale der ersten und zweiten Gattung darstellen; so findet man damit:

(11)

$$\int_\chi^\varphi \frac{d\varphi}{1 \pm \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \frac{1}{k^2}\Big\{\pm E(\varphi) \mp (1-k^2)F(\varphi) - (1\mp\Delta)\operatorname{ctg}\varphi\Big\}_\chi^\varphi,$$

$$\int_\chi^\varphi \frac{d\varphi}{\sin^2\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}^{\,3}} = \left\{F(\varphi) - \frac{1-2k^2}{1-k^2}E(\varphi) - \operatorname{ctg}\varphi - \frac{k^4\sin\varphi\cos\varphi}{(1-k^2)\Delta}\right\}_\chi^\varphi .$$

Digitized by Google

§. 5.

Für alle reellen Werthe von x ist:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{1+x^2}} \overline{>} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}},$$

folglich nach einem bekannten Theorem der Integralrechnung, wenn x einen positiven Werth bezeichnet:

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^2}} \overline{>} \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \lg(x+\sqrt{1+x^2}),$$

für $x=\infty$ wird die Function rechts ∞, woraus sich ergibt:

(12) $$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^2}} = \infty.$$

Als Anwendung der vorhergehenden Theorie, zeigen wir die Berechnung des Integrals:

(13) *) $$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^2}} = \frac{3}{2}\int_1^z \frac{zdz}{\sqrt{z^3-1}},$$

welches nach der Substitution:

(14) $$1+x^2=z^3$$

in das nebenstehende übergeht.

§. 6.

Durch Einführung der neuen Variabeln y im Sinne der Gleichung:

(15) $$z=1+\sqrt{3}\,\frac{y-1}{y+1} \text{ oder } y=\frac{\sqrt{3}+(z-1)}{\sqrt{3}-(z-1)},$$

erhält man:

---

1) Da wir dieses Integrale anderwärts nicht finden, dasselbe kommt auch in den Tafeln von Bierens de Haan nicht vor, so sei es erlaubt dessen Entwickelung hier mitzutheilen.

Digitized by Google

(16)

$$\int\frac{zdz}{\sqrt{z^3-1}}=\frac{2\sqrt{\alpha}}{\sqrt[4]{3}}\int\frac{dy}{\sqrt{(y^2-1)(y^2+\alpha^2)}}+2\sqrt{\alpha}\sqrt[4]{3}\int\frac{y-1}{y+1}\frac{dy}{\sqrt{(y^2-1)(y^2+\alpha^2)}},$$

wobei der Kürze halber gesetzt wurde:

(17) $\alpha=2-\sqrt{3};\qquad 1+\alpha^2=4\alpha,\qquad (1+\alpha^2)(4-\alpha)=4.$

Im zweiten Integrale rechts benützen wir die Identität:

$$\frac{y-1}{y+1}=\frac{y^2+1}{y^2-1}-\frac{2y}{y^2-1},$$

wodurch dasselbe in zweie zerfällt, führen statt y eine andere Veränderliche φ ein, durch die Substitution:

(18) $$\begin{cases} y=\dfrac{1}{\cos\varphi}, & y^2-1=\operatorname{tg}^2\varphi, \quad y^2+1=\dfrac{2}{\cos^2\varphi}-\operatorname{tg}^2\varphi, \\ \dfrac{y^2-1}{y^2+1}=\dfrac{2}{\sin^2\varphi}-1, & dy=\dfrac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}d\varphi \end{cases}$$

und gebrauchen die Abkürzung:

(19) $$k=\tfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}=\sin\frac{\pi}{12},\qquad \alpha=4k^2.$$

Hierdurch wird:

$$\int\frac{zdz}{\sqrt{z^3-1}}=\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}+\sqrt[4]{3}\int\left(\frac{2}{\sin^2\varphi}-1\right)\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$
$$-2\sqrt[4]{3}\int\frac{\cos\varphi d\varphi}{\sin^2\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

$$\int\frac{zdz}{\sqrt{z^3-1}}=2\sqrt[4]{3}\,G_2+\sqrt[4]{3}\,\frac{\sqrt{3}-3}{3}F(\varphi)+2\sqrt[4]{3}\,\frac{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}{\sin\varphi}$$

oder wenn man für G_2 den Werth aus (7) einsetzt und reducirt:

(20) $$\int_1^z\frac{zdz}{\sqrt{z^3-1}}=\sqrt[4]{3}\left\{\frac{3+\sqrt{3}}{3}F(\varphi)-2E(\varphi)+2\Delta\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi\right\}_0^\varphi.$$

§. 7.

Zwischen z und φ, respective x und φ, bestehen nach dem Vorhergehenden die Gleichungen:

Digitized by Google

$$(21)\quad \begin{cases} \sin\varphi = \dfrac{2\sqrt{\sqrt{3}(z-1)}}{\sqrt{3}+(z-1)} = \dfrac{2\sqrt{\sqrt{3}\,(\sqrt[3]{1+x^2}-1)}}{\sqrt{3}+\sqrt[3]{1+x^2}-1}, \\[2ex] \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi = \sqrt{\dfrac{z-1}{\sqrt{3}}} = \sqrt{\dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{\sqrt{3}}}, \end{cases}$$

so dass $z=1$, $\varphi=0$ entspricht, für welchen Werth der Ausdru in (20) rechter Hand verschwindet. Dieser Fall tritt ein für $x=0$ für alle anderen reellen Werthe von x ist nach (14) $z>1$ und wi man leicht erkennt, entspricht

$$(22)\quad z=\zeta=1+\sqrt{3},\qquad x=\xi=\sqrt{3(3+2\sqrt{3})},\qquad \varphi=\tfrac{1}{2}\pi.$$

Fass man dieses zusammen, so folgt nach (13):

$$(23)\quad \int_0^x \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^2}} = 3\sqrt[4]{3}\left\{\frac{3+\sqrt{3}}{6}F(k\varphi)-E(k\varphi)+\Delta\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi\right\}^{\varphi},$$

$$(24)\quad \int_0^\xi \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^2}} = 3\sqrt[4]{3}\left\{\frac{3+\sqrt{3}}{6}F'(k)-E'(k)+\tfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}\right\}.$$

Durch dieselben Substitutionen findet man auch:

$$(25)\quad \int_0^x \sqrt[3]{1+x^2}\,dx = \frac{3}{5\sqrt[4]{3}}F(k\varphi)+\frac{3x}{5}\sqrt[3]{1+x^2},$$

$$(26)\quad \int_0^\xi \sqrt[3]{1+x^2}\,dx = \frac{3\sqrt[4]{3}}{5}\left\{\frac{\sqrt{3}}{3}F'(k)+\sqrt{2(3+2\sqrt{3})}\right\}.$$

Transportirt man in (25) das letzte Glied in den ersten Thei so ergiebt sich nach kurzer Rechnung:

$$(27)\quad \int_0^x \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^2}^{\,2}} = \frac{3}{2\sqrt[4]{3}}F(k\varphi),$$

$$(28)\quad \int_0^\xi \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^2}^{\,2}} = \frac{3}{2\sqrt[4]{3}}F'(k).$$

Ist $x>\xi$, also $z>\zeta$, so wird nach (21) $\varphi>\frac{1}{2}\pi$, $\varphi=\pi-\psi$ wobei ψ im ersten Quadranten liegt und man hat die bekannten Be-ziehungen zu berücksichtigen:

Digitized by Google

29) $$F(\varphi) = 2F' - F(\psi), \qquad E(\varphi) = 2E' - E(\psi).$$

Wird endlich $x = \infty$, so folgt $z = \infty$, $\varphi = \pi$, hierdurch erlangen die letzten Glieder in (20) und (23) ebenfalls den Werth ∞, so dass übereinstimmend mit (12):

30) $$\int_1^z \frac{z\,dz}{\sqrt{z^3-1}} = \infty, \qquad \int^\infty \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^2}} = \infty.$$

§. 8.

Zum Schluss geben wir noch die Zusammenstellung der bemerkenswerthen besonderen Fälle. Nach (14) und (21) wird für:

$$\begin{array}{lll}
\varphi = 0, & z = 1, & x = 0, \\
\quad = 30^0, & \quad = 7\sqrt{3}-11, & \quad = \sqrt{3(1190\sqrt{3}-2061)}, \\
\quad = 60^0, & \quad = 1+\tfrac{1}{3}\sqrt{3}, & \quad = \tfrac{1}{3}\sqrt{9+10\sqrt{3}}, \\
\quad = 90^0, & \quad = 1+\sqrt{3}, & \quad = \sqrt{3(3+2\sqrt{3})}, \\
\quad = 120^0, & \quad = 1+3\sqrt{3}, & \quad = 3\sqrt{9+10\sqrt{3}}, \\
\quad = 150^0, & \quad = 13+7\sqrt{3}, & \quad = \sqrt{3(1526\sqrt{3}+2643)}, \\
\quad = 180^0, & \quad = \infty, & \quad = \infty.
\end{array}$$

Die folgende kleine Tafel gibt die diesen Grenzen entsprechenden numerischen Werthe der Integrale (23), (25), (27):

x	$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^2}}$	$\int_0^x \sqrt[3]{1+x^2}\,dx$	$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^2}^{\,2}}$
0·6491415	0·6214910	0·6773261	0·5985160
1·710117	1·421552	2·100698	1·205566
4·403669	2·693439	7·947228	1·821488
15·39105	4·064878	58·58626	3·417660
125·9298	12·79666	1900·772	6·074496
∞	∞	∞	∞

Um die Berechnung von φ für andere Werthe von x zu erleichtern, führt man nach (21) zwei Hilfswinkel λ, μ ein, durch die Beziehungen:

31) $$x = \operatorname{tg}\lambda, \qquad \cos\mu = \sqrt[3]{\cos\lambda}, \qquad \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi = \frac{\operatorname{tg}\mu}{\sqrt[4]{3}},$$

welche Formeln uns, in umgekehrter Anordnung auch bei der Berechnung der vorstehenden Werthe von x dienlich waren.

XXI.

Die steierischen Landschaftsmathematiker vor Kepler.

Von

Herrn Dr. *Richard Peinlich*,
Director des k. k. Ober-Gymnasiums in Graz.

In diesen Tagen, wo die Hauptstadt Graz endlich einmal daran ist, dem Gedächtnisse Kepler's die langversäumte Ehrenschuld zu zahlen und das mehrjährige Weilen dieses Gelehrten von seltener Grösse des Geistes und des Herzens durch ein sichtbares Wahrzeichen zu verewigen, berechtigt das Interesse, welches die ganze Welt an diesem Heros nimmt, zur Annahme, dass Freunde der Geschichte auch minder bedeutendem ihre Aufmerksamkeit zuwenden, sobald es wenn auch nur in mittelbarer Beziehung zu Kepler steht.

Magister Johann Kepler war hier in Graz, wie bekannt, vom 11. April 1594 bis 30. Septemqer 1600 „einer ehrsamen Landschaft des Fürstenthums Steier Mathematiker". Vor demselben hatten zwei Männer diese Stellung, nach ihm keiner.

Hätte nicht Kepler diese Anstellung europa- ja weltbekannt gemacht, wem würde es wohl in Graz, geschweige wo anders, merkwürdig erscheinen, dass es einst steirische Landschaftsmathematiker gab und dass Hieronymus Lauterbach und Georg Stadius solche waren?

Doch es dürfte zunächst die Frage nicht unnütz sein, was soll das heissen: ein steierischer Landschaftsmathematiker? Die Landschaft hatte im sechzehnten Jahrhunderte von welchem wir sprechen, bereits ein sehr zahlreiches Beamtenpersonale, Sekretär, Buchhalter, Registrator, Bauschreiber, Bauzahlmeister, Gegenschreiber und andere „Kanzleiverwandte"; es gab aber auch landschaftliche „Physiker" (Aerzte), einen landschaftlichen Apotheker, eine landschaftliche Hebamme (und diese mit einer ganz netten Besoldung), einen landschaftlichen Buchdrucker (die Regierung wollte es freilich nicht dulden), einen Buechfürer", d. i. Buchhändler (jedoch nur mit einer „Scheinbestallung"); dafür wurde umso merkbarer die Bestallung der landschaftlichen Trompeter, des Heerpaukers, des Profossen, ja 1545 hören wir auch von einem landschaftlichen Lautenschlager und er hatte einen fast ebenso grossen Gehalt, als der landschaftliche Kaplan.

Bei allen diesen Anstellungen, und es gab deren noch mehrere, bezeichnet schon der Name ihren Zweck; aber wozu bedurfte man eines Landschaftsmathematikers?

Hat vielleicht die Bezahlung der übernommenen Hofschulden Karl's II. im Betrage von einer Million Pfund Pfenningen der Landschaft so viel Rechnens gemacht? Nun, der Seckel der Kontribuenten fand es gerade nicht, dass hiebei eine reinere Mathematik als sonst Platz gegriffen hätte.

Um es kurz zu machen, der Landschafssmathematikus war nichts mehr und nichts weniger als der Kalendermacher für Graz und die Steiermark, oder, wenn der Titel schöner klingen soll, der Astronom, wenn er genauer sein soll, Astrolog des Landes. Dass dieser nebstbei die Mathematik, oder besser gesagt, die Astronomie an der landschaftlichen Schule lehrte, thut nichts zur Sache und war keine unumgängliche Nothwendigkeit. Für diese Amtsthätigkeit hatte er seinen besonderen Titel, so Lauterbach den einer Oberpräceptors, sein Nachfolger Stadius den eines Professors der Astronomie, oder, wie es gangbarer war, der Mathematik, welchen Titel auch dessen Nachfolger Kepler führte. Den besten und kürzesten Beweis für diese Angabe gibt die Thatsache, dass Stadius 1584 seine Professur niederlegte, sich aber die Stelle des Mathematikus vorbehielt *); wie ja auch Kepler 1598 mit der Aufhebung der landschaftlichen Stiftschule sein Lehramt verlor, aber Mathematikus blieb.

*) Diese Angabe, wie alle anderen dieses Aufsatzes, sind quellenmässig sicher und beruhen zum Theile auf Akten und Protokollen im steier. Landesarchive, zum Theile auf den gedruckten Kalendern der besprochenen Personen.

Digitized by Google

Mit Zuhörern für diese Mathematik-Lektion sah es indessen für gewöhnlich übel aus. Lauterbach hatte kaum einige, Stadius nur zeitweilig, Kepler anfangs gar keine, zuletzt nur wenige Schüler „da ja mathematicum studium nicht jedermanns thuen ist.“ Eben deshalb musste auch Kepler auf des gar sparsamen Landschaftssekretärs Stefan Speidl Andringen „Arithmeticam, Virgilium und Rhetoricam sechs stund in der wochen in superioribus classibus dociren“ — weil es doch nicht ginge, ihm die Besoldung (150 fl.) wegen des Kalendermachens allein zu geben, da Stadius, als er blos Mathematiker war, nicht mehr als 32 fl. dafür gehabt hätte.

Was war nun die Aufgabe des Kalendermachers? Er musste aus den vorhandenen grossen und gelehrten kalendarischen Werken das Erforderliche und Spezielle für das betreffende Jahr auslesen, er musste aus den Alphonsischen, oder aus den Copernicanischen Tafeln den regierenden Planeten heraussuchen, die Sonnen- und Mondes-Finsternisse, die Stellung der Gestirne, ihre Konjunktionen und Aspekte u. a. m. für die Polhöhe von Graz berechnen und berichten. Hiezu bedurfte es freilich astronomischer und mathematischer Kenntnisse, wenn auch nicht in gar hohem Grade. Daher publizirten auch andere, als Fachmänner derlei, wie z. B. die Medizin-Doktoren Chr. Widmann (1570), Jakob Strauss (von 1570 bis 1583 und nach dreijähriger Pause wegen des neuen Styles auch noch andere Jahre) und der Agramer Domherr, Gregor Farenych, 1594 in Graz gedruckte Almanach's und Kalender für Steiermark. Und wahrscheinlich spielt Stadius auf diese oder ähnliche Dilettanten an, wenn er (im Schreibkalender auf 1592) von Kalendermachern spricht, welche die Fundamentalrechnung nicht können.

Aber zu jedem Kalender gehörte auch als ein wesentlicher, wiewohl besonderer Theil, die Praktica oder das Prognosticon, d. i. die Voraussagung, welchen Einfluss die Gestirne auf die Erde, auf das Reich, auf den Staat, auf die Orte, auf die Luft, auf die Felder und Früchte, auf die Menschen und ihre Gesundheit haben werden. Das war nicht mehr Sache der Astronomie, sondern einer besonderen Kunst der Astrologie*). Diese war eben in jener Zeit mehr praktisch und mehr dankbar, als jene; fürwahr, wäre dieselbe nicht gewesen, die Astronome hätten den Bettelstab ergreifen müssen. Sagt doch Kepler selbst (im Schreiben an Mästlin vom 26. Februar 1599):

*) In den zwanziger Jahren des 16. Jahrhundertes gab Johann Schrötter in Wien eine Anleitung, Vorhersagungen aus den Gestirnen zu machen, sogar in usum studiosorum heraus; für Gelehrte bestanden derlei Werke natürlicher Weise schon längst

Digitized by Google

„Wenn Gott einem jeden Thiere die Mittel zur Erhaltung seines Lebens verlieh, warum sollte es denn nicht sein, dass er in gleicher Absicht dem Astronomen die Astrologie gab?“

So musste denn der Kalendermacher, um des lieben Lebens willen, auch Sterndeuter sein. Verstand er es auch noch, wie Stadius und namentlich auch Kepler, mit Glück und Geschick die Nativität zu stellen (d. i. aus dem Stande der Gestirne bei der Geburt eines Menschen dessen Natur, Charakter und Schicksale vorherzusagen), so war ihm die Existenz und wohl auch das Ansehen bei Vornehm und Gering gesichert. Freilich jene schöne Zeit des Regiomontanus (1476), wo ein Kalender mit 12 Dukaten bezahlt wurde, war längst vorüber; doch verschaffte das Honorar (die „Ehrung“ oder „Ergötzlichkeit“) für die Dedicirung eines Kalenders und die Ueberreichung von Exemplaren an angesehene Leute dem Kalendermacher eine nicht unbedeutende Zubusse zu den Einkünften und die Mittel, wenn er gerade wollte, auch die Astronomie zu betreiben.

Hiermit haben wir die Stellung eines Landschaftsmathematikers hinlänglich erörtert und können zur biographischen Skizze Lauterbach's, als des ersten, welcher eine solche in Graz einnahm, übergehen.

Der Adel Steiermarks hatte bereits 1540 am Landtage zu Graz für nothwendig erachtet, Anstalt zu treffen, dass eine gediegene Schulbildung nicht blos den Kindern der reichbegüterten Edeln, sondern auch jenen der minder bemittelten zugänglich gemacht werde. Als dieser kluge Beschluss etwa 1544 durch Errichtung einer Schule im Landhause zu Graz in's Leben getreten war, fanden sich wieder mancherlei Zufälle, die einem sicheren Fortschritte dieser Schule abträglich waren; insbesondere hatte die Landschaft mit dem Rectoren derselben wenig Glück. Der erste, Sebastian Leuttner, brachte sie zwar in ziemliches Aufnehmen, starb aber schon 1551; der zweite, Barthlmä Schräckh, wiewohl er schon 1538 eine Privatschule in Graz geleitet hatte, brachte sie binnen einem Jahre so herunter, dass man ihn 1553 wieder abdankte. Der dritte, Magister Barthlmä Pica, früher Stadtschreiber in Graz, ein vortrefflicher Lehrer, wurde „Religionssachen halber“, d. i. wegen seines ausgesprochenen Eifers für die evangelische Confession vom Kaiser Ferdinand 1554 gänzlich abgeschafft. Nun wurde als der vierte in der Reihe, M. Georg Nagl, Oberpräceptor, ganz gewiss eine tüchtige Lehrkraft, da er vorher kais. Edelknaben-Präceptor in Wien gewesen war, allein 1560 bekam er wegen Fahrlässigkeit in der Oberaufsicht ohne weitere Umstände den Abschied.

So war denn die Schule wieder verwaist. Als sich daher die Landschaft zur geeigneten Abhilfe an die Wiener Universität wandte,

Digitized by Google

erbot sich der Professor der Mathematik an derselben, M. Hieronymus Lauterbach, für die Stelle des Oberpräceptors und wurde, da er [illegible] Bestimmung hatte, ohne weiters angenommen.

Lauterbach, zu Löbau in der damals noch österreichischen Lausitz geboren, hatte seine Studien vor kurzem in Wien vollendet, war [illegible] mit dem ersten Rang unter seinen Collegen zum Doctor (Magister) der Philosophie promovirt worden und hatte auch daselbst bald darauf eine Professur der Mathematik erlangt.

Neben dieser strengen und ernsten Wissenschaft muss er aber auch mit Glück der [illegible] Muse gepflegt haben, denn als der kaiserliche Mathematiker Dr. Paul Fabricius, als Stellvertreter des Kaisers, den Heinrich Eckard von Nürnberg am 4. Juli 1558 zum Dichter krönte, finden wir Lauterbach unter den auserwählten Festrednern, als welcher er ein von ihm verfasstes Carmen gratulatorium vortrug.*)

Im Jahre 1561 war er Decan der philosophischen Fakultät, resignirte aber am 11. Mai desselben Jahres auf diese Ehrenstelle und auf die Professur, da er die Stelle am „landschaftlichen Gymnasium" in Graz vorzog. Vielleicht haben ihn finanzielle Rücksichten hiebei gelockt, denn der Gehalt als Universitäts-Professor in Wien dürfte kaum über 100 fl. hinausgegangen sein,**) was ihm in Graz geboten wurde, beläuft sich auf 200 fl. Jahresgehalt, 32 fl. für Holz und Licht und ein „Zimmerl" im Landhause. Hiemit sollte er sich unterdessen begnügen, wenn man seinen Fleiss „gspüren" würde, werde man ihn später bedenken. Hiezu, d. h. zum Bedenken, kam es — nebenbei gesagt — freilich nie.

Lauterbach übernahm die Schule in einem stark heruntergekommenen Zustande und musste bald erfahren, dass er hier eine ebenso schwierige, als undankbare Aufgabe übernommen habe. Es waren ihm drei „Substituten" (Unterpräceptoren) beigegeben, die er selbst für verwendbar erklärt hatte, aber die Lections- und Schulordnung musste er, als zu mangelhaft, verwerfen. Er verfasste 1562 selbst eine neue und legte sie dem Landtage zur Genehmigung vor. Dieser ernannte hiezu wiederholt vielköpfige Commissionen, die nicht zu-

---

*) Denis, Gar. Biblioth. Seite 298. — Im Jahre 1558 war auch ein M. Johann Lauterbach, ebenfalls zu Lobau (1531) geboren, in Wien (sicherlich ein Bruder unseres Lauterbach). Er wurde dort zum Dichter gekrönt, geadelt, wurde 1567 Rector in Heilbronn und starb 1593. (Progr. des Karls-Gymnasiums in Heilbronn, 1858, Seite 6.)

**) Kink, Geschichte der Universität. Wien I. 2. Theil, Seite 166.

sammen traten, und wenn dies geschah, zu keinem Resultat gelangten. So war noch 1565 alles beim alten, selbst auch die Klagen über den misslichen Zustand der Schule. Dass hiebei aber auch Privataffekte eine Rolle spielten, geht aus den Klagepunkten heror, welche Franz von Teuffenbach sogar schriftlich bei dem Landtage einbrachte: Von den Substituten thue ein jeder, was er will, auf Lauterbach achte keiner, und auch er gebe auf diese nicht Acht. Er kümmere sich nicht um das, was sie lehren und was die Knaben lernen, und so käme es, dass die Knaben nicht Latein reden und zu oft Ferien haben. „In Summa: „Der Präceptor sammt seinen Substituten haben so gerne Remissionen, als die Buben. Haben alle junge Weiber genommen und gedenken mehr auf ihre Sachen, als auf die Lernung der Knaben.“ Lauterbach bleibe nicht in der Schule, die Substituten zu überwachen, sondern zöge sich mit seinen Knaben, unter welchen sogar 4 nicht-adelige seien, zum Unterricht in sein Wohnzimmer zurück. Endlich warte er seiner Kunst, der Astronomie, mehr aus, als der Schule.“

Da wurde nun wieder eine Commission zusammenberufen, die allerlei Vorschläge machte, von denen keiner zur Ausführung kam, als dieser, dass vier Inspectoren bestellt wurden, zwei aus den Doctoren zu Unterschulherren, welche auf die Schule Achtung geben und es anzeigen sollten, wo etwas beschwerliches vorfiele, und zwei Oberherren aus der Ritterschaft, die derlei Anzeigen vor die Landschaft zu bringen hätten. Was die Hauptsache gewesen wäre, ein organisches Schulstatut zu geben, unterblieb.

Es gab aber noch ganz andere Uebelstände, von denen man sich heutzutage nichts träumen liesse. Die Schule war, wie bereits erwähnt wurde, im Landhause untergebracht; ebendaselbst waren auch einige adelige Knaben bei dem Oberpräceptor in Kost und Wohnung. Im Landhause wurden aber auch nach altem Gebrauche die Hochzeiten der Landstände gehalten. Derlei kamen ziemlich oft im Jahre vor und nahmen jedesmal viele Tage in Anspruch. Und wie toll und voll es bei derlei Festlichkeiten herging, braucht wohl nicht besonders bemerkt zu werden.

Bei solchen Gelegenheiten mussten nun auch die Räumlichkeiten der Schule herhalten, die Jugend wurde in einem hinteren Winkel des Hauses zusammengepfercht und wie es mit Unterricht und Studium während des lauten Festjubels ausgesehen haben mag, lässt sich leicht denken. Und wie hätte nach dem Katzenjammer dieser Tage der Lust der arme Präceptor ohne sonderliche Autorität die Jungens wieder rasch in das rechte Geleise, zum Lerneifer und zur Ordnung

Digitized by Google

bringen können, zumal es unter diesen nicht wenige bereits erwachsene und der strengeren Zucht entwachsene gab. *)

Eben deshalb fand es auch der Landtag schon 1563 nothwendig, für die Schulhaltung einen bleibenden Platz im zweiten Stockwerke auszumitteln und anzuordnen, dass er zu diesem Zwecke „auf das schlechtigste“ (schlichteste) hergerichtet werde; aber bis zum J. 1567 war in dieser Beziehung noch immer nichts geschehen.

Da mochte wohl der bedrängte Oberpräceptor öfters aufgeseufzt haben: Quem Dii odere, pædagogum fecere; aber es half ihm nichts. Ebensowenig gelang es ihm, trotz wiederholten Einschreitens von dem schweren Joche seines Amtes loszukommen. Kein Wunder, wenn er sich dann wieder in die Arme seiner edlen Freundin, der Mathematik, flüchtete und über den Wundern der Sternenwelt die wunderliche Erdenwirthschaft zu vergessen suchte.

Aber nicht blos seine jungen Substituten mit ihren Weibsen brachten ihm Aerger und Verdruss, wenn sie in ihren (in den Bestallungsreversen hochverpönten) zerhackten und zerschlitzten Landsknecht-Pluderhosen, statt in ehrbaren „Präceptoressen-Mänteln“ herumstolzirten und sich, trotz des Verbotes nicht nur „ausladen“ (zu Gaste laden) liessen, sondern auch sich hiebei des „Vollsaufens und Ueberweinens“ nicht entblödeten: auch ein älterer und gestandener Moderator brachte ihm Ungelegenheit und Unannehmlichkeit. Es war dies M. Sebastian Puttrer (von Uebelbach gebürtig), früher deutscher Schul- und Rechenmeister zu Regensburg, welcher 1564 aufgenommen wurde, um die adeligen Knaben täglich zwei Stunden Schreiben und Rechnen zu lehren. Seine Unterrichtsweise fand 1568 Beanständigung und er selbst die Entlassung, weil die Landschaft bemerkte, dass „solche deutsche Schulhaltung vielmehr zur Verhinderung der Jugend, welche in logicalibus instituirt werden soll, denn zur Aufnehmung verricht würde und dass die ingenia puerorum von ihren principiis dadurch abstrahirt werden.“

Der arme Lauterbach bekam bei dieser Gelegenheit eine scharfe Ermahnung, über seine Collegen besser zu wachen und selbst fleissig daran zu sein, dass die edle und zarte Jugend die Zeit nicht vergeblich in den Studien hinbringe und dass namentlich eine „wirkliche Besserung in Erlernung fundamentalium et logicalium artium gespürt und wahrgenommen werde.“

*) Zum Belege kann dienen, dass 1560 mit Melchior Einpacher unterhandelt wurde, dass er die Jugend in der landschaftlichen Schule alle Tage eine oder zwei Stunden in den „weltlichen Rechten“ unterrichte.

Digitized by Google

Das Jahr 1568*) ist in der Geschichte der Landschaftsschule Epoche machend, denn von demselben datirt sicht nicht bloss der Landtagsbeschluss zur Erweiterung und neuen Organisation der Schule, sondern auch der Beginn des Baues eines ansehnlichen eigenen Gebäudes für dieselbe auf der Stelle des alten Eggenbergerstiftes nächst dem Murthore, woraus sich auch der nun üblich werdende Name „Stiftschule" erklärt. Die rasche Förderung dieses Unternehmens war um so dringender, weil sonst — wie es in einem Schreiben der Landschaft an den damaligen Pastor Georg Khuen heisst — „der Eifer der Jesuiten in Errichtung ihrer Schule nicht bloss die arme Jugend, sondern auch die adelige an sich ziehen würde."

Für diese 1574 vollendete Stiftsschule schuf der berühmte Rostocker Gelehrte Dr. Chyträus eine vortreffliche Organisation, liess aber auch zu ihrer Durchführung neue Lehrer und einen neuen Rector und Conrector aus dem Auslande berufen.

Jetzt, wo Lauterbach durch diese gewissermassen überflüssig gemacht wurde, erkannte die Landschaft endlich dessen Verdienste öffentlich an, rühmte, dass er die ganze Zeit her seine Schuldigkeit mit allem Fleisse gethan habe, bedauerte seine Kränklichkeit, die er sich beim Schuldienst zugezogen habe, und bestellte ihn neben dem Rector und Conrector als Senior der Schule, „um diesen mit Rath und Hilfe zur Hand zu sein. Und wenn er auch nicht wie früher ohne Unterlass die Schule halte, so möge er doch die Mathematik in gewissen Stunden und nach Gelegenheit des Auditoriums lehren und auch Landschafts-Mathematicus ohne Schmälerung seiner früheren Besoldung bleiben."

Wie Lauterbach selbst diese Anstellung auffasste, ergibt sich aus der Widmungsschrift seines Kalenders für 1575, in welcher er sagt, er sei bestellt, „damit die ersten Principia vnd anfang (dann sonst etwas höheres bey höheren vnd gelertern leuten vnd hohen schuelen zu suechen) der herlichen künste Astronomie vnd Geographie, die uns die unaussprechliche Werk der Majestät Gottes in dem Himmlischen gepew vnd ordnung der gantzen welt sampt den sternen, erdkrais vnd andern eingelaibten Cörpern für augen stellet, in diesen lanten der jugent möchten fürgehalten vnd eingeflanzt werden."

Als Senior der Schule wurde er auch neben dem Doctor der Theologie Pastor Homberger, dem Doctor der Rechte Adam Venediger, dem Doctor der Arznei Christoph Gabelhofer und

*) 1568 gab Lauterbach seine „Schulordnung" in Druck. (Meusel hist. Litt. IV. S. 322.)

dem Doctor der **Philosophie** Barthelmä **Pica** zum Subinspector der Schule ernannt, wobei er freilich bei dem energischen Wesen dieser Männer und bei seiner Sanftmuth und Bescheidenheit nur das fünfte Rad am Wagen war.

Grösseren Einfluss dürfte er schon bei einem anderen Ehrenamte gehabt haben, das ebenfalls 1574 neu geschaffen wurde. Er wurde nämlich mit dem Bürger Hanns **Aschinger** und mit M. Barthl. **Pica** zum Elemosinarius (Almosenpfleger) ernannt und hatte als solcher die Mitsperre und Verwaltung des gesammten für die Kirche, die Schule und die Armen einlaufenden Geldes.

Diese neuen Aemter und Würden genoss er jedoch nicht lange, da ihn Gott 1577 aus diesem Jammerthale abrief. Lauterbach scheint kein übler Mathematiker, wenigstens ein guter Rechner gewesen zu sein, denn als er 1561 von Wien nach Graz zog, musste er sich zur Uebersiedlung von der Universität 50 fl. ausborgen. *); als er aber starb, hinterliess er seiner Witwe und den Kindern ein Haus nebst Garten unter dem Landhause in der Herrngasse gelegen. Wahrscheinlich zum Behufe dieses Ankaufes hatte er bei der Landschaft eine Schuld von 1000 fl. kontrahirt. Nach seinem Ableben zog die Landschaft von dieser Schuld 200 fl. ab und schenkte sie seinen Kindern in Ansehung der langwierigen und getreuen Dienste, welche er geleistet hatte, stellte jedoch die Bedingung, dass diese 200 fl. ihnen bis zu ihrer „Vogtbarkeit“ (Mündigkeit) nutzbar angelegt bleiben sollten.

Ob sich Lauterbach sein Vermögen mit der nützlichen Kunst des Kalendermachens erwarb, ist schwer zu sagen, doch es ist Thatsache, dass er hiefür besser honorirt wurde, als Stadius und insbesondere als Kepler. Im Durchschnitt belief sich die von der Landschaft angewiesene „Ehrung“ für den Kalender auf 30 Thaler, d. i. 35 Pfund Pfennige, während Kepler nicht mehr als 20 fl. erhielt. Solche Kalender verfasste Lauterbach von 1562 an jedes Jahr und es ist wichtig zu bemerken, dass Graz durch diese Kunst Lauterbach's zu einer Zeit bereits seinen eigenen Kalender hatte, wo noch wenig Städte in Europa sich eines solchen Vorzuges und Vortheiles rühmen konnten.

Einen Kalender besonderer Art publizirte Lauterbach 1572 unter dem Titel: „Ein Newer Historien vnd Schreibkalender, der darin auf alle tag, ausserhalb der gemainen Fest, was sich etwan vor zeiten

---

*) Nach dem 5. Buche der Akten der philos. Fakultät in Wien, Blatt 24. Der Schuldbrief findet sich „in libro bonorum facultatis artium.“ Die Rückzahlung erfolgte erst 1568.

auch itziger zeit zugetragen, kürtzlich verfasset ist." *) — Für diesen erhielt er von der Landschaft 50 Thaler „Ergötzlichkeit."

Der Versuch, auf diesem Wege historische Kenntnisse unter das Volk zu bringen, war jedenfalls löblich und beweist, dass Lauterbach gesunde und klare Ansichten über Volksbildung haben musste. Ebenso gereicht ihm die Geschicklichkeit zur Ehre, mit welcher er astronomische Instrumente verfertigen konnte. Er schenkte dieselbe 1574 an die Bibliothek der Stiftsschule und erhielt von der Landschaft hiefür ein Gegenpräsent von 50 fl.

Dass Lauterbach in der Dichtkunst erfahren war, wurde bereits erwähnt. Eine Probe derselben ist in Wenzel Sponreb's „Wahrhaften Beschreibung" der Ereignisse bei der hochzeitlichen Heimführung der Gemahlin Karl's II. in Graz (1571) zu finden. Unter dem Titel: Panthera Styriae exultans gratulatur (der steierische Panther bringt voll Freude seinen Glückwunsch dar) gibt er dem Hochgefühle des Landes in elegischem Versmasse (40 Distichen) in ganz hübscher Weise und schönem Latein Ausdruck.

Eine andere Probe ist uns in seinem Almanach auf 1575 (im Prognosticon) erhalten, wo er (in 11 lateinischen Hexametern) Gottes Weisheit und Liebe in der Schöpfung preist.

Aus diesen uns erhaltenen Ueberresten kann mit vielem Rechte der Schluss gezogen werden, dass er als ein Freund und Günstling der Muse wohl noch öfters die Gelegenheit ergriffen haben wird, nach damaliger Sitte seine Gönner mit Festgesängen zu feiern und sich des goldenen Ehrensoldes auch zu einer anderen Zeit zu freuen, als zum neuen Jahre, wo ihm die Ueberreichung des neuen Kalenders zu jenen Ehrengeschenken verhalf, die anzunehmen dazumal für den Gelehrten durchaus keine Schande waren.

Zum Schlusse dieser Lebensskizze mag das Urtheil Platz finden, das über Lauterbach's Leistung als Mathematik-Professor aus den Worten hervorgeht, die Stadius in seiner Practica von 1578 sagt: „Es ist unlaugbar, wie bishero in einer Ersamen Landtschaft angerichten löblichen Schuel alhie, neben anderer gutter khünst vnd sprachen erklerung, das studium Astronomicum, sovil müglich gewesen, ist colirt vnd fleissig proponirt ist worden."

Wir kommen nun zu dem zweiten Landschaftsmathematiker,

---

*) In demselben bringt er auch eine kurze Beschreidung des feierlichen Einzuges, den Karl II. 1571 mit seiner Gemahlin in Graz zur Nachfeier der Hochzeit hielt.

Digitized by Google

Magister Georg Stadius. Derselbe war der Sohn eines Rathsbürgers, aus Stein bei Krems in Oesterreich gebürtig, und mit dem Stadrichter und Bürgermeister dieser Städte, Paul Otto, verwandt. Die Bürger pflegten ihre Söhne auf der Universität Wittenberg studieren zu lassen und auch Stadius vollendete dort auf Kosten der Bürgerschaft seine Studien mit solchem Erfolge, dass er daselbst im Jahre 1573 nach einem scharfen Examen durch den österreichischen Cavalier Andreas Wolfgang von Polheim*) unter 36 Candidaten als secundus in ordine (der zweite in der Reihe) zum Magister der Philosophie promovirt wurde.

Stadius war auf Empfehlung des Landesverwesers von Oesterreich Wilhelm von Rogendorff 1576 nach Graz gekommen, um hier eine angemessene Verwendung zu finden, hatte gelegentlich der Schuldisputationen Thesen aus der Astronomie angeschlagen und vertheidigt, 1577 einige Zeit aushilfsweise Arithmetik und Astronomie an der Stiftsschule gelehrt, wobei ihm die Inspektoren das Zeugniss gaben, dass er sich trotz seiner Jugend „fruchtbarlich" gebrauchen liess. Er verfertigte auch, da Lauterbach gestorben war, den Kalender für 1578, ging aber noch 1577 zur Vollendung seiner Studien als Mentor mehrerer junger Cavaliere nach Italien und Frankreich.

Es muss auffallen, dass ihn die Inspectoren der Stiftsschule nicht für die Lehrkanzel der Mathematik zurückbehielten und diese mehrere Jahre verwaist liessen, während ihm die Landschaft doch die Verfertigung des Kalenders für die Stadt Graz überliess, die er auch vom Auslande aus besorgte. Der für das Jahr 1579 ist von Paris (23. Juli 1578) aus datirt, wo er bei seinem berühmten Namensvetter Johann Stadius*) Mathematik hörte.

Fünf Jahre hielt sich Stadius an ausländischen Universitäten auf und studierte dort Mathematik und Jurisprudenz. Im Frühjahre 1582 kehrte er nach Graz zurück, meldete sich zu einer Professur an der Stiftsschule, aber bald hätte er keine erhalten, „weil wenig Kinder der Landstände sind, die sich ad Mathesin begeben, die Historica lectio aber in Classibus wohl kann angeordnet werden."

Ueber Verwendung und Rath der Schulinspectoren bekam er doch die Anstellung als ordinarius Professor Astronomiæ „wegen mehrerer nutzbarkeit vnd wachsung der Schuel mit angehengter Lec-

*) Polheim war damals Rector der Universität in Wittenberg. („Oesterr. Blätter für Literatur und Kunst", 1844, Seite 207.)

*) Johann Stadius, aus Belgien gebürtig, starb 1579. (Frisch, J. Kepleri op., I. Seite 363.)

Digitized by Google

tur der Geschichte“ und als bald darauf der Professor der Rechte Dr. Wolfgang Finkltauss zur Schrannenprocuratur übertrat, trug man ihm auch noch die Pandecten zu lehren auf. So versah Stadius drei Lehrfächer, für welche sonst an hohen Schulen drei besondere Professoren angestellt sind. Dafür erhielt er 150 fl. und freie Herberge in der Stiftsschule.

Stadius war zu einer schwierigen und hoch aufgeregten Zeit nach Graz gekommen. Der Sturm der „Religions-Persecution“ fegte mit schwerem Drucke und unwiderstehlicher Kraft über die lutherische Bürgerschaft hin und; indem er selbst des Bürgermeisters und Stadtrathes nicht schonte, drängte er alle bürgerlichen Einwohner zur unerlässlichen Entschliessung, entweder die lutherische Religionsübung, oder den Aufenthalt in Graz fahren zu lassen. Da Stadius, wie das ganze evangelische Kirchen- und Schulpersonale, im Dienste und unter dem Schutze der Landschaft stand, so fand er sich durch diese Bedrängnisse zwar nur mittelbar berührt, aber desto mehr wurde er er bald darauf bei dem bekannten Kalenderstreite*) 1583 in Mitleidenschaft gezogen, in welchem er, so unlieb es ihm auch war, genöthigt wurde, eine hervorragende Rolle zu spielen.

Die katholischen Fürsten waren übereingekommen, zur Verbesserung der Zeitrechnung in ihren Ländern den gregorianischen Kalender einzuführen. Als Karl II. im September 1583 das betreffende Patent herausgab, widersetzten sich sämmtliche Lutherischen, die Landstände, das Kirchenministerium und die Bürgerschaft. Die ersteren remonstrirten in Suppliken, Dupliken und Reduppliken, die anderen demonstrirten in heftigen Reden von der Kanzel herab, die letzteren ignorirten einfach den landesfürstlichen Befehl. Da aber der Erzherzog diesmal mit mehr Energie vorging, als sonst, so suchten die landständischen Verordneten nach einem sicheren Wege sich zu salviren und forderten von den evangelischen Theologen der Stiftskirche ein Gutachten, „wie man solliches Kalender one Verletzung des gewissens nachkhummen müge“, vom Mathematicus Stadius aber eine Auskunft, wie es sich mit der Sache vom Standpunkte der Wissenschaft aus verhalte. Die Antwort der Theologen gipfelte in dem Schlusse: Der Kalender kömmt vom Papste, also ist er ein „teuflischer Griff.“ Das war bestimmt und deutlich gesprochen. Nicht so präcis fiel das Gutachten des Stadius aus. Er sah sich in eine arge Verlegenheit gebracht, da er als Mathematiker nicht läug-

*) Dieses Thema hat der Landesarchivar Professor Zahn im 13. Hefte der Mittheilungen des hist. Vereines in ausgezeichneter Weise weitläufiger behandelt, daher ich mich hierüber ganz kurz fassen kann.

Digitized by Google

nen konnte, dass eine Verbesserung der Zeitrechnung nothwendig sei, als Professor der Stiftsschule aber nichts sagen wollte, wodurch er mit seinen geistlichen und weltlichen Vorgesetzten in Zwiespalt gekommen wäre.

Er half sich nicht ohne Witz dadurch, dass er als Historiker referirte: dass bereits Traktate gegen den Kalender bestünden, dass aber auch berühmte Mathematiker für denselben gesprochen hätten. Er erwog ferner, was etwa aus der Einführung des Kalenders für Folgen entstehen würden. Da schien ihm vor allem die Auslassung von 10 Tagen auf einmal sehr bedenklich (man sollte im October statt des 5. gleich den 15. zählen), weil hiedurch die Bauernregeln in Unordnung gebracht würden und weil man eben dadurch um eine merkbare Zeit dem Ende der Welt näher rücke, das, wie er bestimmt wisse, nicht mehr lange auf sich warten lassen würde. Endlich da man von dem neuen Kalender eine Förderung zur Versöhnung der katholischen und griechiscken Kirche hoffe, so sei die Luft für die evangelischen Christen nicht rein u. s. w.

Doch es dürfte nicht ohne Interesse sein, den Wortlaut dieses Gutachtens*) selbst einzusehen; dasselbe lautet:

M. Georgii Stadii

Mathematici judicium wegen anrichtung des neuen Calenders.

Wolgeboren Gestreng Edl vest genedig vnnd gebiethundt Herrn.

Euer gnaden vnnd Herl. beuelch mier vor dreyen tagen vermeldet, hab ich mit billicher Reuerenz vernommen vnnd darauff nachvolgunde antwort gestellt. Betreffenndt demnach das Calendarium Gregorianum, wass vnnd wieviel von demselben Astronomischer weiss zuhalten, khan solliches aufs weitleiftigst an iezo nicht wol declarirt werden, hallte es auch zum theil füer vnnöthig, sintemal schon dieses Jar etlicher gelerter Tractatel darum in offentlichen druckh gegeben worden sein, weliche zu ersehen, insonderhait aber will ich mich referirt vnnd gezogen haben auf das schreiben, so der durchleichtige hochgeborne Fürst vnnd Herr Herr Wilhelm Lanndgraff in Hessen dem durchleichtigisten auch hochgeborenen Füersten vnnd Herrn Herrn Augusto Herzogén zu Sachsen, vnnd Churfüersten des H. Römischen Reichs etc. im December des verstrichenen zwey vnnd achtzigisten Jars zuegeschickt hat, welliches dann auch destwegen soll billich hochgehalten werden, dieweil hochgedachter Lanndgraff

*) Ichh abe diesen Aufsatz hier abdrucken lassen, weil er über die Verhältnisse unter denen Kepler nach Graz berufen wurde, interessante Aufschlüsse giebt. G.

Digitized by Google

ain Fuerst des Reichs vnnd der Mathematischen khunst sonnders vnnd trefflich erfaren, wie solliches villen bekhannt vnnd weiters beweiss oder deduction vebedüerfftig, vnnd obschon dises Astronomisch werkh füer sich selbst nicht gar khann reprehendiert oder gestrafft werden, sintemal vor vilen Jaren hochgelerte lueth anni correctionem desideriert vnnd darinnen sich bemüehen sonders bedacht gewest sein, Jedoch weil diese emendation wass vnuolkhumentlich erscheinnet wil von nötten sein, dass diss alles noch besser vnnd vleissiger erwogen werde. Dann des Jars vnnd andern darzuegehergen (?) mengeln mit schlechter vnnd blosser der zehen tag ausslassung vnnd zurückhziehung des Aequinoctii (concediert das die fierung des Osterfests nach ordnung Nicenischen Concilii zu recht dardurch gebracht) nicht khan völlich geholfen werden, sonndern es ist aufennkhlich, vnnd nicht allererst hernach wie etlich vermainnen hoch vonnötten die Tabulas moduum sic coelestium daher dann die Finnsternussen offt gar vegleich gerechnet werden, auch derselben vnnd anderer Planeten wirckhung nicht mehr sich erweisen vnnd wie vor Zeiten beschehen an iezo correspondieren wollen zu emendieren, darauss man neue Ephemerides Astronomicos vnnd auss denselbigen iarlich neue Calendaria zu gemainen nutz stöllen möcht: von wellicher weiss ich dann auch von Johanne Stadio Mathematico seelig zu Paris Anno 1578 gehört wellicher vnnder anndern vermeld, das der Khönig aus Frankreich möchte wol zu bewegen sein neben annderen Potentaten souil vncosten darauf zu wenden vnnd durch obseruierung etlicher finsternussen an vnnderschiedlichen vnnd weitgelegenen orthen der weldt durch diser khunst wolerfarene vnnd berüembte Personen die ueras locorum longitudines erforschen zu lassen vnnd nach anndern mehr so darzugehorigen die Tabulas Astronomicas zu anndern, auch alsdann neue Ephemerides vnnd gewendliche Jars Calendaria ins werkh zurichten, zweifelt nnei auch nit da gewaltige vnnd grosse Potentaten bisheer in Teutschlannd souil hetten wollen darauf wenden, oder noch dasselbige zuthuen genedigst sich erbietteten: es möchten noch oder khunfftige solliche leüth gefunden worden, so sich diser wiewol ganz münseiligen schwären vnnd langwierig arbaith wurden vnderwinden darauss dann ein bessere emendation anni eruolgen sollte, welliche allss dann zu Rom. Khay. Majist. vnnd anderer Cur: vnnd först. des h. Römisch. Reichs Teutscher nation allergenedigsten deliberation vnnd hegsten Indicio möchte gestölt, vnnd da dieselbige nicht allein von etlichen sondern von villen gelerten Mathematicis hin vnnd wider in Vniuersitäten auch vegleicher Religion füer inst vnnd ganz recht befunden auch ainhellig im Reich angenommen, vrsprünglichen auss khayserlicher macht vnnd Hochheit publiciert werde, damit dieselbige nicht an ainem, sondern an allen dem H. Römisch. Reich vnndergebenen vnnd darzuegehörigen örttern gleichen anfang haben, auch weniger vnrich-

30*

Digitized by Google

tigkhait vnnd vilfeltiges nachgedruckhen erreget nüge werden. Dann ob mehr nucz oder schaden mit diesem Callendario in allerlay stennden entstehen wiert, weil derselbig mit zugleich an allen orten angenummen wiert, gibt khunfftige Zeit selbst zuuerstehen. Sonnderlich aber macht den einfeltigen Mann (ob es schon von etlichen füer ain geringschezige Ursach möchte gehalten werden), dise behende ausslassung der zehen tag ain grosse Verendung vnnd gleichsamb ain Irthumb in seinem armen wösen vnnd hausshaltung, dann obschon in Verrichtung hinfort des Ackersbau vnnd anderer järlichen arbait zehen tag langsamer sollen gezöllet werden, damit die Sonne in gleichen stannd vund grad, wie bissheer nach dem alten Calender erfunden vnnd die arbait nicht zufrue angestölt würde: jedoch macht solliches gleichwol den armen Pauerleuthen sowoll alss anndern so ihre Jarmarkht phlegen zuersuechen, eine Vnrichtigkhait, sintemal sie sich auf ire gewendliche Practine vnnd andere Lasstäge verlassen, ir arbaith vnnd hanndtierung darnach anstöllen vnnd also nicht leichtlich annderst khünnen beredt werden, will geschweigen, wass diese Emendation ausser der politischen händel in Chronologiis sonnderlich füer Jrthumb bringt, da die vorbescheheren Historien an iezo auf anndere tag zuziehen vnnd zuuerstehen sein, Vnnd weil dann die vorlenngst gewüntschte vnnd beste Correction anni durch ersparung villeicht der vucosten od. auss anndern erheblichen Ursachen, bisheer ins werkh nicht hat khönner gerichtet werden, hafte man es gleich noch bey dem alten Römischen Calendario mögen verbleiben lassen, sintemal wier nun dem ennde d. welt in neher werden, vnnd man sich nicht besorgen darf, das die welt so lang stehen solte, das durch forttrunkhung des Aequinoctii uerni in anfang des Merzens in Februarium, od. noch weiter hinein (nach wellichen Aequinoctio dann d. negst Volmonden vnnd balt nachfolgunder suntag pflegen betracht zu werden) dann bemelte heylig Ossterfest gar zu frue gehalten vnnd dergleichen verwierrungen mit anndern Khirchfesten sich wurden zuetrag: Sonndern da mag in qualemcunque vnnd nicht exqnisitam anni emendationem allain zur Celebrierung des Ossterfests nach ordnung des Nicenischen Concilii hatte wollen füernemben, so hatte man auch etliche zeit nach einander den gewendlichen vieriarigen Schalttag mögen auslassen, das also das Aequinoctium uernum durch gleichsam stille vnnd nicht vermerkhte ausswerffung etlicher täg zu ruckh gebracht vnnd nicht allain auf den 20. sonndern 25. Martii, wie es vor 1628 Jare 'gewesen were gezogen worden. Oder das noch vil besser vnnd in gemain rathsamer (vnangesehen das die Tabulae Astronomicae vnnd Ephremerides gleichvol falsch verbliben) das man hinfort allezeit nach 134 Jaren nur ainen tag ausliesse, dann also das vielgedachte aequinoctium gleich fixum auf den zehenden tag

Martii, wie es inzunder nach dem alten Calender felt verbleiben vnnd das heylige Ossterfest demselben nachfolgundt nicht gar zu frue im Jar oder auch annderer heyligen feyertägen so vnrecht wurden fallen vnnd celebriert werden, dann ob man gleich in annembung dises Calendarii Gregoriani zehen tag auf ainmal im October ausslassen muess, so bleibt es doch nicht bey disem hinfort, sonndern man muess noch uberdass in 400 Jaren (aussgenommen das khunfftige 1600) drey ganze tag auss dem Calender weckhwerffen damit das Aequinoctium sich nit weiter verrunkht, vnnd also das Ossterfest des Nicenischen Concilii Decreten gemäss möge gehalten werden, Bleiben aber nichts desto weniger die alten Ephemerides, ob sie gleich leichtlich auf dise neue form von dennen so järliche Calender pflegen zu stöllen khünnen accomodiert werden, falsch, vnnd ist hiemit allain der rechten celebrierung des Ossterfestes nach Nicenischer ordnung, wie solliches der Haubtpunct vnnd scopus dises füergenummenen werkhs ist, vnnd nicht anndern mangeln des Jars vnnd rechtlauf der Planeten geholfen.

Wieuil aber der Christlichen khirchen daran gelegen sei oder nicht dass das Ossterfest nach vilgedachts Nicenisch. Concilii ordnung hinforth gehalten oder wie es bisheer allenthalben in ieblichen gebrauch gewesen celebriert werde, wissen die Theologi am besten davon zureden vnnd zu tractiern.

Vnnd ob gleichwol dise Correction von etlichen Mathematicis (sintemal etwass damit prästiert) sonnders approbiert möchte werden, so will es doch auch in genere ainer wassvleissigen Berathschlagung noch bedurffen, deren Vrsach das erstlich dise emendation von diser zeit anzurechnen, allain gefüert ist bis auf das Nicenisch Concilium, so vnder den Khayser Constantio Magno vnnd das Jar Christi 328 zuhalten angefangen worden, da si billicher noch fast emb fünff tag weiter nemlich auf die Zeit des ersten Römischen Khaysers Julij (vnter dem dann das Jar in dise Form, deren man sich bisheer gebraucht durch hülff des berüembten Astronomi Sosigenis gebracht) hat sollen deduciert werden, in welcher mainung ist auch Josephus Zarlinus Venedigischer Capelmeister vnnd Mathematicus, wellicher vermelt, das dardurch nicht wider das Nicenisch Concilium wer gehandelt worden, sintemal die haltung oder feyrung des Ossterfests auf ainen gewissen tag des Jars, weeder von Christo noch den Aposteln verordnet sondern viel mehr auss ainer sehr löblichen vnnd christlichen gewonhait auf aine gleiche zeit in der Christenhait zu feiren gelegt worden.

Fürs annder ist gleichwol auch zu erwegen, ob nichts anderns veben mit oder durch dise correction möchte gesuecht werden, dann

ob mier gleichwol solliches zu disputieren nicht gebüert auch mein Intent mit ist, jedoch muess ich auch gleichwol vermelden, wass der Episcopus Glandarensis selbst geschrieben hat das nemblich dardurch dem gemainen Man die gefasste opinion vom balt khumenden jüngsten tag vnnd wunderbarer Verenderung in der welt wurde benommen werden, den also lauten die wort: Ut quae in animis hominum ex multorum Astrologorum praecocibus et futilibus praedictionibus insedit opinio, nimium meticulosa atquae inanis futurum scilicet esse propediem magna cum totius Reipublicae uastitate, horrendam rerum omnium nicissitudinem, facile eludatur, vnnd Zarlinus schreibt in seinem Tractäte de uera anni forma, das durch dises werkh die Orientalischen Khirchen, so dem Babst den Titel des oecomenici Bischoffs bisshero zu geben gewaigert, mit den Ouidentalischen gleichsamt in aine neue ainigkhait durch annembung des Calendarii khumen werden. Ob nun auch damit Germaniae Verderben vnnd bessere der Römischen Religion fortpflanzung möchte gesuecht werden, waiss ich nit, sonndern werden selbs hochuerstendige leiith im bedenckhen darüber wissen zu machen.

Füers dritte ist auch sonnders zu gemüeth zu füeren, das diss Calendarium in diser letzten zeit der welt, da der jüngste tag auss villen vngezweifelten beweisungen vnnd zaichen gewiss füer der Thüer, nicht weiss freywilliger gelassen, sondern mit gewalt vnnd ernsten beuelch der ganzen welt vom Babst aufgedrungen wiert also das khainem menschen erlaubt sein solle diser des corrigierten Calenders wegen aussgegangenen Römischen Publication entgegen zu sein oder dieselbige zu infringieren, wie dann solliches ausdruckhlichen in der praefation vermelt wiert: Nulli omnino hominum liceat hanc paginam nostrorum praeceptorum, mondatorum, statuorum noluotatis, probationis, prohibitionis, sublationis, abolitionis horationis et rogationis infringere, vel ei ausu temerario contraire. Si quis autem hoc attentare praesumpserit, indignationem omnipotentis Dei ac beatorum Petri & Pauli Apostolorum eius se nouerit incursurum mit andern mehr so im nachvolgunden Platl zu ersehen.

Füers viertte ist gleichwol auch vernunfftig zu betrachten, warumb vilgemeltes Calendarium da es zwar wie etliche mainen ain politisch wesen sein solle vnnd Mathematisch werkh von den weltlichen Cur: vund füerssten des G. Römischen Reich auch villen Reichsstetten selbs bisherro souil man waiss nicht angenummen worden, welliches alles ich dann beynebens auch hie melden wollen.

Damit ich aber zum beschluss meine Mainung aufs khuerzist anzeige vnnd widerholle, vermelde ich souil, das ich dise Jars emendation vnnd zuruckhziehung des Aequinoctii uerni, soweit dieselbige

Digitized by Google

biss auf die Zeit des Nicenischen Concilii gebracht, Astronomischer weiss (sintemal dem Jar etwas damit geholffen) nicht gar improbieren khan. Da allain nichts annders damit möchte gesuecht werden, Were aber vil besser vnnd mehrer, wie oben weitleuffiger angedeut zu wüntschen das ainmal aine rechtschaffene vnnd bessere correction, dergleichen Copernicus Regiomontanus, so nun lenger allss vor hundert Jaren dessen halben gehn Rom von Babst Sinto IIII gefordert etc (?) Stöflerus Reniholdus vnnd Johannes Stadius desideriert haben, herfüer möchte khummen, welliche dann allss vil besser gegrundet, leichterer auch ins werkh mit grösserem nucz der ganzen Christenhait khönte gerichtet werden. Vnnd hab also auf Euer gl. beuelch nach meinen geringisten in dieser khunst verstannd dises gehorsamlich vnnd in vil antworthen sollen. Welliches alles Euer Geg. vnnd herlj ich zur erkhantnuss hiemit in aller vnnderthenigkhait vnnd demuet will haimbgestölt haben, Euer Herz vnnd Herz mich gehorsamblich beuelchendt etc.

E. G. vnnd Hh.

Vnndertheniger

gehorsamer

Georgius Stadius.

(Aus dem Protokolle der L. u. Hofrechten — Versammlung). L. H. 18. im steir. Landesarchive.)

Das Ende dieser Tragikomödie war, wie bekannt, dass sich die Landschaft mit letztem Dezember 1583 rückhaltslos dem Patente fügte, wodurch freilich der Kalender des Stadius für 1584 unbrauchbar wurde.

Für diesen betrüblichen Schicksalsschlag sollte ihn jedoch das besagte Jahr in anderer Weise entschädigen. Sein Bruder starb zu Stein, und sein Vetter, Paul Otto, der schon erwähnte Bürgermeister dieser Stadt, lud ihn zur Schlichtung der Familienangelegenheiten ein, in die Heimat zu kommen, und siehe, dort fand er wider Vermuthen an einer Witwe ein eheliches Gespons. (Es ist ein sonderbarer Zufall, dass auch Kepler's erste Gemahlin eine Witwe war.) Stadius legte daher seine Professur nieder, um seiner werthen Ursula zu Liebe, in der Stadt Stein zu leben, behielt aber seine Anstellung als ordinarius Mathematicus mit 32 fl. jährlicher Besoldung und mit der Verpflichtung, den Grazer Kalender zu verfassen, „weil derzeit in den drei Ländern (Steiermark, Kärnten und Krain) keiner in Bestallung ist und solches insonderheit dieses hoch- und weltberühmten Herzogthums Steiermark Zier sein kann.“

Digitized by Google

Die Landschaft liess ihn ungern ziehen, da er insbesondere wegen seines Fleisses in der Lection der Astronomie und wegen seines ehrbaren Lebenswandels eine Zierde der Stiftsschule war. Um dieser Achtung Ausdruck zu geben und zum Danke für die erhaltene Einladung zur Hochzeit liess ihm die Landschaft zur hochzeitlichen Freunde ein silbernes Trinkgeschirr im Werthe von 50 fl. durch den Kremser Rathsherrn, Georg Strauber, feierlich offeriren. (Das Hochzeitsbecherl für M. Kepler kostete nur 27 fl.)

Stadius sah bald, dass er zu unrechter Zeit in die Heimat gekommen sei, und dass ihm dort keine Rosen blühen werden, zumal eben dort die Ausschaffung der evangelischen Kirchen- und Schulpersonen mit grossem Ernste ins Werk gesetzt wurde.

Er beschloss daher, noch in demselben Jahre wieder nach Graz in seine alte Stellung zurückzukehren und wurde auch dort mit grosser Bereitwilligkeit angenommen, was um so leichter war, da man bisher für die Besetzung seiner Lehrkanzel nichts gethan hatte und nur die Arithmetik durch den M. Johann Moontz in den Classen supplirt worden war. Er erhielt sogar eine Aufbesserung des Gehaltes bis auf 200 fl. und die früher für das Kalendermachen ausgeworfenen 32 fl. nebst freier Wohnung in der Stiftsschule (nämlich im Westtrakte desselben 2 Stuben, 2 Kammern und 2 Küchen, wovon die eine Hälfte die Aussicbt auf die Mur und die Schlachtbänke hatte, die andere hofseitig lag.)

Von nun an floss sein Leben ohne bedeutende Ereignisse hin, nur das auch ihm die stets theurer werdenden Zeiten Anlass zu Klagen und zur Bitte um Gehaltserhöhung boten, eine Bitte, worauf die landschaftlichen Verordneten gewöhnlich taub blieben. Es ist aber bemerkenswerth und ein Zeichen, wie sehr Stadius in Ehren stand, dass man für ihn eine Ausnahme machte und ihm am Landtage 1588 „wegen seiner Kunst und Erfahrenheit“ und für „Stellung der Herren und Landleut (Landstände) Nativitäten und Historien“ eine jährliche Zubusse von 50 fl. bewilligte.

Bis zu seinem 1593 (April?) erfolgten Tode lehrte er unermüdet die erwähnten drei Fächer (zuletzt in wöchentlich vier Stunden) mit Auszeichnung und hinterliess bei seinen Kollegen und bei der Landschaft das ehrenhafteste Andenken. Was er seiner Witwe hinterliess, waren — Schulden. Die Landschaft zögerte auch nicht, mit mildthätigem Sinne der armen zu gedenken, und wies ihr zur Tilgung derselben den Betrag von 200 fl. an. (Pensionirung der Witwen war damals nicht im Gebrauche.)

Des Stadius schriftstellerische Thätigkeit bewegte sich, wenig-

Digitized by Google

stens insoweit sie uns bekannt wurde, zumeist nur im Gebiete der Kalender. Ausser dem jährlich für Graz publicirten Kalender nebst Practica, schrieb er auch Ephemerides astronomicae, gab 1589 einen lateinischen Kalender heraus, der nach Venedig, Padua, Bologna, Florenz und Neapel seinen Weg fand und liess, durch diesen Erfolg ermuntert, 1590 einen dreisprachigen folgen, nämlich: Ephemeris latina, italiana et gallica. 1591 verdeutschte er auf Befehl der Landschaft ein Buch unter dem Titel: „Der Wälsch Discorso“ und bot sich der Landschaft überhaupt zu italienischen und französischen Uebersetzungen an. 1593 schrieb er ein von der Landschaft abverlangtes Gutachten über 4 Büchlein, die ein neapolitanischer Apostat Namens Franz Quiricus in italienischer Sprache verfasst hatte, indem er die geistlichen Psalmen, Lieder und Gebete, die man in der evangelischen Kirche zu singen pflegte und den Katechismus Luthers nebst der Agende für die Prediger aus der windischen Sprache zu dem Zwecke übersetzte, damit sie, da bisher nichts ähnliches in italienischer Sprache vorhanden war, zur Verbreitung des Lutherthums in Italien (Görz und Nachbarschaft) dienen könnten. Stadius war auch hier behutsam, wie im Kalenderstreite, lobte zwar die Uebersetzung als meistens gut toskanisch, aber da der Gegenstand nicht astronomisch, sondern theologisch sei, so möchten andere ihr Urtheil angeben. (Von dessen „Nativitäten und Historienstellung“ ist uns leider nichts als der blosse Titel erhalten.)

Die vorliegende biographische Skizze bliebe noch unvollständiger, als sie ohnehin ist, würde man die von Lauterbach und Stadius verfertigten Kalender und Practica*) ausser Beachtung lassen. Ein näheres Eingehen jedoch auf ihren Inhalt, so wichtig derselbe auch für die Kulturgeschichte ist, würde von dem eigentlichen Ziele abführen, und es wird genügen denselben nur insoweit herbeizuziehen, als er Stoff und Anhaltspunkte zur Charakteristik der beiden Männer bietet.

Beide waren ebenso vielseitig gelehrte, als ehrenwerthe, treuherzige, glaubensinnige, aber nicht fanatische Männer von anerkannt ehrbarem Leben und Wandel; jedoch bei ihrem stillen, friedlichen und sogar unentschiedenen Wesen mehr berufen, anderen nachzutreten, als selbst vorauszugehen,

Beide waren sie zugleich Mathematiker und Historiker, der eine noch dazu ein Dichter, der andere Jurist; beide liebten sie die Astronomie nicht etwa nur als ihre Brotwissenschaft, sondern als hohe,

---

*) Es lagen mir von Lauterbach 4, von Stadius 7 Kalender nebst Practica zur Benützung vor.

Digitized by Google

von der Gottheit geschenkte Kunst, und sie erkennen es und sprechen es wiederholt mit Nachdruck aus, dass die Güte Gottes dieselbe der Menschheit zu dem Endzwecke verlieh, damit ihr in der wunderbar grossartigen Himmelswelt die Allmacht, Weisheit und Liebe des Schöpfers offenbar und ersichtlich gemacht werde.

Aber bei all' ihrem Wissen, bei all' ihrem guten Willen stehen sie doch beide nur in der Vorhalle der Wissenschaft, von dem heiligen schöpferischen Wehen derselben haben sie keine Ahnung, denn die Flamme des Genies hat niemals durch ihre Seele geblitzt, jene Flamme, mit welcher ihr Nachfolger Kepler eine unsterbliche Leuchte entzündete und mit ihr auf neuen Bahnen voranging, die ins Heiligthum der Wissenschaft führten.

Dafür aber sind beide, Lauterbach wie Stadius, in gleichem Masse, von dem Wahne ihrer Zeit befangen, dass von den Gestirnen das Wohl und Wehe der Erde und ihrer Bewohner abhänge und dass es möglich sei, aus der Stellung derselben die kommenden Ereignisse zu erkennen. In diesem Wahne sind ja die Prognostica (Voraussagungen) verfasst und den Kalendern beigegeben.

Zwar hat wohl die eigene Erfahrung und öftere Enttäuschung jeden von beiden in Beziehung auf die Sicherheit und Wahrheit von derlei Prophezeihungen zweifelhaft und bedenklich gemacht, aber eben nur in gewissen Beziehungen und sonderbarer Weise einen jeden in verschiedenen.

Lauterbach meint, dass Sonne und Mond als die vornehmsten Himmelslichter, zwar die meiste Kraft und Wirkung auf irdische Dinge hätten, (namentlich durch die Finsternisse), dass aber auch die Planeten durch ihre besondere Stellung zeitweilig einen besonderen Einfluss erlangen, denn (sagt er in der Practica 1572) „würde Sonne und Mond alles richten und regieren, so wären die anderen Planeten sammt ihrem schönen und wunderbarlichen Laufe, der sich ganz unterthänigst nach dem Lauf der Sonne richtet, umsonst erschaffen und würde auch ein Jahr wie das andere eine Gelegenheit (dieselben Verhältnisse) haben und sich keine Veränderung in Kälte, Hitze, Trockenheit, Feuchtigkeit, Donner, Hagel, Wind, Regen, Schnee, Fruchtbarkeit oder Unfruchtbarkeit der Erdgewächse und in anderen Sachen zutragen.“ *)

Dennoch bemerkt er wenige Zeilen später, bezüglich der Erdgewächse habe er nicht viel Vertrauen auf die Astrologie, er fürchte,

---

*) Hier, wie auch an anderen Stellen findet sich einiges beigefügt, was beim Vortrage wegen Haushaltung mit der Zeit wegbleiben musste.

Digitized by Google

es sei bei diesem sowohl, als vielen andern Stücken „eine unnütze, vergebliche Superstition.“ Diesmal sei aber zu hoffen, dass alles wohl gerathen würde und keine Theurung zu besorgen wäre, „wenn die Leute nur als Christen handeln wollten und allerlei Fürkauf, Wucher, Finanz und Betrug nicht so gar über die Massen im Schwange ginge.“

Auch ein andermal (1575) weist Lauterbach darauf hin, dass die Ursachen der Theuerung nicht in den Gestirnen, sondern bei den „geitzwänst“ wären, die das Getreide einsperren, bis sie es 3-, 4-, 5mal theuerer verkaufen können.

So gesund aber hierin seine Ansichten sind, so absonderlich sind sie in Bezug auf politische Ereignisse und soziale Verhältnisse, da liest er Heil und Unheil in den Gestirnen so deutlich und bestimmt, dass er es Jahreszeit für Jahreszeit nicht blos im allgemeinen, sondern bestimmten Ländern und Städten, ja sogar den verschiedenen bürgerlichen Ständen zu spezifiziren vermag. So z. B. bringt der „Glentz“ (Frühling) im Jahre 1575 für gewisse (genannte) Länder allerlei Unangenehmes: Feindschaft, Zank, daneben Unglück, Anfechtung und Widerwärtigkeit für den gemeinen Mann von seinem Oberherrn. „Viele böse Händel werden entstehen durch Ueppigkeit, Banketiren, Wohlleben, Unzucht und allerlei Unrath, so durch Weibspersonen seinen Ursprung haben mag, wiewol etliche ihr Glück und Aufnehmen davon zu gewärtigen haben“, u. s. w.

1572 prophezeit er neues in Kriegssachen, unversehene Ueberfälle, Wegführung von Vieh und Menschen, dies droht insbesondere dem gemeinen Landvolke und dem „geringen pöbel.“ Lithauer, Sachsen, Hessen, Steierer, Brandenburger, Augsburger und Kostnitzer mögen Acht haben, dass sie kein Unglück treffe.

Stadius hingegen meint nach der Lehre seines Meisters, des kaiserlichen Mathematikers Paul Fabricius: „Stellas non necessario, sed contingenter agere“, (die Einwirkung der Gestirne erfolge nicht mit Nothwendigkeit, sondern nur in nebenbei zutreffender Weise), daher liesse sich ex astris in Sachen der Politik und des Krieges nichts gewisses sagen, indem der Krieg nicht aus den Gestirnen entsteht. Zumal „über den Türken“ will er (1593) nichts bestimmtes prädiciren, „sintemal er eine Strafe für unsere Sünden ist“; aber aus anderen „unverbotenen vernünftigen Mitbetrachtungen und historischen Nachgedenkungen auch vorhergegangenen unterschiedlichen Erdbidem (Erdbeben)“ ist er der Meinung, dass dieser Bluthund nicht feiern werde. „Sintemal ihm unter anderem viel bedenklich, dass um und nach tausend Jahren eines Regimentes sich gerne Veränderung zuzutragen pflegt und dieser Feind also auch zur längeren Erhaltung, ja grösseren Ausbreitung dieses mahometischen Reiches sein äusserstes Vermögen versuchen und daranstrecken wird.“

Digitized by Google

Wie Stadius über die „Kriegsleufte" behutsam schweigt, ebenso verlacht er die possenhaften Prophezeiungen und Andeutungen anderer, wenn es z. B. gut sei, mit Fürsten zu reden, wenn man neue Kleider anziehen, Häuser kaufen solle u. a. m. — was aber die Krankheiten betrifft, welche böse Gestirne und widerwärtige Aspekten bringen, darin ist er vollkommen bewandert in seinen Vorhersagungen ohne Bedenken weitläufig und speziell, selbst wenn einmal eine Mondesfinsterniss „nicht sonderlich boshaftig ist."

Aus seinem reichen Verzeichnisse von allerlei Krankheiten will ich hier nur jene herausheben, deren Namen heutzutage nicht mehr geläufig ist, nämlich: die Dörr (Schwindsucht), Blasengicht, Urschlechten (Hautausschlag), ungarische Krankheit (Kopfwehe), Wehtagen (Schmerzen) am Schienbein, die Geel (Gelbsucht), der Ween (die Fraisen), endlich Blödigkeit des Kopfes und grosse Melancholie bei Gelehrten und anderen „Mercurialisten".

Doch ist Stadius hiefür nicht blind, dass nicht immer die Sterne, sondern auch oft das unordentliche Leben der Leute die Schuld an Krankheiten trägt, daher er 1586 seine Prophezeiungen wohlmeinend mit einer Lebensregel schliesst, welche auch den Schluss dieses Aufsatzes bilden soll:

Aller vberflus schad, merk eben
Das mittel erhelt dir langes Leben.
Darumb in Speis, Lieb, Arbeit, Tranck,
Im Schlaff halts mittel, so wirst nicht kranck.

Digitized by Google

XXII.

Verschiedene Sätze und Aufgaben, welche zugleich als Schulaufgaben benutzt werden können.

(Die Figuren wird im Folgenden Jedes überall leicht selbst zu erkennen im Stande sein).

Von

Herrn *Emil Hain*,

Lehrer am Leopoldstädter Communalreal-Gymnasium in Wien.

I.

Es ist folgender Satz zu beweisen:

Das Viereck, welches die Winkelhalbirenden eines beliebigen Vierecks bilden, ist ein Kreisviereck.

Es sei $ABCD$ ein beliebiges Viereck. Die Halbirenden der Winkel A und B treffen sich in Punkt C', die von B und C in D', die von C und D in A', die von D und A in B'.

Es ist:

$$A' = 2\beta - \left(\frac{C+D}{2}\right),$$

$$B' = 2\beta - \left(\frac{A+D}{2}\right),$$

$$C' = 2\beta - \left(\frac{A+B}{2}\right),$$

$$D' = 2\beta - \left(\frac{B+C}{2}\right).$$

Digitized by Google

Daraus erhält man:

$$A' + C' = 4\beta - \left(\frac{A+B+C+D}{2}\right) = 2\beta B' + D' = 2\beta$$

Auf eine ähnliche leichte Weise lässt sich auch beweisen, dass jenes Viereck, welches die senkrechten Seitenhalbirenden eines Kreisvierecks bilden, ebenfalls ein Kreisviereck ist.

II.

Wird durch die Seiten eines gleichseitigen Dreieckes ein Kreis gezogen: so sind die Summen je dreier getrennter äusserer Abschnitte einander gleich.

Ist ABC das Dreieck, sind die Schnittpunkte des Kreises bei ABC beziehungsweise der Reihe nach $A_2 A_1 B_2 B_1 C_2 C_1$, so hat man nemlich:

$$AA_1 + BB_1 + CC_1 = AA_2 + BB_2 + CC_2$$

Diesen Satz wird ganz ähnlich wie ein von mir bereits in dieser Zeitschrift (Seite 508 53. Theil) mitgetheilter bewiesen, indem AA_1, BB_1, CC_1 u. s. w. nur negativ genommen werden.

III.

Zieht man von einem Punkt innerhalb eines gleichseitigen Dreieckes, eines Quadrates oder eines Rhombus nach den Seiten desselben unter gleichen Winkeln an den Schnittpunkten Gerade, so ist die Summe derselben konstant.

Es sei hier der Beweis dieses Satzes, der für rechte Winkel bekannt ist, für das gleichseitige Dreieck angedeutet. Zieht man von den Ecken eines gleichseitigen Dreieckes zu den Gegenseiten unter gleichen Winkeln an den Schnittpunkten Gerade, so sind diese einander gleich. Man kann mit Hilfe dieser Gleichheit leicht den Satz für einen Punkt beweisen, der in einer Dreieckseite liegt uns als dann mit Benützung dieses so spezialisirten Satzes den allgemeinen aufstellen.

Digitized by Google

Literarischer Bericht

CCXIII.

Professor Charles Babbage

einer der bedeutendsten Mathematiker Englands, starb in seinem 79. Lebensjahre. Er galt selbst unter seinen Landsleuten als ein Original, und viele Jahre seines Lebens hatte er auf die Herstellung einer Riesen-Rechen-Maschine verwendet, ohne dass er deren Vollendung erlebt hat. Seine Logarithmentafeln von 1 bis 108000 haben auch ausser England starke Verbreitung gefunden. In den letzten Jahren seines Lebens hatte er viel mit der Polizei zu thun, denn er führte unausgesetzten Kampf gegen die Drehorgeln, die ihm das Studium, wie vielen anderen Menschen das Leben, erschwerten.

(Entlehnt aus der allgemeinen Zeitung. 1871. Nr. 298. S. 5254. — Nach dem Brockhaus'schen Conversations-Lexicon war Babbage um 1790 geboren. — Hoffentlich späterhin mehr.)

Geschichte und Literatur der Mathematik und Physik.

Bullettino di Bibliografia e di Storia delle scienze matematiche e fisiche, pubblicato da B. Boncompagni. Roma. 1871. 4°. (Vergl. Literar. Ber. Nr. CCXII. S. 2.).

Tomo IV. Maggio 1871. und Tomo IV. Giugno 1871. Diese beiden Hefte enthalten eine sehr interessante, sehr gelehrte, und für die Geschichte der Optik sehr wichtige Abhandlung unter

Digitized by Google

dem Titel: Sur des instruments d'Optique, faussement attribués aux anciens par quelques savants modernes. Par Th. Henri Martin, Doyen de la Faculté des Lettres de Rennes, membre de l'Institut. p. 165 — p. 238. Wegen der Wichtigkeit der Abhandlung verzeichnen wir hier die Ueberschriften der einzelnen Abschnitte derselben, aus denen zugleich die Leser die Fragen kennen lernen, welche von dem Herrn Verfasser discutirt und im Allgemeinen verneinend beantwortet werden: **Introduction.** p. 165. — **Ire Partie.** Les anciens ont ils eu des lunettes d'approche, des lunettes astronomiques et des telescopes à miroir? §. 1. Réfutation des preuves directes en faveur de l'existence des lunettes de longue vue chez les anciens. §. 2. Réfutation des preuves indirectes. §. 3. Preuves contre l'existence des télescopes et des lunettes de longue vue dans l'antiquité. — **IIe. Partie.** Les anciens ont ils eu des microscopes, des loupes et des lunettes pour les myopes et pour les presbytes? §. 1. Réfutation des preuves directes en faveur de l'existence des microscopes, des loupes et des lunettes de myope et de presbyte chez les anciens? §. 2. Réfutation des preuves tirées de la connaissance que les anciens ont eue de quelques phénomènes, soit de combustion, soit de grossissement apparent, produit par réfraction §. 3. Réfutation des autres preuves indirectes. §. 4. Preuves contre l'usage des microscopes, des loupes et des lunettes de myope et de presbyte chez les anciens.

Wir glauben, dass durch diese Abhandlung manche unrichtige Vorstellungen, die man von den Kenntnissen der Alten (nicht bloss der Griechen und Römer, sondern auch anderer Völker des Alterthums) in der Optik gehabt hat und noch hat, berichtigt werden, und empfehlen dieselbe daher nochmals zu sorgfältigster Beachtung, und zwar nicht bloss den Mathematikern und Physikern, sondern auch den Philologen.

Das zweite der beiden obigen Hefte enthält (p. 230 — p. 256.) wieder sehr vollständige „Annunzi di recenti pubblicazioni."

Arithmetik.

Die metrischen Maasse und Gewichte. Tabellen zur gegenseitigen Reduktion der Preussischen Maasse und Gewichte in den alten Provinzen und der neuen metri-

Digitized by Google

schen Maasse und Gewichte, Preis-Reduktions-Tabellen, die betreffenden Gesetze und Erlasse nebst einem Abriss der Decimalbruchrechnung und einer Anleitung zum Verständniss und zur Handhabung des metrischen Maass- und Gewichts-Systems, für Lehrer und alle, welche sich gründlich orientiren wollen, von C. Dabis, Pastor und Schul-Inspektor in Zudar auf Rügen. Stralsund, Hingst Nachfolger (A. Dühr). 1871. 350 Seiten. 8°.

Die in Deutschland einzuführende neue Maass- und Gewichtsordnung hat eine wahre Fluth von Schriften zur Orientirung über diese so unendlich wichtige Maassregel hervorgerufen, die in ungeheurer Masse zur Anzeige uns eingesandt worden sind und uns vorliegen. Unter diesen Schriften gebührt unbedingt dem vorliegenden Buche wegen seiner grossen Gründlichkeit und Vollständigkeit, wegen seines, dasselbe vorzugsweise zur Anzeige in diesen Literarischen Berichten eignenden wissenschaftlichen Charakters, der hauptsächlich getragen wird durch sehr gründliche und umfassende rein-mathematische Kenntnisse, wie dieselben in diesem Umfange in dem Stande des Verfassers gewiss nur sehr selten sich finden dürften, eine der ersten Stellen. Wegen dieses streng wissenschaftlichen Charakters — an dem freilich der Kaufmannsbursche u. s. w. weniger Geschmack finden wird — eignet sich aber das in seiner Art ausgezeichnete Buch vor allen übrigen Schriften dieser Art vorzüglich zu dem Gebrauche für alle Lehrer an niederen und höheren Unterrichtsanstalten, da ja auch die auf Seminarien erhaltene elementar-mathematische Bildung der Lehrer an unseren Elementarschulen gegenwärtig wohl ziemlich allgemein eine solche ist, dass dieselbe zum Verständniss dieses trefflichen Buchs gewiss vollständig hinreicht. Deshalb empfehlen wir dasselbe vorzugsweise allen Lehrern in ganz Deutschland, in deren Hände der betreffende Unterricht gelegt ist, dringend zu sorgfältigster Beachtung und fleissigstem Gebrauche. Ja, da — wie wir aus uns vorliegenden englischen Zeitschriften sehen — namentlich in England jetzt so sehr viele Schriften über das metrische System erscheinen, was wohl auch in anderen Ländern der Fall sein mag, so freuen wir uns, die grosse und weite Verbreitung unserer Zeitschrift benutzen zu können, auch alle ausserdeutschen Länder auf das vorliegende Buch aufmerksam zu machen. In weiteres Detail einzugehen erlaubt uns die Kürze unserer Literarischen Berichte nicht, und ist auch nicht erforderlich, indem wir glauben uns mit der Bemerkung begnügen zu dürfen, dass in diesem Buche über alles Wünschenswerthe Belehrung zu finden, und dass auch neben seinem wissenschaftlichen Charakter der praktischen Anwendung durch Tabellen u. s. w. gebührend Rechnung getragen worden ist.

Digitized by Google

Geometrie.

Corso elementare di Geometria descrittiva. Libri tre con Atlante di 24 tavole, seguiti da un' appendice sul metodo delle projezioni quotate pel Cav. **Giuseppe Peri**, Ingegnere laureato e Professore di Matematiche nel R. Istituto tecnico di Firenze. Prezzo del Testo e Atlante L. it. 7. 50. — Testo. Pistoia 1869. — Atlante. Firenze. 1869. (Text 407 Seiten. 8°.)

Applicazioni della Geometria descrittiva alle ombre, alla Prospettiva lineare e aerea, al taglio delle pietre e del legname. Libri cinque con Atlante di 266 Figure. Di **G. Peri** etc. Firenze 1859. (Text 468 Seiten. 8°.).

Unter den in neuerer Zeit zu unserer Kenntniss gekommenen Lehrbüchern der beschreibenden Geometrie ist das vorliegende — nebst den schon früher erschienenen Anwendungen — nach unserer Meinung eins der besten, vollständigsten und am meisten zu empfehlenden. Die Darstellung ist durchgängig sehr gründlich und deutlich und empfiehlt sich überall durch besondere geometrische Eleganz. Die Figuren in den beiden, sehr zweckmässig von dem Texte getrennten Atlanten sind vortrefflich und lassen nichts zu wünschen übrig.

Das im Jahre 1869 erschienene Lehrbuch, nämlich der „Corso elementare di Geometria descrittiva", besteht aus drei Büchern und einem Anhange. — Das erste Buch ist, wie gewöhnlich, der geraden Linie und der Ebene gewidmet, wobei u. A. auch die graphische Auflösung der verschiedenen Aufgaben über die dreiseitige körperliche Ecke besondere Beachtung gefunden hat. Hieran schliesst sich die Behandlung der Polyeder im Sinne der descriptiven Geometrie. — Das zweite Buch ist in ungemein eingehender Weise den Cylinderflächen, den Kegelflächen und überhaupt den durch Umdrehung entstandenen Flächen gewidmet. — Das dritte Buch endlich behandelt in gleich eingehender und besonders interessanter Weise die Curven von doppelter Krümmung, die Regelflächen („È stato dato il nome generale di superficie rigate a tutte quelle che sono luogo geometrico delle posizioni di una retta mobile, di cui il muovimento e determinato" sagt der Herr Verfasser pag. 261.) und die abwickelbaren Flächen, sowohl im Allgemeinen als in sehr vielen besonderen Fällen. — Besondere Beachtung gebührt auch dem Anhange, in welchem die sogenannten cotirten Projectionen oder Pläne (plans cotés), die bei topographischen Aufnahmen

Digitized by Google

bei Nivellements u. dergl. ihrer Einfachheit und Uebersichtlichkeit wegen mit Recht immer mehr Anwendung finden, in sehr lehrreicher Weise behandelt worden sind.

Gleiche Beachtung und gleiche Empfehlung wie das Lehrbuch verdienen die schon früher im Jahre 1859 erschienenen trefflichen „Applicazioni della Geometria descrittiva,“ welche vorzüglich die Schattenconstructionen, die Linear- und Luftperspective, den Steinschnitt und die Holzconstructionen behandeln.

Auf Einzelnheiten können wir nach der Natur unserer Literarischen Berichte hier nicht weiter eingehen, empfehlen aber nochmals das in jeder Beziehung treffliche und ausgezeichnete Werk — auch rücksichtlich unserer deutschen Verhältnisse — dringend zur sorgfältigsten Beachtung, und möchten demselben wohl eine Verpflanzung auf deutschen Boden durch eine Uebersetzung wünschen. Zugleich scheiden wir von dem Herrn Verfasser mit besonderem Danke für das grosse Interesse, mit welchem wir sein treffliches Buch gelesen, und die vielfache eigene Belehrung, welche wir aus demselben geschöpft haben. G.

Statik.

Die Grundzüge des graphischen Rechnens und der graphischen Statik. Von Karl von Ott, Professor an der k. k. deutschen Oberrealschule und h. Docent für Bau-Mechanik am k. deutschen Landespolytechnikum in Prag. Mit zwei Figurentafeln. Prag 1871. J. G. Calve'sche k. k. Universitäts-Buchhandlung. 8⁰.

Wer über das sogenannte graphische Rechnen und die graphische Statik in möglichster Kürze sich zu unterrichten das Bedürfniss fühlt, wird in dieser kleinen Schrift in der Kürze Alles finden, was für jeden gründlich mathematisch Gebildeten etwa nöthig sein dürfte, um alles Uebrige mit eigener Kraft absolviren zu können. Wir haben schon bei früherer Gelegenheit ausgesprochen, dass aus diesem sogenannten graphischen Rechnen u. s. w. nach unserer Meinuug viel zu viel gemacht, dasselbe sogar hin und wieder als eine neue Erfindung ausposaunt wird. Denn wer nur gründliche elementare mathematische Kenntnisse besitzt, wird gewiss mit grösster Leichtigkeit im Stande sein, sich graphische Methoden zur Darstellung gewisser einfacher arithmetischer Ausdrücke selbst zu erfinden, wie ja dies auch in der

That schon eine sehr alte Sache, und nur in ein gewisses System zu bringen ist. Dass übrigens in der Praxis mit Vortheil und hinreichender Genauigkeit an die Stelle der Rechnung graphische Methoden gesetzt werden können, haben wir keineswegs in Abrede zu stellen die Absicht; um aber hierzu eine nur allein nöthige allgemeine Anleitung zu geben, sind wahrhaftig nicht dickleibige Bücher nöthig; dazu genügt eine ganz kurze Exposition von 49 Seiten wie im vorliegenden Büchlein vollkommen und viel besser, weshalb wir auf dasselbe hier im Allgemeinen aufmerksam machen. Man hat wahrhaftig in der Mathematik mehr zu thun als dickleibige Bücher über solche zum Theil ziemlich triviale Dinge, die einem Jeden sich leicht ganz von selbst darbieten, durchzulesen; wer dergleichen nicht selbst machen kann, ist kein Mathematiker.

Astronomie.

Astronomische Tafeln und Formeln. Herausgegeben von Dr. C. F. W. Peters, Assistent der Sternwarte in Altona. Hamburg. Wilhelm Mauke. 1871. 8⁰.

Bekanntlich gab Schumacher im Jahre 1822 astronomische Hülfstafeln heraus, die sich gleich bei ihrem Erscheinen wegen ihrer grossen Zweckmässigkeit mit Recht eines sehr grossen Beifalls erfreueten. Als eine neue Ausgabe dieser Tafel konnten in gewisser Rücksicht die im Jahre 1845 von Warnstorff herausgegebenen Tafeln betrachtet werden. Dass diese Tafeln seit längerer Zeit im Buchhandel vollständig vergriffen sind, ist von Beobachtern, namentlich auch von Reisenden, schon oft schmerzlich empfunden worden, und Herr Dr. C. F. W. Peters verdient daher ganz besondern Dank, dass er sich einer neuen Ausgabe astronomischer Hülfstafeln unterzogen hat, die wir mit grosser Freude begrüsst haben, und die jedenfalls einem wahren Bedürfnisse entsprechen und zur sorgfältigsten Beachtung empfohlen zu werden sehr verdienen. Da die Schumacher'schen und Warnstorff'schen Tafeln als hinreichend bekannt vorausgesetzt werden können, so dürfen wir uns hier bei unserem beschränkten Raume damit begnügen, anzugeben, worin diese neuen Tafeln sich hauptsächlich von den genannten älteren Tafeln unterscheiden. Zunächst ist hinzugefügt eine Tafel von $\log \alpha \operatorname{tg} z$ (des ersten Gliedes der Bessel'schen Formel für den Logarithmus der Refraction für die scheinbare Zenithdistanz als Argument von Minute zu Minute); ferner eine Tafel der Reduction der geogra-

phischen auf die geocentrische Polhöhe und des Radius Vectors für verschiedene Polhöhen, eine Hülfstafel für die Parallaxenrechnung, die Reduction der Zeit auf das Bessel'sche Jahr, Interpolationstafeln, Tafeln der trigonometrischen Functionen (nämlich der sogenannten natürlichen Zahlen, nicht ihrer Logarithmen, auf fünf Decimalen, in welcher natürlich die in dieser Tafel so sehr wichtigen Secanten und Cosecanten nicht fehlen, die wunderbarerweise in solchen für viele Rechnungen äusserst nützlichen Tafeln häufig ganz weggelassen werden, wobei die Verfasser von dergleichen Tafeln sehr unvorsichtig gar nicht bedacht zu haben scheinen, dass die Secanten und Cosecanten in die Trigonometrie lediglich deshalb eingeführt worden sind, und den sehr wichtigen Zweck haben, die besondere Berechnung der reciproken Werthe der Cosinus und Sinus, nämlich der Brüche $\frac{1}{\cos}$ und $\frac{1}{\sin}$, zu umgehen und unnöthig zu machen, wodurch ausser der Bequemlichkeit natürlich auch die Genauigkeit erhöhet wird, denn Multipliciren ist leichter als Dividiren, und um irgend eine Grösse durch cos oder sin zu dividiren wird man dieselbe mit weit grösserer Leichtigkeit und Genauigkeit mit sec oder cosec multipliciren; dass die Secanten und Cosecanten in den Tafeln der Logarithmen der goniometrischen Functionen nicht vorkommen, versteht sich von selbst, weil ja $\log\sec = -\log\cos$, $\log\operatorname{cosec} = -\log\sin$ ist; ganz anders liegt aber die Sache in Tafeln wie die vorliegenden, die wir — eben auch deshalb, weil in ihnen nicht, wie leider nur zu oft, die ungemein wichtigen Secanten und Cosecanten fehlen — für ganz vortrefflich halten, und auch nicht astronomischen Lesern dringend zur Beachtung empfehlen; endlich sind in diese neuen Tafeln aufgenommen worden eine Tafel der Quadratzahlen und die ausgezeichneten hypsometrischen Tafeln von Rühlmann.

In die Tafel der astronomischen Reductionsformeln sind mit vollem Rechte nur solche Formeln aufgenommen worden, welche durch langen Gebrauch sich bereits in der Praxis vollkommen bewährt haben, und die Tafel leistet in dieser Beziehung alles nur irgend Wünschenswerthe.

Die namentlich bei einem solchen Buche auch besonders wichtige äussere Ausstattung lässt in keiner Beziehung etwas zu wünschen übrig.

Schon aus dieser Darlegung werden unsere Leser ersehen, dass diese sehr schöne und die wärmste Empfehlung verdienende Sammlung allerdings vorzugsweise für den eigentlichen Astronomen von Wichtigkeit ist, aber doch auch sehr viele für jeden Mathematiker

Digitized by Google

und Physiker wichtige treffliche Tafeln enthält, was wir hier noch besonders hervorheben, ohne wegen der Beschränktheit des Raumes auf weitere Einzelnheiten uns einlassen zu können.

Physik.

Lehrbuch der Physik für Gymnasien, Realschulen und andere höhere Lehranstalten. Von Dr. Johann Robert Boymann, Oberlehrer am Gymnasium zu Coblenz. Mit 300 in den Text eingedruckten Holzschnitten. Zweite vermehrte und verbesserte Auflage. Köln und Neuss. Schwann'sche Verlagsbuchhandlung. 1871. 8^0.

Lehrbuch der Physik. Von Peter Münch, Director der Real- und Gewerbeschule zu Münster. Mit 286 in den Text gedruckten Abbildungen. Freiburg i. B. Herder'sche Verlagshandlung. 1871. 8^0.

Unter den in neuester Zeit in sehr grosser Anzahl erschienenen und erscheinenden Lehrbüchern der Physik scheinen uns die beiden vorliegenden ganz besondere Empfehlung zu verdienen, wegen der sehr zweckmässigen Auswahl der Lehrobjecte, der Bestimmtheit und Deutlichkeit der Darstellung, und — was wir ganz besonders hervorheben — wegen der im Ganzen überaus zweckmässigen Anwendung elementar-mathematischer Lehren zur Begründung der Gesetze der Naturlehre, wo dieselbe irgend Anwendung finden kann. Es ist bekannt genug, wie sehr wir der mathematischen Darstellung der dazu geeigneten Lehren der Physik bei dem Unterrichte auf höheren Schulanstalten von jeher das Wort geredet haben, wenn dem so wichtigen physikalischen Unterrichte seine nicht zu unterschätzende Wirkung zur Bildung des jugendlichen Geistes vollständig gesichert werden soll, und wir freuen uns sehr, in den beiden vorliegenden Lehrbüchern einen neuen Beweis zu finden, dass diese Ansicht sich immer mehr Bahn bricht, und die blosse Escamotage mit physikalischen Experimenten — denen wir bei richtiger und sorgfältig ausgewählter sparsamer Anwendung ihren wohlbegründeten Werth keineswegs absprechen wollen — bei dem höheren Schulunterrichte immer mehr verschwindet; mögen unsere Gymnasien und höheren Realschulen, auf denen die grösste wissenschaftliche Strenge und Evidenz bei jedwedem Unterrichte immer die Hauptsache bleibt, wo

Digitized by Google

jeder Unterricht die allseitige Ausbildung des jugendlichen Geistes — die strenge Schulung desselben — immer vorzugsweise im Auge zu behalten hat, auch bei dem höheren, bei richtiger Handhabung so wichtigen physikalischen Unterrichte jene Escamotage mit blossen Experimenten anderen Lehranstalten überlassen, wo dieselbe leider noch oft bis zum Ueberdruss geübt wird.

Auf weiteres Detail können wir uns bei der grossen Menge anzuzeigender Schriften, und der dadurch gebotenen Kürze unserer Literarischen Berichte, unmöglich einlassen.

Jahrbücher der k. k. Central-Anstalt für Meteorologie und Erdmagnetismus. Von Carl Jelinek und Carl Fritsch, Director und Vice-Director der k. k. Central-Anstalt für Meteorologie und Erdmagnetismus. Wien. Druck der k. k. Hof- und Staatsdruckerei. 4⁰.

Der Jahrgang 1866 dieser trefflichen und für Meteorologie und Erdmagnetismus höchst wichtigen Jahrbücher ist im Literar. Ber. Nr. CLXXXXVI. S. 13. angezeigt worden, und deren Einrichtung ist aus diesem und früheren Berichten unseren Lesern vollständig bekannt. Wir dürfen uns daher hier mit der Anzeige begnügen, dass wieder drei neue Jahrgänge 1867, 1868, 1869 uns vorliegen, welche von der unausgesetzten wahrhaft grossartigen Thätigkeit der k. k. Centralanstalt das erfreulichste Zeugniss ablegen, und das grosse Interesse, welches in Oesterreich an den Fortschritten der Meteorologie allgemein genommen wird, bekunden. Das Beobachtungsnetz erweitert sich von Jahr zu Jahr, die Anzahl der österreichischen Beobachtungsstationen betrug 163 im Jahre 1867; wobei wir bemerken, dass die Länder der ungarischen Krone jetzt ihr eigenes meteorologisches Central-Institut besitzen, welchem Herr Dr. Guido Schenzl als Director vorsteht (m. s. Literar. Ber. Nr. CCVII. S. 17.).

Vermischte Schriften.

Nova Acta Regiae Societatis Scientiarum Upsaliensis. Seriei tertiae Vol. VII. Fasc. II. Upsaliae 1870. 4⁰.

Digitized by Google

Im Literar. Ber. Nr. CCV. S. 7. ist Vol. VII. Fasc. I. von uns angezeigt worden. Der vorliegende neue Band dieser wichtigen Schriften enthält nur die folgende in den Kreis des Archivs gehörende Abhandlung:

Sur la séparation des racines d'équations algébriques par **C. F. E. Björling.**

Diese Abhandlung, welche wir für eine für die Theorie der algebraischen Gleichuugen mehrfach wichtige halten, und in welcher alle darin enthaltenen Lehren mit grosser Schärfe, Deutlichkeit und Präcision entwickelt worden sind, was gerade bei dem betreffenden Gegenstande von besonderer Wichtigkeit ist und der Abhandlung sehr zur Empfehlung gereicht, schliesst sich in gewisser Rücksicht an die von demselben Herrn Verfasser in unserem Archiv. Thl. XLVIII. Nr. XXVIII. publicirte Abhandlung an. In dieser Abhandlung hat der Herr Verfasser fünf Lehrsätze bewiesen, welche er in der Einleitung zur vorliegenden Abhandlung reproducirt, dann aber fortfährt:

„Ces théorèmes*) font entrevoir que les racines complexes d'une équation algébrique sont en général de deux espèces différentes. Les unes, que je veux appeler racines complexes dérivées, doivent leur existence à la nature même de la fonction $f(x)$ ou, si l'on veut, à la forme de la courbe qui la représente géométriquement; leur nombre est égal à celui des racines complexes de l'équation dérivée et ne change point, quelle que soit la valeur de la constante, ajoutée à l'intégration. Les autres dépendent au contraire de cette constante; en choisissant des valeurs convenables de celle ci, on peut arbitrairement augmenter ou diminuer leur nombre entre de certaines limites. Je propose pour elles la dénomination de racines complexes propres.

Quoique les théorèmes précédents puissent s'employer avec aventage en quelques cas spéciaux, leur application est naturellement très-limitée. Mais leur interêt s'accroit beaucoup, depuis qu'il s'est montré qu'ils ne sont en effet que des spécialités de quelques autres, à l'aide desquels on peut en général trouver les places de toutes les racines, complexes ainsi que réelles, d'une équation algébrique du degré n, en connaissant seulement les valeurs des racines réelles de

---

*) Wir setzen dieselben als aus der angeführten Abhandlung im Archiv bekannt voraus.

Digitized by Google

la derivée et peut-être celles de quelques autres équations, dont le dégré ne surpasse pas $n-3$.

Ce sont ces derniers théorèmes qui forment le sujet du mémoire suivant. La méthode que j'y vais proposer pour la separation des racines d'une équation donnée, se laisse aussi employer avec quelques modifications au cas, où les coëfficients de cette équation sont complexes, mais pour éviter de complication, je ne m'occuperai ici que d'équations à coëfficients réels.

La démonstration des théorèmes, réproduits ci-dessus, se fonde sur la signification géométrique de la dérivée d'une fonction réelle. Ceux qui vont suivre, ont de même obtenus moyennant deux propositions sur la signification géométrique de la dérivée d'une fonction complexe."

Man wird aus diesen absichtlich von uns hier mitgetheilten eigenen Worten des Herrn Verfassers deutlich den Zweck erkennen, dessen Erreichung er sich in dieser besonderes Interesse darbietenden und zu sorgfältigster Beachtung zu empfehlenden Abhandlung vorgesetzt hat, wobei wir noch bemerken, dass die zur Trennung der Wurzeln angewandte Methode überall durch sehr zweckmässig gewählte, vollständig ausgerechnete Beispiele erläutert worden ist.

Gewissermassen als Fortsetzung oder Erweiterung der Abhandlung im Archiv Thl. XLVIII. Nr. XXVIII. wird die vorliegende Abhandlung für unsere Leser, welche das sehr wohl verdiente Interesse an jener Abhandlung genommen haben, um so grösseres Interesse haben.

Upsala Universitets Årsskrift. 1869. 1870. Upsala. Akademiska Bokhandeln (C. J. Lundström). 8°.

Jahrgang 1868 ist im Literar. Ber. Nr. CCV. S. 9. angezeigt worden.

Die beiden vorliegenden neuen Jahrgänge enthalten die folgenden hierher gehörenden Abhandlungen:

1869. Försök till bestämning af Precessionskonstanten medelst ljussvaga stjernor. Af **Magnus Nyrén.** — Undersökning af några vätskors ledningsförmåga

Digitized by Google

för värme, af **C. G. Lundquist.** (Untersuchung über das Wärmeleitungsvermögen einiger Flüssigkeiten).

1870. Om organisationen af den Meteorologiska Verksamheten i Utlandet samt förslag till de̤ss ordnande i Sverige. Reseberättelse af **H. H. Hildebrandsson.** (Reiseberichte über die meteorologischen Arbeiten im Auslande, nebst Vorschlägen zu deren Einrichtung in Schweden. Frankreich, Gross-Britannien, Oesterreich, Norwegen, die Schweiz werden ausführlich besprochen.). — Om konvergensen och divergensen af kedjebråk med hvarannan led positiv och hvarannan negativ. Af **M. Falk.** (Ueber Convergenz und Divergenz der Kettenbrüche mit abwechselnd positiven und negativen Gliedern; eine interessante der Beachtung sehr zu empfehlende Abhandlung.).

Jahres-Bericht für die Mitglieder der Hamburgischen Gesellschaft zur Verbreitung der mathematischen Wissenschaften. Fastnacht 1871. 4⁰.

Der letzte Jahresbericht (Fastnacht 1869) der hochachtbaren Gesellschaft zur Verbreitung der mathematischen Wissenschaften in Hamburg ist von uns im Literar. Ber. Nr. CLXXXXVII. S. 15. angezeigt worden. Ausser den Gesellschaftsnachrichten und einem vollständigen Verzeichniss der Mitglieder der Gesellschaft (für Fastnacht 1871) *), enthält auch der vorliegende neueste Jahresbericht wieder einige mathematische Aufsätze, die wir der Beachtung unserer Leser empfehlen, nämlich: Die Seite des regelmässigen Vierzehnecks. S. 5. — Satz über zwei besondere Ellipsen (die einander ähnlich sind, die Halbaxen a, b und α, β haben, und in denen $a = \alpha\sqrt{2}$ ist.). S. 6. — Einige bestimmte Integrale. (Zurückführung der drei Integrale

$$\int_0^1 \frac{x \arcsin x . dx}{\sqrt{1-p^2x^2}},$$

---

*) Sechs Ehrenmitglieder, unter denen zu seiner besonderen Freude der Name des Herausgebers des Archivs schon seit 1836; 26 ordentliche Mitglieder in Hamburg, von denen leider der berühmte Adolph Repsold, Mechaniker und Oberspritzenmeister in Hamburg, bereits gestorben ist; und 18 auswärtige Mitglieder.

Digitized by Google

$$\int_0^1 \log\left(\frac{\sqrt{1-p^2x^2}-p\sqrt{1-x^2}}{1-p}\right).dx,$$

$$\int_0^1 \arcsin(p\sqrt{1-x^2}).dx$$

auf elliptische Functionen.). S. 7.

Der Verfasser dieser beachtenswerthen Aufsätze ist Herr Dr. Hermann Wagner, z. Z. Jahrverwalter.

Jahrbuch der Erfindungen und Fortschritte auf den Gebieten der Physik und Chemie, der Technologie und Mechanik, der Astronomie und Meteorologie. Herausgegeben von Dr. H. Hirzel, Professor an der Universität, und H. Gretschel, Lehrer der Mathematik zu Leipzig. Sechster Jahrgang. Mit 49 in den Text gedruckten Abbildungen. Leipzig. Quandt und Händel. 1870. — Siebenter Jahrgang. In demselben Verlage. 1871. 8⁰.

Dieses Jahrbuch der Erfindungen, von dem uns die beiden neuesten Jahrgänge vorliegen, ist ein sehr empfehlenswerthes Unternehmen, für welches den beiden Herren Herausgebern besonderer Dank gebührt. Vorzüglich muss dasselbe auch Lehrern der Naturwissenschaften an Schulen empfohlen werden, weil denselben gewiss nur sehr selten die grosse Masse von Zeit- und Gesellschaftsschriften zugänglich sein wird, in denen die Nachrichten über die verschiedenen neuen Erfindungen und über die Fortschritte auf den Gebieten der auf dem Titel genannten Wissenschaften meistens sehr zerstreuet enthalten sind. Auch sind ja die auf dem Titel genannten Naturwissenschaften gerade diejenigen, welche für den Lehrer der Mathematik und der Naturwissenschaft an einer höheren Unterrichtsanstalt bei Weitem das meiste Interesse haben, und von den Herren Herausgebern ist auch rücksichtlich der gemachten Mittheilungen eine sehr verständige Auswahl getroffen worden, indem ja natürlich Alles und Jedes unmöglich mitgetheilt werden konnte.

So weit es uns selbst möglich gewesen ist, den auf den Gebieten der auf dem Titel genannten Wissenschaften in dem Zeitraume, welchem die beiden vorliegenden Jahrgänge gewidmet sind, gemachten Erfindungen zu folgen, und nachdem wir uns mit dem Inhalte dieser beiden Jahrgänge sorgfältigst mit besonderem Interesse und mit viel-

Digitized by Google

facher eigener Belehrung vertraut gemacht haben, sind wir der Meinung, dass in denselben nichts Wesentliches und wirklich Bedeutungsvolles übergangen worden ist; die Darstellung haben wir überall sehr deutlich und verständlich gefunden, und wo es nöthig war, fehlen vorzüglich gut ausgeführte erläuternde bildliche Darstellungen nicht; überall tritt uns die vollständigste und ausgebreitetste Sachkenntniss der beiden Herren Herausgeber in erfreulichster und anerkennungswerthester Weise entgegen. Dass namentlich bei einem solchen Buche hier auf Detail einzugehen ganz unmöglich ist, ist klar, und wir müssen uns daher mit dem vorhergehenden allgemeinen Urtheil begnügen, wünschen aber sehr, dass das verdienstliche Unternehmen stets den ungestörtesten Fortgang haben und sich der weitesten Verbreitung erfreuen möge. Die äussere Ausstattung ist vortrefflich und macht der Verlagshandlung alle Ehre.

Berichtigung.

Auf Taf. IV. muss es unten in der zweiten Hälfte der Tafel statt:

Nr. VII. Grunert: Satz von den Kegelschnitten.

heissen:

Nr. IX. Grunert: Satz von den Kegelschnitten.

Digitized by Google

Literarischer Bericht

CCXIV.

Geschichte und Literatur der Mathematik und Physik.

Johann Kepler.

Am 27. December 1871, als dem Tage, an welchem vor 300 Jahren

Johann Kepler

geboren wurde, hat in Graz eine sehr grossartige Festfeier stattgefunden, über welche die Grazer Tagespost Nr. 346. vom 28. December 1871 und die Grazer Zeitung von demselben Tage ausführliche sehr interessante Berichte erstatten. Im Landhause zu Graz wurde eine Gedenktafel aus Marmor angebracht, welche mit Goldlettern die Zeit angiebt, die Kepler in Graz verlebte — vom Jahre 1594 bis 1600. Die kaiserliche Akademie der Wissenschaften in Wien sprach ihre Theilnahme an dem schönen Feste in folgendem Telegramm aus:

„Die kaiserliche Akademie der Wissenschaften nimmt innigen Antheil an dem schönen Erinnerungsfeste, das heute in Graz gefeiert wird, und kann nicht umhin dem grossen Todten auch ihre Huldigung darzubringen. Wien, 27. December 1871.

Rokitansky, d. Z. Präsident."

Digitized by Google

Keplers grosse Verdienste in der wärmsten Weise würdigende Telegramme hatten namentlich auch die Universität Prag u. A. gesandt.

Die Festrede hielt Herr Prof. Dr. Karl Friesach in Graz.

Ueber die schöne Vorfeier, welche schon am 15. October 1871 in dem Schlösschen Mühleck bei Graz begangen worden war, ist im Literar. Ber. Nr. CCXII. S. 1. ausführlicher berichtet worden. Bei dieser Gelegenheit sind drei sehr grosse und schöne Photographieen der betreffenden Localitäten angefertigt worden, die dem Arbeitszimmer eines jeden Mathematikers und Astronomen zur besonderen Zierde und Ausschmückung zu dienen sehr geeignet sind.

Weiteres über diese (u. a.) schönen Festlichkeiten zu Ehren Keplers behalten wir späteren Heften des Archivs vor*).

Sehr gern benutzen wir aber diese Gelegenheit, um unsere Leser gleich an diesem Orte auf eine treffliche Schrift aufmerksam zu machen, mit welcher bei Gelegenheit der Keplerfeier Herr Professor E. G. Reuschle in Stuttgart die Literatur der Geschichte der Mathematik und Astronomie bereichert hat, und glauben diese Schrift unseren Lesern am besten empfehlen zu können, indem wir nachstehend aus der Wiener Deutschen Zeitung Nr. 10. Wien, Mittwoch den 27. December, das Urtheil abdrucken lassen, welches ein sehr competenter Richter über dieselbe — zugleich mit ihrer näheren Charakterisirung — veröffentlicht hat:

Zum Kepler-Jubiläum.

So oft es auch den deutschen Stämmen an Einigkeit gebrach, nach einer Richtung glaubten sie stets an ihre Zusammengehörigkeit: in den grossen Geistern der Nation erkannten sie immer und überall gemeinsame Führer an.

Zu diesen Führern zählt in erster Reihe der unsterbliche Regenerator der Himmelskunde, Johannes Kepler, der heute vor dreihundert Jahren zu Weilderstadt das Licht der Welt erblickte. Wenn auch seine Laufbahn ihn nie dauernd nach Wien führte und andere

*) Nach Zeitungsnachrichten u. s. w. haben in einigen Städten Festlichkeiten sehr post festum erst gegen Ende des Januar 1872 stattgefunden.

Digitized by Google

Gegenden der Monarchie im Leben ihm näher standen als unser Kronland, so ziemt es doch uns Deutschösterreichern überhaupt, nicht ihm, sondern uns zu Ehren, Zeugniss davon zu geben, dass wir uns des Gedenktages eines Mannes wohl bewusst sind, in welchem der schöpferische Genius mit dem unerschütterlichen Charakter und mit dem liebenswürdigen Menschen um die Palme rangen, und der in Graz, Prag und Linz sich ebenso gut in seinem weiteren Vaterlande fühlte, wie etwa in Regensburg.

Kepler's eigentliche Geburtsstätte, Württemberg, liess es an Beweisen nicht fehlen, dass man dort den Ruhm zu schätzen weiss, die Wiege eines der grössten Geister aller Zeiten und Völker beherbergt zu haben. Im vorigen Jahre schon wurde zu Weilderstadt ein ungemein gelungenes, aus v. Kreling's Meisterhand hervorgegangenes Monument enthüllt, zu dessen Errichtung — nebenbei bemerkt — die österreichische Regierung in sehr liberaler Weise beigetragen hatte; Oberstudienrath v. Frisch in Stuttgart brachte vor Kurzem nach mehr als dreissigjähriger Arbeit in einer acht starke Bände umfassenden und kritisch commentirten Gesammtausgabe von Kepler's Werken ein anderes Denkmal zu Stande, das fortan an jedem Sitze geistiger Cultur beredt sprechen wird für den durchdringenden Scharfsinn, die bewundernswerthe Vielseitigkeit, die unermüdliche Thätigkeit unseres grossen Altvordern; endlich hat in diesen Tagen Professor E. G. Reuschle in Stuttgart in seiner gediegenen, vielfach originalen und höchst belehrenden Schrift:

„Kepler und die Astronomie". Frankfurt a. M., Verlag von Heyder und Zimmer, 200 Seiten Octav.

auch grössere Leserkreise mit einem wahrhaft werthvollen Gedenkbuche beschenkt.

Reuschle wandte ebenfalls nahezu seit einem Menschenalter sich dem Studium der geistigen Entwicklung Kepler's zu. Ein gehaltreiches Programm des Stuttgarter Gymnasiums machte uns im Jahre 1841 mit den ersten Früchten dieser Forschung bekannt; sieben Jahre später erschien eine Umarbeitung jenes Aufsatzes in den Noack'schen „Jahrbüchern für Wissenschaft und Leben," deren mannigfaltig neue Standpunkte bald in verwandte Arbeiten anderer Autoren übergingen. Was jetzt vor uns liegt, ist eine nach vielen Seiten, namentlich durch das Frisch'sche Werk vervollständigte, durchaus gemeinfasslich gehaltene Schrift, deren Inhaltsverzeichniss man nur zu kennen braucht, um reichlichen Genuss von der Lecture zu erwarten.

Digitized by Google

Die Einleitung gibt einen sehr interessanten Ueberblick der Grundlagen unserer heutigen Astronomie in den durch ihre Heroen Kopernicus, Kepler, Newton bezeichneten Epochen. Der Haupttheil des Werkes enthält im ersten Abschnitte ein vortrefflich skizzirtes „Bild Kepler's in Worten“, eine Darlegung seiner Familienverhältnisse, seines Bildungsganges und seiner wechselvollen Schicksale.

Der zweite Abschnitt behandelt Kepler's Persönlichkeit und Verhältniss zu seiner Zeit, wo seine Geistesfreiheit, das volle Bewusstsein seiner Mission, der massgebende Einfluss auf die Mitwelt sich in glänzendem Lichte zeigen. Von den vielen charakteristischen Zügen, die mitgetheilt werden, sei hier der eine erwähnt, dass Kepler eines Tages dem zagenden Galilei zuruft: „Habe Vertrauen, Galilei, und schreite voran! Wenn ich richtig sehe, werden wenige von Europas bedeutenden Mathematikern von uns abweichen wollen; so gross ist die Macht der Wahrheit.“

Der dritte Abschnitt macht uns mit Kepler's Werken näher bekannt und zeigt, wie seine von Unberufenen oft bespöttelte Phantasie in der Architektonik des Weltsystemes und in der Himmels-Physik ihm eben die Schwingen gab, auf denen er sich zur Entdeckung der die Bewegungen unseres Sonnensystemes regelnden Gesetze erhob. Auch hier begegnen wir wieder dem sorgfältigsten Quellenstudium und zahlreichen Berichtigungen incorrecter, nachgerade gäng und gebe gewordener Ansichten, wie denn Reuschle's Festschrift überhaupt eine der seltenen populären Darstellungen bildet, deren Autoren weit grössere Gebiete beherrschen, als sie den Lesern vorführen, und daher das, was sie geben, nur in strenger Läuterung mittheilen.

Wir empfehlen das anziehende Buch Allen, die Kepler's unvergängliche Verdienste gründlich kennen und nach Gebühr achten lernen wollen.

Wien, 27. December 1871. C. v. Littrow.

Zum Andenken an Johannes Kepler. Rede, gehalten zur Feier des 300jährigen Geburtstages Keplers, am 27. December 1871 in der öffentlichen Sitzung des Vereins für Mathematik und Naturwissenschaften in Ulm von Dr. L. F. Ofterdinger, Mitglied des Vereins für Mathe-

Digitized by Google

matik und Naturwissenschaften in Ulm. Ulm, 1872. Druck von J. E. Ling. 8⁰.

Dass in einer der wichtigsten Städte des Geburtslandes des grossen Kepler, in Ulm, wo so viele treffliche Mathematiker lebten*) und noch leben, der denkwürdige 27. December 1871 nicht unbeachtet vorübergehen würde, verstand sich von selbst. Eine besondere Feierlichkeit hat der dortige hochachtbare Verein für Mathematik und Naturwissenschaften veranstaltet, und bei dieser Gelegenheit ist die obige Rede gehalten worden. Wir bringen diese Rede als eine besonders zu beachtende, viele interessante Notizen enthaltende zur Anzeige. Das Hauptwerk Kepler's ist bekanntlich das folgende:

Astronomia nova *αἰτιολογητὸσ* seu physica coelestis, tradita commentariis de motibus stellae Martis ex observationibus Tychonis Brahe; jussu et sumptibus Rudolphi II, Romanorum Imperatoris etc. plurium annorum pertinaci studio elaborata Pragae, a S. C. M. Mathematico Joanne Keplero. 1609.

Kepler widmete dieses wichtige Werk aus Dankbarkeit seinem Kaiser**) und sagt in dem Dedicationsschreiben u. A. Folgendes: „Er bringe dem Kaiser einen vornehmen Gefangenen, nemlich den Mars in den Fesseln der Rechnung. Die Astronomen wussten diesen Feind gar nicht zu überwältigen, aber der vortreffliche Heerführer Tycho de Brahe in Diensten der dänischen Könige Friedrich II. und Christian und zuletzt des Kaisers hat in 20jähriger Nachtwache alle Kriegslisten dieses Gegners erforscht und aufgezeichnet hinterlassen***)“.

Schliesslich bemerken wir noch, dass in Ulm manche Reliquien Kepler's aufbewahrt werden; die schönste und grösste Erinnerung Ulm's an Kepler ist aber jedenfalls die, dass hier seine hochberühnten Rudolphinischen Tafeln gedruckt wurden, ein Werk, von dem Lapace sagt: „sie werden in der Astronomie auf immer merkwürdig bleiben, weil sie die ersten astronomischen Tafeln waren, welche sich auf die wahren Gesetze der Planeten gründeten.“

---

*) Herr Ofterdinger hat darüber früher eine besondere werthvolle Schrift veröffentlicht.

**) Er war S. C. M. (Suae Caesarae Majestatis) Mathematicus.

***) Das Weitere muss man in der trefflichen Rede selbst nachsehen, da zu weiteren Mittheilungen es uns hier an Raum gebricht.

Digitized by Google

Als Geburtszeit und Geburtsort Kepler's wird S. 3. mit grosser Genauigkeit angegeben: Die schwäbische freie Reichsstadt Weil, am 27. December 1571, Mittags 2 Uhr 30 Minuten.

Nicolaus Copernicus.

In Thorn, der Geburtsstadt des grossen Copernicus, besteht unter dem Namen

Copernicus-Verein

ein höchst achtbarer wissenschaftlicher Verein, welcher — neben anderen wissenschaftlichen Bestrebungen — sich auch besonders die Aufhellung der Geschichte des Copernicus zur Aufgabe gemacht hat. Dieser Verein hat neuerlich zwei Berichte über seine Thätigkeit unter den folgenden Titeln veröffentlicht:

Die ersten sechszehn Jahre des Copernicus-Vereins in Thorn. Rechenschafts-Bericht, zusammengestellt aus den Akten des Vereins von Dir. Dr. A. Prowe. Königsberg 1870. 8⁰.

XVII. Jahres-Bericht des Copernicus-Vereins für Wissenschaft und Kunst zu Thorn, abgestattet in der öffentlichen Sitzung am 19. Februar 1871 von dem zeitigen Vorsitzenden Prof. Dr. L. Prowe. Königsberg 1871. 8⁰.

Beide Berichte enthalten auch manche interessante Notizen über Copernicus. Vorzüglich aber machen wir hier aufmerksam auf die beiden folgenden, von dem jetzigen Vorsitzenden des Vereins, Prof. Dr. Leopold Prowe, vor Kurzem herausgegebenen Schriften:

Das Andenken des Copernicus bei der dankbaren Nachwelt. Von Dr. Leopold Prowe. Thorn, 1870. 50 Seiten 8⁰.

Ueber den Sterbeort und die Grabstätte des Copernicus. Von Dr. Leopold Prowe. Thorn, 1870. 38 Seiten 8⁰.

Die erste dieser beiden Schriften stellt sich eine doppelte Auf-

Digitized by Google

gabe: Zunächst soll ein Ueberblick über die mannigfachen Bestrebungen gegeben werden, welche in der Provinz Preussen zu verschiedenen Zeiten hervorgetreten sind, das Andenken an den grossen Landsmann durch öffentliche Denkmäler und Erinnerungszeichen zu bewahren. Sodann sollen die öffentlichen Denkmäler angereiht werden, welche ausserhalb der genannten Provinz zu Ehren des hochgefeierten Mannes errichtet sind.

Ein Jeder wird diese Schrift, in welcher wir den auf ihre Abfassung verwandten Fleiss und die Genauigkeit, mit welcher alle in ihr enthaltenen Mittheilungen gemacht sind, bewundern, mit dem grössten Interesse lesen. Dieselbe enthält aber keineswegs eine blosse trockene Aufzählung der dem Copernicus errichteten Denkmäler und sonstigen Erinnerungszeichen; vielmehr ist in ihr Alles mit meistentheils vollständig mitgetheilten historischen Documenten belegt, deren Zusammenbringung jedenfalls nur mit sehr grosser Mühe des Herrn Herausgebers möglich gewesen ist. Dadurch hat aber die Schrift eine nicht geringe Wichtigkeit für die Geschichte des Copernicus im Allgemeinen, und sonach auch für die Geschichte der Astronomie überhaupt erhalten, so dass also auch von rein wissenschaftlicher Seite dem Herrn Verfasser für deren Publication grosser Dank gebührt.

Der Inhalt der zweiten der beiden oben genannten Schriften ist durch ihren Titel mit vollständiger Deutlichkeit und Bestimmtheit bezeichnet. Ueber den Sterbe- und Begräbnissort des Copernicus herrschen grosse Zweifel und Beides ist mit Sicherheit nicht zu ermitteln. Mit grosser Gelehrsamkeit und kritischer Umsicht, Alles mit den schätzenswerthesten historischen Documenten belegend, stellt der Herr Verfasser in dieser historisch sehr wichtigen Schrift die verschiedenen Ansichten zusammen, und giebt Nachricht von seinen eigenen sehr mühsamen Untersuchungen. Die gebotene Kürze unserer Literarischen Berichte gestattet uns natürlich ausführlichere Mittheilungen über die in dieser schätzbaren Schrift gewonnenen Resultate nicht. Jedoch können wir uns nicht versagen, wenigstens das Folgende in aller Kürze zu bemerken. — Auf S. 12. sagt der Herr Verfasser, dass die mehrfach verbreitete Ansicht, Copernicus sei in Thorn gestorben und begraben, auf einer Tradition beruhe, die jedoch nicht in Thorn entstanden, sondern gerade von Frauenburg (wo bekanntlich Copernicus Domherr war) her übertragen worden sei. Ohne dieser Tradition beistimmen zu können, will der Herr Verfasser jedoch bereitwillig zugestehen, dass die Annahme, Copernicus sei in Thorn gestorben und begraben, auch gegenwärtig noch nicht mit objektiver Sicherheit als falsch zurückgewiesen werden kann. —

Digitized by Google

Hiernach aber wendet sich der Herr Verfasser zu der Entwickelung der Gründe, die ihn veranlassen, der hergebrachten Erzählung, Copernicus sei in Frauenburg gestorben und begraben, treu zu bleiben, und giebt dieselbe mit so vieler historischen Treue, Gewissenhaftigkeit und Gelehrsamkeit, dass diese Schrift, wie schon erwähnt, für die Geschichte des grossen Mannes unbedingt von nicht geringer Wichtigkeit ist, und der sorgfältigsten Beachtung sehr empfohlen zu werden verdient, mit dem Herrn Verfasser zu zollendem besonderen Danke für die verdienstliche Veröffentlichung derselben.

Da Copernicus am 19. Februar 1473 in Thorn geboren wurde, so sehen wir im nächsten Jahre seiner 400jährigen Geburtstagsfeier entgegen, für welche — wie wir zu unserer Freude nach uns gemachten Mittheilungen berichten können — der Copernicus-Verein schon jetzt grossartige Vorbereitungen macht. Wir glauben versichern zu können, dass man sich der Hoffnung hingeben darf, dass der Copernicus-Verein zu der genannten denkwürdigen Feier in würdigster Ausstattung eine neue Ausgabe des unsterblichen, dem Papste Paul III. gewidmeten Hauptwerks des Copernicus: „De orbium coelestium revolutionibus libri VI. (Norimb. 1543, Bas. 1566, Amst. 1617)“ veranstalten, und dadurch der astronomischen und mathematischen Literatur ein sehr angenehmes, wichtiges und dankenswerthes Geschenk machen wird, G.

Bullettino di Bibliografia e di Storia delle scienze matematiche e fisiche, pubblicato da B. Boncompagni. Roma 1871. 4⁰. (Vergl. Literar. Ber. Nr. CCXIII. S. 1.).

Tomo IV. Luglio 1871. Intorno ad alcuni passi di opere del medio evo ralativi alla calamita. Lettere di M. Steinschneider à D. B. Boncompagni. p. 257. Appendice. p. 299. (Eine sehr gelehrte und interessante Abhandlung über den Magnet, mit mehrfacher Rücksicht auf Heilkunde, die aber freilich nur für den vollständig verständlich ist, der eine hinreichende Kenntniss der orientalischen Sprachen, namentlich des Arabischen besitzt, worauf der Unterzeichnete leider keinen Anspruch machen darf. G.).

Digitized by Google

Arithmetik.

Uebungsbuch für den Unterricht in der Arithmetik und Algebra an höheren Lehranstalten. Von A. Feld und V. Serf, Oberlehrern an dem Königl. Friedrich Wilhelms-Gymnasium und der damit verbundenen Realschule I. Ordnung zu Cöln. Zweite Auflage. Mainz. C. G. Kunze's Nachfolger. 1871. 8⁰.

Da die Anzahl der Lehrern an höheren Lehranstalten bei ihrem Unterrichte zu Gebote stehenden Uebungsaufgaben niemals gross genug werden kann, so glauben wir denselben auch diese, erst in der vorliegenden zweiten Auflage uns bekannt gewordene Sammlung, neben den bekannten grösseren Sammlungen, zur Beachtung empfehlen zu dürfen.

Astronomie.

Die Sonne. Die wichtigeren neueren Entdeckungen über ihren Bau, ihre Stralungen, ihre Stellung im Weltall und ihr Verhältniss zu den übrigen Himmelskörpern. Von P. A. Secchi, Director der Sternwarte des Collegium Romanum in Rom. Autorisirte deutsche Ausgabe und Originalwerk bezüglich der neuesten von dem Verfasser für die deutsche Ausgabe hinzugefügten Beobachtungen und Entdeckungen der Jahre 1870 und 1871. Herausgegeben von Dr. H. Schellen, Director der Realschule I. O. zu Köln etc. Mit zahlreichen Holzschnitten, zwei Photographieen und acht farbigen Tafeln. Erste Abtheilung. Braunschweig. G. Westermann. 1872.

Bekanntlich verdanken die Astronomie, und Naturwissenschaft überhaupt, die genauere Kenntniss, welche wir jetzt von der Natur des Sonnenkörpers besitzen, den Arbeiten des berühmten Secchi in Rom, welcher darüber unter dem Titel „Le Soleil“ ein besonderes Werk herausgegeben hat, das seine Entstehung zunächst öffentlichen Vorträgen verdankt, die sein berühmter Verfasser im Jahre 1867 den Zöglingen der École de St. Geneviève in Paris gehalten hat, die dann in den Études littéraires et religieuses

veröffentlicht wurden, und sich des allseitigsten Beifalls erfreuten. Natürlich hat Secchi seit jener Zeit das ganze Beobachtungsmaterial sehr vermehrt*), und seinen Entdeckungen neue sehr wichtige Entdeckungen und Arbeiten hinzugefügt.

Das vorliegende deutsche Werk, durch dessen Herausgabe sich Herr Schellen jedenfalls ein besonderes Verdienst erworben hat, ist nun keineswegs als eine blosse Uebersetzung des genannten französischen Werks, sondern vielmehr als eine neue Bearbeitung desselben zu betrachten, in welche nicht bloss die neuen Entdeckungen Secchi's aufgenommen worden sind, sondern auch die Resultate der umfangreichen Untersuchungen deutscher, englischer, französischer und amerikanischer Astronomen die gebührende Berücksichtigung gefunden haben, welche in dem früheren französischen Werke weniger in der Absicht Secchi's gelegen hatte.

Wir glauben, dass in das vorliegende deutsche Werk Alles aufgenommen worden ist, was irgend Berücksichtigung verdiente, und sind daher der Meinung, dass dasselbe gegenwärtig als das vollständigste und wichtigste Werk über die physische Beschaffenheit der Sonne zu betrachten ist, und allen denen, welche sich über diese Dinge in leicht verständlicher und sehr ansprechender Weise eine gründliche und möglichst vollständige Kenntniss verschaffen wollen, dringendst empfohlen werden muss, indem dieselben einen besseren Rathgeber gewiss nicht finden werden.

Den Hauptinhalt der vorliegenden ersten Abtheilung theilen wir nachstehend mit: Nach Vorrede und Einleitung folgen:

I. Theil. Bau der Sonne. I. Kap. Allgemeiner Anblick der Sonne. Die Sonnenflecke und ihre Haupterscheinungen. — II. Kap. Neuere Methoden der Beobachtung. — III. Kap. Bau der Sonnenflecke. — IV. Kap. Eigene Bewegung der Flecke. — V. Kap. Die Sonnenatmosphäre. — VI. Kap. Die Spectralanalyse des Sonnenlichtes. — VII. Kap. Erscheinungen, welche bei totalen Sonnenfinsternissen beobachtet werden; Folgerungen, welche sich daraus für die Atmosphäre der Sonne ergeben. — VIII. Kap. Die Corona bei totalen Sonnenfinsternissen. — IX. Kap. Die Beobachtung der Protuberanzen oder der rosenfarbigen Hervorragungen bei totalen Sonnenfinsternissen.

---

*) Das Werk „Le Soleil" umfasst nur das Beobachtungsmaterial bis zum Jahre 1870.

Digitized by Google

Papier, Druck und alle Abbildungen, überhaupt die ganze äussere Ausstattung, lassen bei Weitem die meisten Erscheinungen auf ähnlichen Gebieten weit hinter sich, und gereichen der berühmten Verlagshandlung zur grössten Ehre.

Dem Erscheinen der zweiten Abtheilung sehen wir mit dem grössten Verlangen entgegen, und werden über dieselbe sogleich weiter berichten, wenn sie in unsere Hände gelangt sein wird.

Möge das schöne Werk sich der so sehr verdienten sorgfältigen Beachtung im reichsten Maasse und in den weitesten Kreisen erfreuen!

Physik.

Die Wärme, betrachtet als eine Art der Bewegung von John Tyndall, Mitglied der Royal Society, Professor der Physik an der Royal Institution und an der Bergwerksschule zu London. Autorisirte deutsche Ausgabe, herausgegeben durch H. Helmholtz und G. Wiedemann nach der vierten Auflage des Originals. Mit zahlreichen in den Text eingedruckten Holzstichen und einer Tafel. Zweite vermehrte und verbesserte Auflage. Braunschweig, Druck und Verlag von Friedrich Vieweg und Sohn. 1871. 8°.

Wir dürfen voraussetzen, dass dieses schöne, in jeder Beziehung, besonders aber auch durch meisterhafte populäre Darstellung ausgezeichnete Werk aus seinen früheren Auflagen bereits vollständig bekannt ist, und haben daher nur kurz zu bemerken, wodurch diese zweite Auflage der deutschen Ausgabe sich von der ersten unterscheidet. Schon der Titel besagt, dass dieselbe nach der vierten Auflage des Originals bearbeitet worden ist. Von dieser vierten Auflage in ihrer Beziehung zu den früheren sagt aber Herr Tyndall in der Vorrede zu derselben: „Diese vierte Auflage enthält Berichte von meinen letzten Untersuchungen über die chemischen Wirkungen des Lichts vom dynamischen Standpunkte betrachtet. In den früheren Auflagen wurden die Beziehungen von Stoffen im Gaszustande zu den längeren Wellen des Spectrums auseinandergesetzt. In der hier vorliegenden werden nun auch die Beziehungen derselben zu den kür-

Digitized by Google

zeren Wellen dem Versuch unterworfen. Die beiden verschiedenen Wege, die ich bei diesen Untersuchungen einschlug, haben durch die ihnen beiden gemeinsame Beziehung auf die Molekularbewegung inneren Zusammenhang." — „Dass und wie sich die Tragweite dieser Resultate auf zwei der grössten Probleme der Meteorologie — das Blau des Himmels und die Polarisation seines Lichts — erstreckt, ist ebenfalls darin nachgewiesen und erklärt." — Weiter habe ich noch eine Hypothese über die Bildung der Kometen und ein Paar Bemerkungen über die Polarisation der Wärme beigefügt.

Ueber die Trefflichkeit der äusseren Ausstattung etwas zu sagen, würde bei einem Artikel der berühmten Verlagshandlung ganz überflüssig sein.

Studi sopra gli Strumenti magnetici del P. Carlo Braun D. C. D. G. Estratto dal Bullettino meteorologico dell' Osservatorio del Collegio Romano. Vol. X. Num. 6, 7, 9, 10, 11. Roma Tipografia delle scienze matematiche e fisiche. Via Lata Num. 211 A. 1871. 8⁰. p. 1.—p. 56.

In der Einleitung zu dieser Schrift sagt der Herr Verfasser, dass das Observatorium des Collegio Romano ein magnetisches Inclinatorium von seltener Vollkommenheit besitze, mit welchem viele äusserst genügende und genaue Resultate erhalten worden seien. Dadurch sei in ihm der Gedanke entstanden, dieses treffliche Instrument auch zur Bestimmung der Declination u. s. w. zu benutzen, und dadurch das Inclinatorium zu einem „instrumento magnetico universale" zu machen, „il quale è capace di dare tutti gli elementi magnetici con una precisione soddisfacente anche alle esigenze della scienze dei giorni nostri." In wie weit der Herr Verfasser hierin vollkommen Recht hat, können wir nicht mit vollkommener Sicherheit beurtheilen. Dass sich aber der Zweck des Herrn Verfassers nur durch Entwickelung einer besonderen Theorie erreichen und auf eine solche gründen liess, versteht sich von selbst; und diese Theorie ist in der Schrift mit hinreichender Ausführlichkeit und Ableitung aller erforderlichen Formeln gegeben, so dass wir glauben, in dieser Beziehung die Schrift als eine recht lehrreiche bezeichnen und zu sorgfältiger Beachtung empfehlen zu können, da ihr Inhalt gewiss manchem Besitzer eines guten Inclinatoriums recht nützlich sein kann. Nach der Einleitung enthält dieselbe drei Hauptabschnitte, nämlich: A. Misura dell' inclinatione. p. 5.—p. 19. — B. De-

Digitized by Google

terminazione della Declinazione. p. 19.—p. 36. — C. Determinazione dell' intensità. p. 36.—p. 56.

Vermischte Schriften.

Sitzungsberichte der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien. Vergl. Literar. Bericht. Nr. CCXI. S. 5.

Band LXII. Heft IV. und V. v. Waltenhofen: Ueber die Anziehung, welche eine Magnetisirungsspirale auf einen beweglichen Eisenkern ausübt. (Mit 1 Tafel.) S. 639. — v. Oppolzer: Ueber den Winnecke'schen Kometen (Komet III. 1819). I. Abhandlung. S. 655. — Peterin: Ueber die Bildung elektrischer Ringfiguren durch den Strom der Influenzmaschine. (Mit 1 Tafel.) S. 679. — Benigař: Experimental-Untersuchungen über die Diffusion von Gasgemengen. S. 687. — Weyr, Em.: Ueber Evolution räumlicher Curven. S. 804. — v. Littrow: Physische Zusammenkünfte der Planeten 1 bis 82 während der nächsten Jahre. S. 868. — Weiss: Discussion der während der totalen Sonnenfinsterniss am 18. August 1868 angestellten Beobachtung und der daraus folgenden Ergebnisse.

Band LXIII. Heft I. Wassmuth: Ueber die Arbeit, die beim Magnetisiren eines Eisenstabes durch den elektrischen Strom geleistet wird. (Mit 1 Holzschnitte.) S. 6. — Stefan: Ueber das Gleichgewicht und die Bewegung, insbesondere die Diffusion von Gasgemengen. S. 63. — Exner, K.: Ueber die Maxima und Minima der Winkel, unter welchen krumme Flächen von Radien-Vectoren durchschnitten werden. (Mit 1 Tafel.) S. 149. — Pfaundler: Elementare Ableitung der Grundgleichung der dynamischen Gastheorie. (Mit 1 Tafel.) S. 159.

Band LXIII. Heft II. Stefan: Ueber den Einfluss der Wärme auf die Brechung des Lichtes in festen Körpern. (Mit 2 Holzschnitten.) S. 223. — v. Obermayer: Ueber die Anwendung eines Elektromotors zur stroboskopischen Bestimmung der Tonhöhe. S. 249. — Schulhof: Bahubestimmung des Planeten (108) Hecuba.

Digitized by Google

S. 267. — Stern: Beiträge zur Theorie der Resonanz fester Körper mit Rücksicht auf das Mitschwingen der Luft. S. 286.

Band LXIII. Heft III. Boltzmann: Ueber das Wärmegleichgewicht zwichen mehratomigen Gasmolekülen. S. 397. — Seydler: Elemente des Kometen II. 1869. S. 121. — Schrötter: II. Ueber eine merkwürdige Veränderung der Oberfläche einer Glasplatte durch eine plötzliche und heftige Erschütterung. S. 457. Beiträge zur Kenntniss des Diamantes. S. 462. — Weyr: Ueber rationale Raumcurven vierter Ordnung. S. 493.

Band LXIII. Heft IV. Ditscheiner: Ueber einige neue Talbot'sche Interferenz-Erscheinungen. (Mit 1 Tafel.) S. 529. — Derselbe: Ueber eine einfache Vorrichtung zur Herstellung complementärer Farbenpaare mit Brücke's Schistoskop. S. 554. — Derselbe: Zur Bestimmung der Wellenlänge der Frauenhofer'schen Linien. S. 565. — Niemtschick: Allgemeine Methoden zur Darstellung der Durchschnitte von Ebenen mit Kegel- und Cylinderflächen, von Geraden mit Kegelschnittslinien und von confocalen Kegelschnittslinien unter sich. (Mit 2 Tafeln.) S. 571. — v. Lang: Versuche über Einströmung von Gasen. (Mit 1 Holzschnitt.) S. 604. — v. Oppolzer: Ueber die Bahn des Planeten (62) „Erato". S. 619. — v. Lang: Ueber die anormale Dispersion spitzer Prismen. S. 658.

Atti dell' Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei, compilati dal Segretario. Anno XXIV. Roma 1871. 4°. (Vergl. Literar. Ber. Nr. CCXII. S. 11.).

Sessione VI^{a} del 13 Agosto 1871. Dieses Heft enthält die folgenden hierher gehörenden Aufsätze: Secchi, P. Angelo: Sulla distribuzione delle protuberanze intorno al disco solare. Terza comunicazione. p. 307. — Azzarelli, Prof. Mattia: Sul teorema di Fagnano per ognuna delle curve coniche. p. 336. (Wir haben diese analytische Abhandlung über das berühmte Theorem von Fagnano für alle Kegelschnitte mit besonderem Interesse gelesen und empfehlen dieselbe recht sehr zu allgemeinster Beachtung. Besonders empfehlen wir dazu den pag. 351. Nr. 12. beginnenden, verschiedene sehr bemerkenswerthe Relationen enthaltenden Abschnitt, welchen der Herr Verfasser mit dem folgenden seinen Inhalt deutlich bezeichnenden Worten einleitet: „Per la soluzione degli esposti problemi meritano di essere conosciuti altri metodi che si riscontrano studi-

Digitized by Google

ando le insigni opere dei nostri geometri italiani che sono preceduti. — Richiamerò qui quello presentato dai Sigg. Riccati e Saladini nelle loro Istituzioni analitiche tomo secondo, procurando di rimarcare quale è il punto in cui questo metodo conviene cogli esposti tanto per la ellisse quanto per la iperbole“ etc.). — Provenzali, P. F. S.: Sulla indipendenza dei fenomeni d'endosmosi dalla elettricità, comunicata ai liquidi separati da diaframmi porosi. p. 359.

Atti dell' Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei, compilati dal Segretario. Anno XXV. Roma 1872. 4⁰.

Sessione I[a] del 17 Dicembre 1871. Dieses Heft enthält die folgenden in den Kreis des Archivs gehörenden Abhandlungen, die wieder in mehreren Beziehungen interessant und werthvoll sind: Secchi, P. Angelo: Sulla distribuzione delle protuberanze intorno al disco solare. Quarta comunicazione. p. 1. — Secchi, P. Angelo: Di alcuni fenomeni accaduti nella scarica di un fulmine in Alatri. p. 21. — Provenzali, P. F. S.: Sulla misura dell' intensità della luce solare. p. 32.

Giornale di Matematiche ad uso degli studenti delle Università italiane pubblicato per cura del Professore G. Battaglini. Napoli. (S. Literar. Ber. Nr. CCXII. S. 10.).

Anno IX. Novembre ed Dicembre 1871. Esposizione della teorica delle sostituzioni; per G. Janni. (Cont). p. 321. — Alcune formole per la teoria elementare delle coniche. Pel Prof. E. Beltrumi. p. 341. — Esercizio elementare sugl' integrali Euleriani della prima specie. Per S. Realis. p. 345 — Sulle radici reali contenute fra dati limiti per S. Realis. p. 355. — Alcune ricerche sulle frazioni continue. Nota di V. Eugenio. p. 358. — Dimostrazione d'un theorema di Geometria. Pel Dott Oreste Tognoli. p. 366. — Sistema generale di *n* equazioni lineari fra *n* incognite. Per Valeriani Valeriano. p. 371. — Formole relative al seno e coseno della somma degli archi. Per Alfonso di Legge. p. 377.

Annali di Matematica pura ed applicata, diretti da F. Brioschi e L. Cremona. (Presso il R. Istituto tecnico superiore di Milano) in continuazione degli Annali già pubblicati in Roma dal prof. Tortolini. Milano. 4⁰. (Vergl. Literar. Ber. Nr. CCXII. S. 14.).

Digitized by Google

Serie II^a^. Tomo V^0^. — Fascicolo 1^0^. (Novembre 1871.). Hoppe: Quelques cas de mouvement d'un point sur un corps en mouvement. p. 1. — Ascoli: Dimostrazione di un teorema di Cauchy. p. 14. — M. Roberts: Sur la rectification des lignes de courbure d'un ellipsoïde. p. 17. — Combescure: Sur diverses conditions d'intégrabilité et d'intégration. p. 20. — Reiss: Evaluation du nombre de combinaisons desquelles les 28 dés d'un jeu du Domino sont susceptibles d'après la règle de ce jeu. p. 63.

Digitized by Google

Literarischer Bericht

CCXV.

Ankündigung.

Nicolai Copernici

De revolutionibus Orbium Caelestium libri VI.

Recudi curavit Societas Copernicana Thorunensis.

Der 19. Februar 1873 ist ein Gedenktag, welchen festlich zu begehen die Culturvölker der ganzen Erde eine hohe Verpflichtung haben; es fällt auf diesen Tag die vierte Säcularfeier der Geburt von Nicolaus Copernicus.

Zur Erinnerung an den grossen Mann steht bereits seit zwanzig Jahren in seiner Geburtsstadt ein ehernes Denkmal, zu welchem selbst aus den fernsten Gegenden der Erde Beisteuern hergesendet worden sind. Für das bevorstehende Säcularfest glaubt der unterzeichnete Verein die angemessenste Grundlage zu schaffen, wenn in würdiger Weise das Denkmal erneuert wird, welches Copernicus sich selbst in seinem unsterblichen Werke: „De revolutionibus orbium caelestium“ gesetzt hat.

Die von uns beabsichtigte Säcularausgabe des bereits selten gewordenen Buches — welchem die unter unmittelbarer Inspiration des Copernicus entstandene „Narratio prima“ des Rheticus bei-

Digitized by Google

gegeben werden soll — wird sich in Format und Einrichtung des Satzes möglichst genau der ersten 1543 in Nürnberg erschienenen Ausgabe anschliessen, in Hinsicht der äusseren Ausstattung aber den Fortschritten der Typographie entsprechend gehalten werden. Sie wird die erste sein, welche die noch vorhandene Originalhandschrift des Verfassers diplomatisch genau wiedergibt. Auf hohe Verwendung des Fürsten Reichskanzlers hat sich der Graf von Nostitz-Rieneck in Prag geneigt erklärt, das in seiner Familie seit langer Zeit als ein kostbares Erbe aufbewahrte Originalmanuscript des Werkes einem Delegierten des unterzeichneten Vereins zur Einsicht und Vergleichung vorlegen zu lassen. Die Revision des Textes und die Ueberwachung des Druckes wird durch eine Commission von Sachverständigen besorgt werden.

Diejenigen, welche unser Unternehmen durch Subscription zu unterstützen geneigt sind, bitten wir ihre Bestellungen bis spätestens den 1. Juni d. J. an den unterzeichneten Verein direct oder auf Buchhändlerwege an die Buchhandlung von E. Lambeck in Thorn gelangen zu lassen.

Der Preis für 1 Exemplar geheftet beträgt $6\frac{2}{3}$ Thlr. (20 Mark) = 25 Frcs. = 1 L. St. Die rechtzeitig bestellten Exemplare werden spätestens im Januar k. J. von uns abgesendet werden, so dass das Werk für eine etwa zu veranstaltende Säcularfeier sich vor dem 19. Februar 1873 in den Händen aller Subscribenten befinden wird.

Thorn, den 19. Februar 1872.

Der Vorstand des Copernicus-Vereins für Wissenschaft und Kunst.

Dr. L. Prowe, Professor. — von Lossow, Königl. Staatsanwalt. — Boethke, Gymnasial-Oberlehrer. — Hagemann, Stadtrath und Syndicus.

Geschichte und Literatur der Mathematik und Physik.

Ein Brief von Lagrange.

In der folgenden uns gütigst zugesandten und von uns mit dem grössten und wärmsten Danke, den wir hiemit auszusprechen nicht unterlassen, empfangenen Schrift:

Digitized by Google

Comunicazione di una Lettera di Luigi Lagrange fatta da Federigo Sclopis alla classe di scienze fisiche e matematiche della R. Accademia delle scienze di Torino nella seduta del 28 Gennaio 1872. Torino, Stamperia Reale, 1872. 8°.

hat Herr F. Sclopis einen im höchsten Grade interessanten und für die Charakterisirung seines grossen Landsmanns Luigi Lagrange sehr wichtigen Brief mitgetheilt, wofür die mathematische Literatur Herrn F. Sclopis zum grössten Danke verpflichtet ist. Die Geschichte dieses Briefes ist in Kurzem folgende:

Unter den Papieren des conte Ludovico Morozzo, welcher Präsident der Akademie der Wissenschaften in Turin war, und im Jahre 1804 starb, wurde die Abschrift eines Briefes des grossen Lagrange aufgefunden, datirt aus Berlin vom 13. October 1781, und gerichtet an Domenico Caracciolo, marchese di Villamaina, der damals Vicekönig von Sicilien geworden war. Die Echtheit des Briefs und seiner Abschrift konnte nicht zweifelhaft sein.

Lagrange stand in freundschaftlichen Beziehungen zu Caracciolo, als derselbe Minister des Königs von Neapel bei dem Könige von Sardinien in Turin war, und wird von Herrn F. Sclopis als ein höchst geist- und kenntnissreicher, in jeder Beziehung ausgezeichneter Mann gerühmt. Lagrange war zu jener Zeit — wie Herr Sclopis sagt — ein über dem Horizont aufgehender Stern, von dem D'Alembert an Euler schrieb „il en sait autant que nous, et il en saura un jour davantage; car il n'a que vingt ans“ — Caracciolo interessirte sich sehr für Lagrange und machte ihn mit vielen ausgezeichneten Männern bekannt, besonders auch als er Gesandter seines Königs in London war. Nachdem er Vicekönig von Sicilien geworden war, bemühete er sich, Lagrange, der Director der Akademie der Wissenschaften in Berlin war, für sein Vaterland zu gewinnen, worauf aber Lagrange in dem herrlichen in der vorliegenden Schrift mitgetheilten Briefe nicht einging. Dieser Brief, welcher Herrn Sclopis von dem Cav. Emanuele Morozzo della Rocca, einem Urenkel des oben genannten Präsidenten der Akademie der Wissenschaften in Turin, Kapitain im 76. Linien-Regiment mitgetheilt wurde, ist in drei Beziehungen bemerkenswerth und für Lagrange's Leben von Wichtigkeit: 1°. wegen seiner Bemerkungen über Galilei's Theorie der Wurfbewegung; 2°. wegen seiner Berufung zu einer hohen wissenschaftlichen Stellung in dem Königreiche beider Sicilien; 3°. wegen seiner fortwährend dauernden Liebe zu Italien, die er in diesem Briefe an den Tag legt.

Digitized by Google

Wir glauben auf den besonderen Dank unserer Leser rechnen zu dürfen, wenn wir hier diesen herrlichen Brief aus der oben genannten Schrift, p. 6—p. 9, als ein wichtiges Document für das Leben des grossen Lagrange, nachstehend vollständig mittheilen:

Lettera di Luigi Lagrange al marchese Domenico Caracciolo.

Ho ricevuto questa settimana le due lettere con cui mi avete onorato da Napoli, l'una in data de' 13 agosto, l'altra de 12 settembre. Risponderò dunque ad amendue con questa sola, e comincerò da quella in cui mi domandate il mio parere intorno ad alcuni punti della teoria de' proietti, sebbene la mia risposta non ritrovandovi in Napoli non potrà esservi di quell'uso, a che l'avevate destinata. Quanto al primo, cioè se il Galileo abbia supposte omogenee le forze della gravità e della impulsione, rispondo francamente di no; anzi dico che egli non ha considerate queste forze in se stesse, ma solamente i moti da esse prodotti. Il suo processo è questo: egli chiama moto uniformemente accelerato quello, nel quale la velocità va crescendo secondo che cresce il tempo, e da questa sola definizione ricava poi geometricamente le altre proprietà di questa specie di moto. Ma per poter paragonare i moti fatti sopra diversi piani inclinati egli suppone di più questo principio, che le velocità acquistate nello scendere per piani diversamente inclinati, ma ugualmente alti, siano sempre uguali. Con questo supposto egli dimostra tutte le proprietà de' piani inclinati, fra le quali la più bella è l'uguaglianza de' tempi delle scese per tutte le corde di un cerchio, terminate al punto più basso. Per prova che la supposta legge di accelerazione sia appunto quella che sieguono i gravi naturalmente discendenti, il Galileo accenna solo alcune esperienze fatte con piani inclinati, ed afferma averle trovate sempre d'accordo colle conclusioni dimostrate. Nella prima edizione de' dialoghi, fatta in Leida l'anno 1638, il principio dell'uguaglianza delle velocità ne' piani inclinati ugualmente alti è solamente supposto, ma nelle altre edizioni fatte dopo la morte dell'Autore, questo principio si trova dimostrato, e la dimostrazione è cavata da un teorema di statica sulla proporzione tra 'l peso, e la resistenza nelli piani inclinati. Questa deve essere una giunta del Torricelli ma di invenzione del Galileo. Venendo ora al moto de' proietti, osservo che il Galileo non ha considerata la composizione delle forze, ma solo quella de' moti. Egli suppone che ne' proietti il moto impresso si mantenga sempre equabile, e che il moto naturale deorsum mantenga parimenti il suo tenore di andarsi accelerando secondo la proporzione duplicata

Digitized by Google

de' tempi, e ne inferisco con dimostrazione geometrica che la linea descritta dal mobile è una parabola. La composizione delle forze è una conseguenza naturale di quella de' moti, e delle velocità: ma voi avete ragione di affermare che la teoria di questa composizione, e sopra tutto l'applicazione di essa alla statica, è posteriore ai tempi di Galileo, e mi pare di doversi attribuire al Newton ed al Varignon.

Quanto poi alla alterazione cagionata dalla resistenza del mezzo, niuno che io sappia ha ancor dubitato che questo mezzo non sia l'aria. Galileo medesimo ne parla nel 4^{0} dialogo, ma dice non potere dare ferma scienza, e perciò doversene fare astrazione. Newton è stato il primo a dare la legge di questa resistenza, la quale cresce secondo i quadrati delle velocità, e a cercare la vera curva descritta dai proietti. Ma l'analisi ai suoi tempi era ancora troppo imperfetta per potere somministrare una soluzione abbastanza esatta per la pratica. Non è difficile il ridurre il problema ad equazione, ma questa equazione essendo differenziale, richiede delle integrazioni, le quali non si possono ottenere che mediante le serie, e tutto il punto consiste che esse siano convergenti. L'Eulero ha dato un metodo di approssimazione col quale si sono costrutte delle tavole stampate prima in Germania, ed ultimamente anche in Inghilterra. Ma non credo che esse siano conosciute nel rimanente dell'Europa. La nostra Accademia ha proposto questo soggetto pel premio di matematica dell'anno vegnente, e di già un capitano di artiglieria ha dato fuori una nuova soluzione di questo problema, la quale concorda bene colle esperienze; ora sta costruendo delle nuove tavole per gli artiglieri.

Questo è quanto ho saputo dire per ubbidire ai vostri comandi; prego la vostra bontà a compatirmi se non vi ho soddisfatto pienamente; procurerò di far meglio un'altra volta. Ma che debbo ora rispondervi per riguardo di quello mi (avete) fatto l'onore di scrivermi nell'altra lettera? Sento la forza delle ragioni che mi adducete provenienti dalle qualità fisiche del paese dove si abita, ma parmi ch'esse non abbiano nella felicità degli uomini tanta parte quanta dovrebbono naturalmente averne. Se gli inverni fossero qui men lunghi, e le occasioni di guerra meno prossime, non mi resterebbe da desiderare altro che di finire i miei giorni in questo paese dove si gode sicurezza, quiete e libertà. La vostra patria è esente da' suddetti svantaggi, ma forse ne ha degli altri a me ignoti, e che non posso prevedere. Io non sono nè ambizioso, nè interessato. Sono avvezzo ad una maniera di vivere semplice, e retirata, ed amo la geometria unicamente per se stessa, e senza voglia di farne pompa. La pensione che godo tuttavia è quella medesima che mi fu assegnata da principio, e che passa i sei mila franchi; non ho ricevute di poi grazie nè di-

Digitized by Google

stinzioni particolari, ma non le ho nemmeno ricercate, nè desiderate. Tutto l'obligo mio consiste d'intervenire alle adunanze dell'Accademia, le quali si fanno ogni giovedì, di rendervi conto, e dare giudizio delle opere, ed invenzioni che vengono di quando in quando presentate, e di leggere tre, o quattro Memorie l'anno sopra qualsivoglia soggetto di matematica, le quali Memorie si stampano poi nel tomo degli Atti; in somma questa Accademia è in tutto e per tutto simile a quella delle Scienze di Francia. Non conoscendo all'incontro la forma e le leggi di cotesta vostra Accademia, mi è impossibile il giudicare se le mie fatighe possano essere confacenti alle sue occupazioni, e sopra di ciò vi supplico a volermi dare particolare notizia. Non sono di natura inclinato al cambiamento, e so che nelle cose umane non vi è maggiore distruttore del bene che il desiderio del meglio; ma non ho perduto l'attacamento all'Italia, e mi sarebbe di somma consolazione il potere ravvicinarmi a voi, e rinnovare quella dolce conversazione, di che mi ricordo sempre con infinito piacere, avendo passato in essa le ore le più felici di mia vita. Vi supplico a conservarmi la vostra grazia e 'l vostro preziosissimo affetto, e resto con tutto il rispetto.

Berlino 13 ottobre 1781.

Umil.º, Dev.º ed Obb.º Servidore
De La Grange.

Beiträge zur Beantwortung der Frage nach der Nationalität des Nicolaus Copernicus von R***. Breslau. Priebatsch's Buchhandlung. 1872. IV. und 213 S. 8º. Preis 1 Thlr. 10 Sgr.

Die vorliegenden „Beiträge“ eines noch sehr jugendlichen Anonymus — derselbe ist, wie wir als sicher bezeichnen können, augenblicklich noch Student an der Breslauer Universität — stellen sich uns selbst vor „als eine Sammlung von losen Notizen und rohem Material“ (S. III); und es ist war, die Angriffe, welche der hochverdiente Biograph des Copernicus, Herr Prof. Dr. L. Prowe in Thorn, durch ihn erleiden muss, sind äusserst roh und überschreiten bei weitem das Mass litterarischen Anstandes. Alle Angriffe zu widerlegen, alle Unrichtigkeiten, von denen das Buch wimmelt, aufzudecken,

Digitized by Google

kann an dieser Stelle nicht Absicht des Referenten sein; es wird dies schon Herr Professor Prowe selbst bei Gelegenheit seiner umfassenden Arbeit thuen, welche er für die 400jährige Wiederkehr des Geburtstages des grossen Mannes ausarbeitet, dessen Andenken durch Schriften, wie die anonymen Beiträge sind, nie gefördert, sondern nur beschimpft werden kann. Die Arbeit des Herrn R*** wird freilich, und das dürfte eingestandenermassen wohl auch ihr Hauptzweck sein, denjenigen sehr zu statten kommen, welche sich um den von der polnischen „Gesellschaft der Freunde der Wissenschaft" in Posen ausgesetzten Preis bewerben wollen, der verlangt, dass, ohne auf irgend welche Polemik sich einzulassen, bewiesen werden muss, Copernicus sei ein Pole; die „Beiträge" übernehmen eben diese Polemik, und der Herr Preisschriftsteller braucht sich nur auf dieses für polnische Leser natürlich doppelt classische Werk zu berufen, ohne selbst in Polemik zu machen; doppelt classisch, da der Verfasser desselben zu denjenigen gehört, die schon durch ihren Namen beweisen, dass sie wie Dominik Szulc und Szuman Nationalpolen sind!

Herr R*** theilt seine Schrift in drei grössere Abtheilungen: 1. Das Land und die Stadt, in der Copernicus geboren wurde; 2. Sein Name, seine Abstammung und seine Eltern; 3. Des Copernicus persönliches Auftreten, seine politische Denk- und Handlungsweise. Wir wollen aus den drei Abtheilungen nur einige Unrichtigkeiten, um nicht zu sagen wissentliche Unwahrheiten, herausheben, die genügend den kennzeichnen werden, der Herrn Prof. Prowe Perfidie gegen polnische Schriftsteller vorzuwerfen sich erlaubt.

Es ist schwer einzusehen, was der Beweis nützen soll, es sei das Weichselland im Alterthum von Slaven bewohnt gewesen, um zu zeigen Copernicus, im 15.—16. Jahrhundert, sei ein Pole, da es sich doch darum handelt, darzuthun, dass während seiner Lebenszeit dies der Fall gewesen; und dieser Beweis ist Herrn R*** nur durch Unterdrückung der Wahrheit gelungen. Zu des Copernicus Zeiten hatten die Ortschaften im Kulmerlande, vorzugsweise die um Thorn, wie Prowe aus den Acten gezeigt hat, grösstentheils deutsche Namen und haben dieselben bis in die Mitte des 18. Jahrhunderts behalten. Erst in dieser Zeit sind die deutschen Namen wieder polonisiert. Herr R*** benutzt nun diese polonisierten Namen, um zu zeigen, dass das Kulmerland ein polnisches Land gewesen. Er hütet sich dabei wohl, den Protest zu erwähnen, den Herr Prowe in seiner Schrift „De Nicolai Copernici Patria" gegen die falsche Auffassung seiner Nachweisung durch Dominik Szulc erhebt, sondern wiederholt einfach dessen Missverständniss, obwohl er die unmittelbar vorhergehende Stelle Prowe's wörtlich anführt; noch

Digitized by Google

weniger natürlich theilt er den Protest Prowe's gegen Bartoszewicz mit, der in seiner der Warschauer Ausgabe des Copernicus vorgesetzten Biographie die Nachricht Prowe's wiederholt, der Vater des Copernicus habe das Gut Fredau besessen, diesen Namen aber, um dem Vater des Copernicus ein Landgut mit polnischem Klange zuzutheilen, in der Form giebt, welchen es seit Mitte des vorigen Jahrhunderts besass — jetzt heisst das Gut wieder Friedau — nämlich Sławkowo. Denn hätte Herr R*** dies gethan, so wäre es ihm unmöglich gewesen, Sławkowo als einen Beweis für die Zugehörigkeit Thorns zu Polen anzuführen. Weiter haben die preussischen Stände nicht, weil sie sich als Polen fühlten, sondern weil sie in ihren Selbständigkeitsbestrebungen durch eine Allianz mit dem Polenkönige Vortheil zu erlangen hofften, sich dem polnischen Reiche durch Personalunion angeschlossen; es war also Landesverrath, wodurch die Republik Preussen mit der Republik Polen in Verbindung trat. Lange haben sich die preussischen Stände aber gegen Polonisierung gestreubt, und erst auf dem Lubliner Reichstage gelang es den Polen die Vergewaltigung des Landes durchzuführen, aus der Personal- eine Realunion zu machen. Von allen diesen geschichtlichen Thatsachen sagt Herr R*** natürlich nichts.

Im zweiten Haupttheile seiner Schrift ficht Herr R***, so zu sagen, gegen Windmühlen. Denn weder Herr Prof. Prowe noch sonst jemand zweifelt jetzt noch daran, dass Niklas Koppernigk, der Vater des Astronomen, aus Krakau nach Thorn eingewandert ist. Neuerdings eben durch Prowe aufgefundene Urkunden machen dies unzweifelhaft. Trotzdem gab es um 1400 in Thorn eine Familie Koppernick, wie das älteste Thorner Schöppenbuch, das jetzt in der Petersburger Bibliothek befindlich ist, nachweist. Es wird darin die Frau eines Koppersmets, Margarethe Koppernickinne, erwähnt, für die Ableitung des Namens wohl nicht ohne Interesse. Der Vater des Copernicus war ein Grosshändler in Krakau, und von diesen kann man, wenn nicht das Gegentheil urkundlich bewiesen werden kann, mit völliger Sicherheit annehmen, dass sie sämmtlich Deutsche waren. Die von Herrn R*** aufgeführten polnischen Kaufleute Krakaus gehören aber sämmtlich dem Kleinhandel an, und beweisen also für seinen Zweck gar nichts. Es ist ja auch noch Niemand eingefallen zu behaupten, es seien in Krakau keine Polen gewesen, man hat eben nur behauptet, der Grosshandel sei in deutschen Händen gewesen, und die Mitgliedschaft Krakaus an der deutschen Hansa, diesem exclusiv deutschem Bunde, macht dies nahe zu zur Gewissheit.

Bei der Untersuchung über die Abstammung des Namens Koppernigk verschweigt Herr R*** wohlweislich, dass Copernicus

selbst uns über die Aussprache seines Namens ein Zeugniss hinterlassen hat, obwohl er das Buch Prowe's, worin dasselbe sich veröffentlicht findet, oftmals citiert. Copernicus hat nämlich in eines der Bücher, die ihm gehörten, und die sich jetzt auf der Universitätsbibliothek zu Upsala befinden, eigenhändig eingeschrieben: „*βιβλίον Νικολέου τοῦ Κόππερνικου*," d. h. den Namen als ungeheuerliches Proproparoxytonon. Er wollte also seinen Namen deutsch, d. h. Kóppernik ausgesprochen haben nicht polnisch, wo er Kopérnik geschrieben und gelesen werden müsste. Die Behauptung des Herrn R***, die Deutschen könnten den Namen des grossen Astronomen nicht einmal richtig aussprechen, liesse sich daher wohl mit Fug und Recht umkehren.

Der dritte Theil der Untersuchungen des Verfassers, die freilich alle schon vor ihm von andern angestellt worden sind, streitet merkwürdig gegen die auf Seite 1 seiner Schrift ausgesprochene Bemerkung: „Staat und Nationalität waren zu des Copernicus Zeiten „zwei Dinge, die unter einander viel weniger Berührungs„puncte hatten, als es heutigen Tags der Fall ist, und ob„gleich auch die damaligen Staaten im Grossen und Ganzen „verschiedene Nationalentwickelungen repräsentierten, „so war jedoch gleiche Nationalität noch bei weitem nicht „die bewusste, bestimmt ausgesprochene Losung der in „einem Staat verbundenen Individuen. „Patriotismus" hing „noch keineswegs mit „Nationalität" zusammen." Selbst wenn man also seine sämmtlichen sogenannten Beweise dafür gelten lassen wollte, die politische Denk- und Handlungsweise des Copernicus sei polnisch national gewesen, so könnte man nach diesem Ausspruche des Verfassers, den ja jeder Geschichtskundige unterschreiben wird, daraus für die Nationalität eben gar nichts schliessen. Welcher Art die Beweisführung des Herrn R*** hierin aber ist, wollen wir nur an einem Beispiele zeigen, das am augenscheinlichsten die Wahrheitsliebe des Herrn Verfassers vorführt, der dem ganzen Buche das stolze Wort „Suum cuique" vorzusetzen sich gemüssigt findet.

Herr R*** benutzt und citiert mehrfach die beiden von Copernicus in deutscher Sprache geschriebenen Abhandlungen „Ueber das preussische Münzwesen" und die „Beschwerdeschrift des Ermländischen Capitels an die Königlichen Räthe" vom Jahre 1521 und hat die Stirn zu behaupten: dass Copernicus ausser zwei deutschen Briefen an den Herzog Albrecht von Preussen in deutscher Sprache Nichts geschrieben habe. **Ex ungue leonem!**

Freiburg i./Breisgau, 29. December 1871. M. Curtze.

Digitized by Google

Astronomie.

Geschichte der Himmelskunde nach ihrem gesammten Umfange. Von Dr. J. H. von Mädler, emeritirtem Professor und Director der Sternwarte Dorpat. Erster Band. Erste Lieferung. Braunschweig. Druck und Verlag von George Westermann. 1872. 8°.

Wenn man nach der hier vorliegenden ersten Lieferung dieser Geschichte der Himmelskunde sich ein Urtheil erlauben darf über die noch folgen sollenden weiteren 15 Lieferungen: so gelangt man bald zu der Ueberzeugung, dass der Herr Verf. viel besser gethan haben würde, wenn er die mathematische Literatur mit dieser Production seiner Musse verschont hätte. Zu einer ausführlichen Kritik ist hier kein Raum, und einer solchen scheint uns auch das Werk nicht werth zu sein; wir können den uns zu Gebote stehenden sehr beschränkten Raum zu etwas Besserem gebrauchen. Um jedoch die überall sich kund gebende Leichtfertigkeit und theilweise Unkenntniss, mit der dieses Buch gearbeitet ist, und wie wenig Vertrauen dasselbe im Allgemeinen verdient, einigermassen in's Licht zu stellen, möge wenigstens Folgendes bemerkt werden.

Die vorliegende erste Lieferung betrifft die Geschichte der Astronomie bei den Chinesen, Hindus, Babyloniern, Aegyptern und Griechen. Hier werden uns die bekannten alten Geschichten erzählt, mit Einflechtung mancher Histörchen, über deren Wahrheit und Richtigkeit sich in der Kürze nicht urtheilen lässt, da dieser Verf. natürlich fast jede Quellenangabe verschmäht, und sich also jedenfalls Leser gedacht hat, die ihm alle seine Erzählungen auf sein Wort glauben, was er freilich nur bei einer gewissen, hier nicht näher zu bezeichnenden Klasse von Lesern wird voraussetzen dürfen. Von einer fortlaufenden historischen Entwickelung, wie auch bei jenen alten Völkern die Astronomie immer nach und nach — aber sicheren Ganges — weiter fortgeschritten ist; wie das eine Volk auf die Entdeckungen des anderen gefusst hat u. s. w., ist keine Spur vorhanden, weshalb wir glauben, uns jedes weiteren Eingehens auf diese Partie des Buchs enthalten zu dürfen. Jedoch wollen wir — damit Niemand durch Herrn M. irre geführt werde — u. A. noch bemerken, dass auf S. 63 gesagt wird, „die Trigonometrie sei durch Hipparch in die Astronomie eingeführt worden". Wäre dies der Fall gewesen, so müsste doch die Trigonometrie entweder schon vor Hipparch erfunden gewesen, oder von ihm selbst erfunden worden sein. Pfleiderer in der trefflichen und höchst gelehrten, dringend zu empfehlenden Geschichte der Trigo-

nometrie, die sich in seiner „Ebenen Trigonometrie mit Anwendungen und Beiträgen zur Geschichte derselben. Tübingen. 1802." findet — auf andere entfernter liegende Quellen einen Schriftsteller wie den Herrn Verf. zu verweisen, dürfen wir schwerlich wagen — sagt nur: „Für den ersten Erfinder der ebenen und sphärischen Trigonometrie wird **insgemein** Hipparch gehalten *). Wenigstens bemerkt Theon in seinen Erläuterungen des Almagests: dass Hipparch in zwölf, und Menelaus in sechs Büchern die Behandlung und Benutzung der Sehnen im Kreise vor Ptolemäus gelehrt; dieser aber die Berechnung derselben mit bewunderungswürdiger Geschicklichkeit auf wenige passende Lehrsätze zurück geführt habe." Wem also das Verdienst der Erfindung der eigentlichen Trigonometrie gebührt, geht schon hieraus von selbst hervor.

Unter den alten Chinesen, Hindus, Babyloniern, u. s. w. werden uns nun aber in buntester, ziemlich abgeschmackter Weise, in Seiten langen Noten ausführliche Lebensbeschreibungen neuerer Astronomen: Deguignes', Pingré's, Burckhardt's, Laplace's, Bailly's, Weidler's, Ideler's, Delambre's, Daussy's aufgetischt; ja selbst der Philologe Böckh geht nicht leer aus. Diese Lebensbeschreibungen wollen wir etwas näher betrachten, und zusehen, in wie weit dieselben Vertrauen verdienen.

Wir greifen Pingré heraus (S. 8 und S. 9). Natürlich ist von dessen Cométographie die Rede. S. 9 heisst es, dass dieses Werk 1782—84 erschienen sei; das ist nicht richtig, denn Tome I trägt die Jahreszahl 1783 und nur Tome II die Jahreszahl 1784. — Auf derselben Seite wird gesagt: das genannte Werk enthalte eine Chronologie des éclipses qui ont été visible depuis le pôle boreal jusque vers l'équateur pendant 10 siècles avant Jésus Christ. Wir haben diese Chronologie im ersten und im zweiten Theile vergeblich gesucht. — Auf derselben Seite heisst es ferner: in dem Werke finde sich auch eine Theorie zur Berechnung der Bahnen nebst zugehörigen Tafeln. Hiernach möchte es scheinen, und die Meisten, die vorstehende Worte lesen, werden dieselben wahrscheinlich so verstehen, dass Pingré selbst in dem genannten Werke eine Methode zur Berechnung der Cometenbahnen gegeben habe; das ist aber nicht wahr, und zu einer solchen Arbeit wäre Pingré wohl schwerlich Mathematiker genug gewesen. Dagegen enthält aber das Werk — und dieses ganz besonders wichtigen Theils desselben thut der Herr Verf. nicht mit einem Worte Erwähnung — in Tome II. p. 218—p. 466 eine sehr ausführliche

*) Etwas Schriftliches hat H. bekanntlich nicht hinterlassen.

und eingehende Darstellung der Methoden zur Bahnberechnung der Cometen von Newton, Gregori, Lambert, La Grange, Boscowich, Du Sejour, De la Place, Simpson, Hennert, Euler, Tempelhoff, Bouguer, u. s. w. Davon weiss der Herr Verf., wie es scheint, gar nichts. Dagegen wird uns S. 9 die für die Geschichte der Himmelskunde natürlich ungemein wichtige Notiz mitgetheilt, dass Pingré sich einer sehr guten Gesundheit zu erfreuen hatte und noch am 30. (April 1796) die Zeitungen las; am 1. Mai starb er. Solcher Abgeschmacktheiten finden sich nicht wenige in dieser Geschichte der Himmelskunde, die sich das Ansehen einer wissenschaftlichen zu geben versucht.

Wir wenden uns zu Delambre (S. 53—S. 55), dessen Charakter in ziemlich gehässiger Weise geschildert, und dabei den Astronomen überhaupt der Text gelesen wird. Auf S. 55 heisst es von ihm u. A.: Olbers' berühmte Methode zur Berechnung der Kometenbahnen schien ihm misslich und ungenügend. Nichts kam ihm schwerer an, als fremdes Verdienst zu würdigen. Wie hätte aber Herr M. wohl wagen dürfen, einen vielfach verdienten Mann in solcher Weise zu verunglimpfen, wenn er das grosse dreibändige Werk: Astronomie théorique et pratique par M. Delambre. Paris. 1814. 4⁰. gekannt und darin (Tome III. p. 348) das folgende Urtheil gefunden hätte: „Cependant comme quelques personnes préfèrent*) les solutions analytiques, nous donnerons une idée de celles, qui nous paraissent les plus faciles et les plus sûres; nous commencerons par la méthode de M. Olbers qui n'a point encore été exposée en francais et qui d'ailleurs est tout-à-la fois l'une des plus simples et des plus ingénieuses qu'on ait imaginées". Was soll man zu einem geschichtlichen Buche sagen, in dem solche unverantwortliche Leichtfertigkeiten in nicht geringer Anzahl sich finden!!

Auf S. 16. wird gesagt, die Hindus hätten früher als Archimedes das Verhältniss des Durchmessers zur Kreisperipherie ermittelt (1250 : 3927), das nur um 0,0000074 abweicht, und erst im 17. Jahrhundert durch das von **Huetius Meta** (113 : 355) übertroffen ward. Wo und wie Herr M. seine Bekanntschaft mit diesem uns etwas mystisch scheinenden Huetius Meta gemacht hat, wissen wir nicht; hätte er aber z. B. nur das Mathematische Wörterbuch Thl. I. S. 642. aufgeschlagen, so würde er gefunden haben, dass Klügel — ein grosser Kenner der Geschichte aller mathematischen Wissenschaften — dort sagt: „Der vierte dieser Brüche" — (nämlich $\frac{355}{113}$) — ist von Metius, Landmesser in holländischen Diensten,

*) Bei der Berechnung der Cometenbahnen.

Digitized by Google

Vater des Adrian Metius, Professors der Mathematik zu Franecker, herausgebracht. Adr. Metii Geom. practica. p. 89. — Aber noch mehr! Hätte er die erst ganz kürzlich erschienene, sehr wichtige und interessante Abhandlung: Quelques Arpenteurs Hollandais de la fin du XVIme et du commencement du XVIIme Siècle et leurs instruments. Par G. A. Vorstermann van Oijen. Rome. 1870. 4^0. gekannt, so würde er sehr Ausführliches über Adrianus Metius, professeur à l'université de Franecker en Frise, und das Verhältniss $\frac{355}{113}$ des Durchmessers zum Umkreise haben finden können. Diese Abhandlung ist besonders abgedruckt aus dem Bullettino di Bibliografia e di Storia delle scienze mathematiche e fisiche. T. III. Settembre e Ottobre 1870., des jetzt wichtigsten Werks zur Geschichte aller mathematischen Wissenschaften, durch dessen Herausgabe der Herr Principe Baldassare Boncompagni in Rom sich so sehr verdient macht. Aber von solchen, auch für die Geschichte der Astronomie, so äusserst wichtigen Werken hat natürlich Herr M. auf dem von ihm eingenommenen Standpunkte, wie es scheint, gar keine Ahnung! — Ueber den Huetius Meta des Herrn Mädler möchten wir uns von demselben wohl eine gefällige Belehrung ausbitten, so wie auch über die in Sansritversen ausgedrückten unendlich abnehmenden (!?) Reihen.

Jedoch genug dieser leicht zu vermehrenden Bemerkungen! die gewiss schon mehr als hinreichend sein werden, die Richtigkeit unseres an die Spitze dieses Artikels gestellten Urtheils darzuthun, dass nämlich Herr M. viel besser gethan haben würde, wenn er die mathematische Literatur mit dieser Production seiner Musse ganz verschont hätte.

Schliesslich warnen wir einen Jeden dringend vor diesem Buche, namentlich und ganz besonders auch Lehrer der Mathematik u. s. w. an höheren Unterrichtsanstalten, die — was jedenfalls sehr löblich und anerkennungswerth ist — ihren Schülern gern auch historische Mittheilungen zu machen pflegen.

Grunert.

Wir können unseren Lesern die sehr erfreuliche Nachricht mittheilen, dass sich in Italien eine eigene

„Nuova Società di spettroscopisti italiani"

gebildet hat. Wir entnehmen diese Nachricht aus der uns gütigst mitgetheilten neuesten Nummer der „Rivista scientifico-indu-

Digitized by Google

striale. Fascicolo IX. Dicembre 1871. Firenze 1872, durch deren Herausgabe der Graf Guido Vimercati in Florenz sich sehr verdient macht, und auf die wir späterhin öfters zurückzukommen Gelegenheit haben werden. In dem genannten Hefte der zur sorgfältigsten Beachtung sehr zu empfehlenden Zeitschrift findet sich pag. 210 folgende Mittheilung:

„Nuova Società di spettroscopisti italiani. — Sappiamo che per cura del prof. Tacchini si è di recente organizzatta una nuova società di spettroscopisti italiani. Lo scopo di questa società sarebbe quello di distribuire il lavoro ai diversi osservatori dietro un programma stabilito, affine di raccogliere, nel minor tempo possibile un abbondante materiale di osservazione ordinato in modo da accelerare la risoluzione di importanti questioni relative alla fisica costituzione del sole. I lavori di detta società verranno pubblicati in Palermo, per il chè il Ministro della Pubblica Istruzione ha già accordato dei fondi per la pubblicazione dei lavori già eseguiti nel 1871. Con ciò si avrà anche il vantaggio di vedere riuniti in una sola pubblicazione tutte le osservazioni più importanti fatte su questo ramo di astronomia fisica nelle nostre specole d'Italia."

„Noi non possiamo che salutare con giubilo la nuova società, e rendiamo le dovute lodi al Ministro della Pubblica Istruzione che ha saputo prontamente incoraggiarla."

Indem wir in die letzten Worte von ganzem Herzen einstimmen, erkennen wir zugleich den Zweck der neuen Gesellschaft als einen überaus löblichen vollkommen an, und sehen den Publicationen derselben mit besonderem Verlangen entgegen, um darüber in diesen Blättern berichten zu können. Zugleich finden wir in dem Obigen einen neuen Beweis, wie sehr das italienische Gouvernement bereit und bemühet ist, alle tüchtigen wissenschaftlichen Bestrebungen durch seine besondere Unterstützung in jeder Beziehung kräftigst zu fördern.

Vermischte Schriften.

Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Classe der k. b. Akademie der Wissenschaften zu München. (Vergl. Literar. Ber. Nr. CCVIII. S. 15.).

Digitized by Google

1871. Heft I. Beetz: Ueber die Messung des inneren Widerstandes voltaischer Ketten nach der Compensationsmethode. S. 3. — v. Betzold: Die Theorie des Elektrophors. S. 18.

1871. Heft II. Bauernfeind: Ueber eine mechanische Lösung der Pothenot'schen Aufgabe. 124. — v. Schlagintweit-Sakülinski: Die Wasseruhr und die Klangscheibe in Indien. S. 128. — v. Kobell: Necrologe von Dr. Karl August von Steinheil. — Karl Gustav Christoph Bischof. — Dr. Heinrich Gustav Magnus. — Wilhelm Ritter v. Haidinger. S. 141. — Bauernfeind: Ueber ein neues graphisches und mechanisches Verfahren, die Lage zweier Standorte des Messtisches aus den daselbst gemessenen scheinbaren Grössen der Verbindungslinien dieser Orte mit zwei anderen gegebenen Punkten zu bestimmen. S. 157 — v. Pettenkofer: Ueber Bestimmung der Kohlensäure im Trinkwasser. S. 170.

1871. Heft III. Beetz: Ueber die Einwirkung der Electricität auf Flüssigkeitsstrahlen. S. 221. — v. Pettenkofer: Ueber Kohlensäuregehalt der Luft im Boden (Grundluft) von München in verschiedenen Tiefen und zu verschiedenen Zeiten.

Atti dell' Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei, compilati dal Segretario. Anno XXV. Roma 1872. 4°. (Vergl. Literar. Ber. Nr. CCXIV. S. 15.)

Sessione II^{a} del 21. Gennaio 1872. — Secchi, P. Angelo: Sulla distribuzione delle protuberanze intorno al disco solare. Quinta comunicazione. p. 41. (Wir machen unsere Leser recht sehr auf diese interessanten und wichtigen Untersuchungen über die Vertheilung der Portuberanzen auf der Sonnenscheibe aufmerksam). — Fergola E., e Secchi, P. Angelo: Sulla longitudine tra Roma e Napoli. p. 54. — Provenzali, P. F. S.: Sul riscaldamento dell'aria in vicinanza della scintilla delle macchine elettriche. p. 68. (Auch diese Untersuchungen über die Erwärmung der Luft in der Nähe des elektrischen Funkens verdient alle Beachtung, ebenso wie die folgende Abhandlung.) — Armellini, Prof. Tito: Di alcuni nuovi fenomeni dell'-aria compressa. p. 94. — Ferner theilt Herr B. Boncompagni p. 100 ein ihm von Herrn E. Catalan brieflich (Liège, 20. Septembre 1871) zugesandtes arithmetisches Theorem mit, welches Herr Catalan „un assez étrange théorème d'Arithmétique" nennt. Dieses Theorem, wie es hier ausgesprochen wird, ist das folgende:

Digitized by Google

„Soit N un multiple de 4, donné. Soit n un nombre pair, inférieur à N. On décompose n en une somme de puissances de 2, et l'on fait $\lambda_n = \pm 1$, selon que ces puissances sont en nombre pair ou en nombre impair. Enfin, supposant $N - n = 2^{\beta_n} i$, on a

$$\sum_{n=0}^{n=N-2} \lambda_n 2^{\beta_n} = \pm \frac{N}{2},$$

le signe $+$ répondant au cas où N est la somme d'un nombre impair de puissances de 2."

Giornale di Matematiche ad uso degli studenti delle Università Italiane pubblicato per cura dei Professori G. Battaglini, E. Fergola in unione dei Professori E. d'Ovidio, G. Torelli e C. Sardi. Napoli. (S. Literar. Ber. CCXIV. S. 15.).

Anno X. Gennaio e Febbraio 1872. Sulla corrispondenza multipla fra due spazii à tre dimensioni; per Oreste Tognoli. p. 1. — Sulle curve del terz'ordine circoscritte a un quadrilatero completo; per E. d'Ovidio. p. 16. — Sopra alcune formole in coordinate di rette; per E. d'Ovidio. p. 33. — Intorno ad una funzione che entra nella composizione delle ridotte delle frazioni continue e delle radici delle congruenze di 1º Grado ad una incognita; per Porcelli Onofrio. p. 37. — Corrispondenza; E. Beltrami. p. 47. — Intorno ad una trasformazione di Dirichlet; per E. Beltrami. p. 49. — Teorema di Geometria pseudosferica: per E. Beltrami. p. 53. — Quistioni; E. Fergola. p. 54. — Intorno ai sistemi di rette di grado qualunque; per G. Battaglini. p. 55.

Digitized by Google

Literarischer Bericht

CCXVI.

Die Originalhandschrift des Copernicanischen Hauptwerks „De Reuolutionibus" und die Neuausgabe desselben durch den Copernicus-Verein für Wissenschaft und Kunst zu Thorn.

Der Unterzeichnete war von dem obengenannten Verein beauftragt, die Originalhandschrift des Copernicus, die sich glücklicherweise bis jetzt erhalten hat, mit den Drucken zu vergleichen, zugleich im Verein mit einigen Collegen die Neuausgabe des Werkes vorzubereiten und zu bewirken. Ich glaubte annehmen zu dürfen, dass eine nähere Nachricht über das Manuscript, über sein Verhältniss zu den bekannten Drucken und über die beabsichtigte Jubelausgabe nicht ohne Interesse für Fachgenossen sein würde, und veröffentliche deshalb die nachfolgenden Zeilen.

Die eigenhändige Handschrift des Copernicus befindet sich schon seit längerer Zeit, mindestens seit dem Jahre 1630, im Besitze der Bibliothek des Hochgräflich Nostitz'schen Majorats, die in Prag aufbewahrt wird. Es ist eine Papierhandschrift von 212 Blatt, 285^{mm} hoch und 200^{mm} breit mit 32 bis 37 Zeilen auf der Seite. Die Blätter sind von der Hand des verstorbenen Grafen Erwein Nostitz auf den Vorderseiten mit Bleistift von 1—212 bezeichnet und mit 3 Vor- und 2 Nachblättern in einen Pergamentband gebunden, so dass also die Gesammtzahl der Blätter des Buches 217 beträgt. Das Manuscript

Digitized by Google

ist nochmals in eine rothe Saffianhülle, die mit Silber beschlagen ist, und mit dieser in einen Ledersäckel gesteckt und wird nicht in der Bibliothek selbst, sondern in der Hauptkasse aufbewahrt. Die Bibliotheksnummer ist 6726, die Standortsbezeichnung „sf. 156." Auf dem Rücken des Bandes steht von der Hand des Prof. Christmann, den ich später noch erwähnen muss: *„Nicolai Copernick || Opus de Re- || uolutionibus Coelestib9 || manu ppria exaratum"* und auf demselben Rücken, jedoch am untern Ende, die Standortsbezeichnung „156 sf." Ueber die Schicksale des Manuscripts gibt das zweite und dritte Vorsetzblatt Kenntniss. Auf Blatt II^a^ steht nämlich *„Venerabilis et eximij || Iuris utriusqȝ Doctoris, || Dni Nicolai „Copernick, || Canonici Varmiensis, in || Borussia Germaniae ma- || thema„tici celeberrimi opus || de reuolutionibus coelestibus || propria manu exa„ratum: || & hactenus in bibliotheca || Georgij Ioachimi Rhetici, || item „Valentini Othonis || conseruatum, ad usum studij || mathematici procu„rauit || M. Iacobus Christmannus || Decanus Facultatis ar- || tium, anno* 1603. *die* 19 || *Decembris";* dann auf der Rückseite von anderer Hand: *„Hunc librum à vidua piè defuncti || M. Iac. Christmanni digno redem„ptum pretio, || in suam transtulit Bibliothecam ||* JOHANNES AMOS NIVANUS: *„Anno* 1614. || 17 *Ianuarij. Heidelbergae."* Auf dem dritten Blatte endlich steht der Name: „Otto F. v. Nostitz mpr." Der Freiherr Otto v. Nostitz ist der Begründer des jetzigen Gräflichen Majorats im Jahre 1630. Auf der Rückseite des vordern Deckels steht von der Hand des Grafen Erwein Nostitz eine längere genaue Notiz aus dem Jahre 1854 über die Beschaffenheit der Handschrift, und das Bibliothekszeichen: das Gräflich Nostitzsche Wappen mit der Unterschrift: *„Ex Bibliotheca Maioratus Familiae Nostitzianae* 1774."[1])

Die Handschrift ist vortrefflich erhalten und sehr deutlich und leserlich geschrieben; nur die allerbekanntesten Abkürzungen sind in Anwendung gekommen. Sie enthält natürlich nicht die bekanntlich von Osiander verfasste Vorrede *„Ad lectorem de hypothesibus huius operis"* aber auch nicht den Brief des Cardinal Schönberg an Copernicus und, was noch mehr zu verwundern, ebensowenig die Widmung des Werkes durch Copernicus an Papst Paul III; sie beginnt dagegen unmittelbar und ohne jede Ueberschrift mit den

---

1) Die Bibliothek besitzt auch einen geschriebenen Katalog betitelt: „Bücherverzeichnis der Bibliothec (sic!)" darin ist das Manuscript auf Bltt. 171^a^ aufgeführt. Der Katalog wurde zum Zwecke einer Schätzung der Bibliothek angelegt, und die beiden vereidigten Sachverständigen haben die Handschrift zuerst mit 1 Fl. geschätzt. Dieser Preis für dieselbe schien hnen jedoch noch zu hoch; es ist deshalb der Gulden weggestrichen und dafür 30 Kr. geschrieben worden. Der Katalog datiert aus dem Jahre 1834.

Digitized by Google

rsten Worten der von der Warschauer Ausgabe zuerst veröffentlichen Einleitung in das Werk, welche diese, ohne durch das Manucript dazu berechtigt zu sein, Praefatio überschreibt. An diese Einleitung schliesst sich unmittelbar, sogar in derselben Zeile, die Ueberschrift des ersten Capitels des ersten Buches: „*Quod mundus it sphaericus. C. primum.*“, wie denn überhaupt an keiner Stelle sich eine Ueberschrift der einzelnen Bücher findet, und auch nur an einer Stelle ein Explicit eines solchen. Aus diesem Explicit: „*Quintus reuoutionum liber finit*“, geht ebenfalls hervor, dass Copernicus sein Buch nur De revolutionibus oder ähnlich zu betiteln die Absicht hatte, und wird dadurch die Nachricht von Doppelmeyer bestätigt, dass Osiander die Worte *orbium coelestium* deshalb selbstständig zugefügt habe, um die Anhänger der alten Lehre dadurch zu gewinnen, das Buch zu lesen, da nichts von der Bewegung der Erde in diesem Titel liegt.

Was das Manuscript aber um vieles interessanter macht, als es schon dadurch wird, dass es die Originalschrift eines solchen bedeutenden Mannes ist, liegt in der Einsicht, die man dadurch in das geistige Schaffen desselben erhält. Das Werk, wie es gedruckt vorliegt, stellt die letzte Redaction des Copernicus dar; in dem Manuscripte liegt aber, freilich ausgestrichen und z. Th. schwer zu erkennen, eine frühere Recension, ja selbst Reste einer noch vorhergehenden vor, und es hat ein grosses Interesse zu sehen, wie Copernicus an seinem Werke gefeilt, wie er manche, vielleicht richtigere Ideen, als das gedruckte Werk sie bietet, verworfen, wie er endlich die Ordnung seiner Sätze und Capitel vielfach verändert und vertauscht hat.

Die älteste Redaction, die man noch erkennen kann, theilte das Werk in acht, nicht in sechs Bücher, wie die gedruckte thut. Sie zerfällte nämlich jedes der beiden ersten Bücher in zwei Theile. Das erste Buch dieser frühesten noch erhaltenen Fassung des Werkes begriff die ersten 11 Capitel desselben in sich, hatte aber noch einen längern Zusatz, worin Copernicus den Brief des Lysis an Hipparch aus dem Griechischen übersetzt, den er am Anfange der Widmung an Papst Paul III erwähnt. Er sagt ganz speciell, er wolle damit dem ersten Buche ein Ende setzen. Das zweite Buch dieser ersten Redaction umfasste dann die Trigonometrie; das dritte Buch die ersten 13 Capitel des jetzigen zweiten Buches; das 14. Capitel[2]) desselben, das aber in mehrere Capitel getheilt war, deren Ueberschriften

2) Von diesem Capitel ist noch ein längeres Bruchstück einer, wie nach den Schriftzügen anzunehmen ist, spätern Redaction erhalten, das mehrfach von der bekannten Version abweicht.

Digitized by Google

später ausgestrichen sind, bildete mit dem Sternverzeichnisse zusam-men das vierte Buch. Die übrigen Bücher sind nicht verändert. Doch schon vor Vollendung des Ganzen muss **Copernicus** das vierte Buch der ersten noch vorhandenen Redaction als solches gestrichen haben; denn am Ende des jetzigen vierten Buches findet sich das oben erwähnte Explicit, durch welches es als fünftes bezeichnet wird, was nur unter dieser Bedingung stimmt. Die durch diese Streichung hergestellten sieben Bücher würden die zweite erkennbare Redaction vorstellen, während das Manuscript deutlich zeigt, dass ihm die jetzi-ge Gestalt erst zum Zwecke des Druckes von **Copernicus** gegeben ist, denn viele Zusätze und alle Durchstreichungen, von denen man nach der Tinte nicht behaupten kann, sie seien gleich beim Nieder-schreiben gemacht, sind alle mit derselben schwärzeren Tinte ausge-führt und mit einer von der ersten Schrift sich deutlich abhebenden schnellen Currentschrift, wie man sie in Briefen anzuwenden pflegt. Es ist jedoch unzweifelhaft, dass diese Zusätze und Aenderungen von derselben Hand sind, welche das eigentliche Manuscript geschrieben, und dass die Handschrift dem **Copernicus** angehört, lässt sich ausser durch die stricten Zeugnisse der früheren Besitzer durch Vergleichung mit von **Copernicus** selbst unterzeichneten Schriftstücken, die wir noch in grösserer Anzahl besitzen, leicht darthun. Merkwürdigerweise muss man nämlich zu diesem Indicienbeweis seine Zuflucht nehmen, da der Name des **Copernicus** von seiner eigenen Hand geschrieben nirgend sich findet. Sicherlich aber hat **Copernicus** nur das Stern-verzeichniss so, wie es jetzt vorliegt, nicht selbst geschrieben, sondern dieses ist von einem Lohnschreiber hergestellt. Der Ductus der Schrift hebt sich hier ganz deutlich von dem des **Copernicus** ab, und die Thatsache wird dadurch noch klarer, dass von ihm mit Ueberschrif-ten von seiner Hand sich auch nochmals die Schemata zu demselben, aber unausgefüllt, vorfinden. Das Sternverzeichniss umfasst ganz zwei Lagen des Manuscriptes, das jedenfalls erst nach der Vollendung des Werkes in seiner jetzigen Gestalt gebunden ist.[3])

Die erste Ausgabe und, da die spätern nach dieser gemacht worden sind, auch alle übrigen können nach dem uns erhaltenen Original-Ma-nuscripte nicht gedruckt sein. Es muss nothwendig von demselben, und zwar von einem Sachverständigen, Abschrift genommen sein, und nach dieser ist der Abdruck besorgt. Es ist selbst mit der Ausgabe zur Seite schwierig, in dem vielfach umgestellten und durchstrichenen ...

3) Das Wasserzeichen der älteren Bogen ist eine Schlange, die sich um einen Stab windet, während die später eingelegten Blätter ein ŋ mit einem Stern darüber zeigen, etwa so: $\overset{*}{ŋ}$

Digitized by Google

tograph des Copernicus sich zurecht zu finden, so dass hierdurch schon das Gesagte glaubwürdig wird; noch mehr sieht man die Richtigkeit ein, wenn man die willkürlichen Aenderungen der Copernicanischen Ausdrucksweise beachtet, wodurch wohl meistens eine bessere Latinität erzielt wird, die aber ein Setzer sich selbständig kaum erlauben würde. An einigen Stellen sind selbst von Copernicus durchstrichene Zeilen mit gedruckt, an andern nichtdurchstrichene weggeblieben. Wie sehr bedeutend diese Abweichungen sind, kann man aus der Thatsache entnehmen, dass nur eine Seite (Blatt 103^a der Ausgaben) und zwar eine Tabelle, in der Handschrift und im Drucke vollständig übereinstimmen; dass ferner die Figuren in den Ausgaben zum Theil an unrichtigen Stellen stehen, ja eine sogar einem falschen Capitel zugetheilt ist, wodurch Verwirrung entstehen muss. Nicht einmal die Tabellen und die von Copernicus gefundenen sonstigen Zahlenwerthe haben die Ausgaben beibehalten, sondern vielfach und in einschneidender Weise daran geändert. [4])

Die Genauigkeit des Copernicus sieht man besonders bei der Berechnung seiner eigenen Beobachtungen, wo er die Zahlen oft zwei bis dreimal ausgestrichen, wiedergeschrieben, manchmal auch die ursprünglichen wieder eingesetzt hat. In den durchstrichenen Stellen sind von ihm noch eine grössere Zahl fremder Beobachtungen theils erwähnt, theils berechnet, darunter eine auch anderweit bekannte des Domenico Maria Novara, die aber von ihm an ein bestimmtes Jahr geknüpft wird. Da Domenico Maria der Lehrer des Copernicus war, so dürfte die Jahresangabe wohl Zuverlässigkeit beanspruchen.

Eine der wichtigsten Stellen findet sich unter den ausgestrichenen. Im III Buche Cap. IIII, welches die Ueberschrift hat: „*Quomodo motus reciprocus siue librationis ex circularibus constet. Cap. IIII.*“ (Blatt 67^b der beiden ersten Ausgaben) handelt er eben von der Libration des Mondes und zeigt, dass dieselbe geradlinig ist, sobald die beiden excentrischen Kreise gleichen Durchmesser haben. In der jetzt durchstrichenen Stelle heisst es nun aber, wenn die beiden Kreise ungleiche Durchmesser besitzen, so wird die Bewegung in einem Kegel- oder Cylinderschnitt vor sich gehen, „*quam ellypsim vocant mathematici.*“ Es ist hier also zum ersten Male, soviel ich weiss, für eine Bewegung am Himmel die Möglichkeit einer elliptischen Bahn zugegeben.

---

4) Die alten Setzer hatten bekanntlich die Gewohnheit, in den benutzten Manuscripten die Blatt- oder Seitenzahlen des Druckes am Rande zu notieren. Da hiervon sich in der Handschrift des Copernicus keine Andeutung findet, so liegt darin eine Bestätigung meiner obigen Behauptung, dass die Ausgaben nicht nach dem noch vorhandenen Manuscript gemacht sind.

Digitized by Google

Copernicus fügt noch hinzu: „*sed de his alias*“, kommt aber nirgends darauf zurück. Der erwähnte Passus ist aber erst *mit* den übrigen behufs des Druckes gestrichen worden.

Man sieht aus dem Gesagten, dass eine Ausgabe auf Grund der Handschrift selbst in dem Falle von Werth sein würde, wenn sie nur den überlieferten Text nach derselben purificieren würde. Die vom Copernicus - Verein beabsichtigte Ausgabe wird jedoch ausserdem erkennen lassen, welches der ursprüngliche Text gewesen, und welche Aenderungen Copernicus an demselben nach und nach vorgenommen; sie wird diejenigen durchstrichenen Stellen, welche irgend ein Interesse beanspruchen dürften, unter dem Texte geben, ausserdem aber die Verschiedenheit der Lesarten der bis jetzt erschienenen vier Ausgaben ebenfalls unter dem Texte notieren. Der erste Druck hat, was bis jetzt auch nicht bekannt gewesen zu sein scheint, ein Druckfehlerverzeichniss in Form eines fliegenden Blattes hinzugefügt, das, wenn auch nicht in allen Theilen zuverlässig, doch eine grosse Zahl von Fehlern im Sinne des Autographs berichtigt. [5]) Keine der nachfolgenden Auflagen hat diese Fehler verbessert, wohl aber hat besonders die zweite Ausgabe eine grosse Zahl neuer hinzugefügt.

Für die Neuausgabe galt als selbstverständlich, die Orthographie des Copernicus so viel als möglich beizubehalten. Sie unterscheidet sich von der der Ausgaben in vielen Puncten. So schreibt Copernicus immer *tamquam, quamquam, earumdem* und ähnlich, während die Ausgaben *tanquam, quanquam, earundem* ja selbst *nanque* bieten, er schreibt *boraeus, caelum*, ferner *iusta* für *iuxta*, letzteres aber nur in denjenigen Theilen, welche nicht mit der schnelleren Cursivschrift ausgeführt sind. Die Interpunction konnte jedoch weder in *der* Weise der Handschrift, noch in der der Ausgaben beibehalten werden: sie soll

---

5) Ich fand dieses Druckfehlerverzeichniss zufällig in dem Exemplare der ersten Ausgabe, welches die Königl. und Universitätsbibliothek zu Königsberg besitzt. Eine Vergleichung mit den spätern Drucken zeigte mir sogleich, dass die neuern Herausgeber dasselbe nicht gekannt hatten, aber auch kein mir bekanntes bibliographisches Werk führt dasselbe auf. Es scheint auch, als ob dasselbe nicht allen Exemplaren beigegeben, sondern erst später gefunden und als fliegendes Blatt dem Rest der Auflage hinzugefügt wurde. Manches Exemplar desselben mag auch durch Ignoranz des Buchbinders verloren gegangen sein. Einer gütigen Mittheilung des Herrn Prof. Hipler in Braunsberg entnehme ich noch die Notiz, dass es auch Exemplare der ersten Ausgabe gibt, bei welchen auf der ersten Seite des Druckfehlerverzeichnisses der Titel des Werkes typographisch genau wiederholt ist. Ein solches Exemplar befindet sich z. B. im Besitze des Director Arendt in Braunsberg.

Digitized by Google

ganz nach neueren Principien durchgeführt werden, dagegen glaubte die Redactions-Commission die von Copernicus in absonderlicher Weise geschriebenen Römischen Zahlen in dieser Form beibehalten zu müssen. Die Ausgabe wird also z. B. an vielen Stellen CXVC und ähnliche Formen bieten, statt CLXXXV u. s. w.

Der neue so construierte Text des Copernicus wird, hoffen wir, treuer zeigen, was der grosse Mann wirklich geschrieben, und den Standpunct sicherer erkennen lassen, den er mit seinem System eingenommen, als es die bis jetzt erschienenen, auf dem von Anfang an vielfach von nicht dazu Berechtigten umgestalteten ersten Drucke fussenden Ausgaben vermögen.

Die Jubelausgabe soll jedem ermöglichen, soweit dies eben geschehen kann, die Geschichte des Textes zu verfolgen, und so gleichzeitig einen Blick zu thun in die geistige Werkstatt eines Geistesheroen, wie nur wenige in der Geschichte verzeichnet sind.

Thorn, am 12. April 1872.

M. Curtze.

Digitized by Google

Mathematische und physikalische Bibliographie.

CXVI.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Barentin, W., Namen- und Sachregister zu den Fortschritten der Physik. Bd. $^1/_{20}$. 8⁰. Berlin, G. Reimer. 2 Thlr. 20 Sgr.

Fortschritte, die der Physik im Jahre 1868. 24 J. Red. v. B. Schwalbe. 2. Abth. 8⁰. Berlin, G. Reimer. 2 Thlr. 10 Sgr.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. Herausgegeben v. C. Ohrtmann und A. 2. Bd. J. 1869 und 1870. 1. Heft. 8⁰ Berlin, G. Reimer. 1 Thlr. 6 Sgr.

Systeme, Lehr- und Wörterbücher.

Grassmann, R., die Formenlehre oder Mathematik. 8⁰. Stettin, Grassmann. 1 Thlr. 5 Sgr.

Arithmetik.

Bopp, C., Anschaul. Unterricht im metr. System. Mit 1 Tafel: das Meter-Quadrat oder Zentiar. 8⁰. Ravensburg, Ulmer. 15 Sgr.

Bremiker, C., logarithmisch-trigonometr. Tafeln mit 5 Decimalstellen. 8⁰. Berlin, Weidmann. 15 Sgr.

Clebsch, A., Ueber einige Fundamentalaufg. der Invariantentheorie. 4. Göttingen, Dieterich. 28 Sgr.

Frombeck, H., Ueber Fourier'sche Integraln und Analogien derselben. 8⁰. Wien, Gerolds Sohn. 8 Sgr.

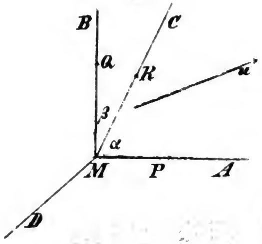
Giseke, B., System. geordnete Aufg. z. Unterricht in Buchstabenrechnung und Algebra. 2. Aufl. 8⁰. Halle, Schmidt. 12 Sgr.

Hechel, E., arithmet. Aufgaben. 8⁰. Reval, Kluge. 20 Sgr.

„ „ Auflösungen dazu. 8⁰. Ebd. 12 Sgr.

Digitized by Google

Fig. 4.



M

Fig. 8.

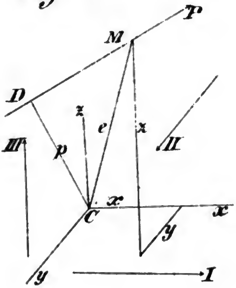
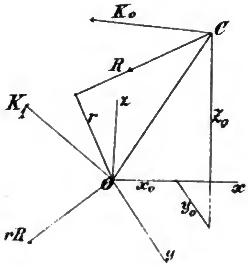


Fig. 12.



E′

Digitized by Google

To avoid fine, this book should be returned on
or before the date last stamped below

Digitized by Google

Stanford University Libraries
3 6105 010 229 453

[redacted]

510.5
A673
v.59

STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES
STANFORD AUXILIARY LIBRARY
STANFORD, CALIFORNIA 94305-6004
(415) 723-9201
All books may be recalled after 7 days

DATE DUE

NOV 0 9 1995

28D DEC 06 1995

E AREA

Digitized by Google